Obsah

1 Lineární prostor

Při zkoumání přírody se pokoušíme její zákonitosti popsat pomocí diferenciálních rovnic. Například rovnice druhého řádu $y''(x) + cy' + y(x) = f(x)$, kde $c \in \mathbb{R}$ popisuje tlumené kmitání v elektrickém obvodu. Při hledání řešení těchto úloh potřebujeme funkce sčítat, násobit, počítat limity jejich posloupností ap.. Množiny řešení diferenciálních rovnic mají společné vlastnosti, které vedou k definicím následujících matematických struktur.

Množina celých čísel s operací sčítání $(Z, +)$ s neutrálním prvkem 0 je Abelova grupa.

Norský matematik Niels Heinrich Abel (1802-1829).

dokázal neřešitelnost algebraických rovnic 5. a vyšších stupňů pomocí odmocnin. Při tomto důkazu uplatnil ideje teorie grup.

Množina reálných čísel s operacemi sčítání a násobení $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ s nulovým prvkem 0 a jednotkovým prvkem 1 tvoří těleso.

Definice 1.1 : (grupa)
Množina V s operací $+$ (tj. se zobrazením z $V \times V$ do V), zkráceně $(V, +)$, se nazývá **grupa**, jestliže platí:

i) $\forall\, u, v, w \in V\colon (u + v) + w = u + (v + w)\,,$ (asociativita)

ii) $\exists\, o \in V\, \forall\, u \in V\colon u + o = o + u = u\,,$ (neutrální prvek)

iii) $\forall\, u \in V\, \exists\, \widehat{u} \in V\, :\, u + \widehat{u} = \widehat{u} + u = e\,.$ (inverzní prvek)

Pokud navíc platí

iv) $\forall\, u, v \in V\, :\, u + v = v + u\,,$ (komutativita)

pak hovoříme o **komutativní grupě** nebo **Abelově grupě**.

Definice 1.2 : (těleso)
Množina T s dvěma operacemi $+, \cdot$, zkráceně $(T, +, \cdot)$, se nazývá **těleso**, jestliže platí:

i) $(T, +)$ je komutativní grupa s neutrálním (nulovým) prvkem značeným 0 ,

ii) $(T \setminus \{0\}, \cdot)$ je grupa s neutrálním (jednotkovým) prvkem značeným 1 ,

iii) $\forall\, a, b, c \in T$: (distributivita)

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

Jestliže $(T \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutativní grupa, pak hovoříme o **komutativním tělese** .

<u>*Cvičení 1.1*</u> :

a) Dokažte, že množina $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ tvoří Abelovu grupu.

b) Dokažte, že množina $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tvoří komutativní těleso.

Definice 1.3 : (lineární prostor)
Nechť $(V, +)$ je komutativní grupa a T je těleso. Nechť operace „ $\cdot$ " z $T \times V$ do V : $(a, u) \to a \cdot u$ splňuje:

i) $\forall\, a, b \in T\, \forall\, u \in V\, :\, a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$ (asociativita)

ii) $\forall\, a, b \in T\, \forall\, u \in V\, :\, (a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u,$
$\forall\, a \in T\, \forall\, u, v \in V\, :\, a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
(distributivita)

iii) $\forall\, u \in V,\, 1 \in T\, :\, 1 \cdot u = u$ (absorpce jednotky).

Potom množina V s operacemi $+, \cdot$ se nazývá **lineární (vektorový) prostor** nad tělesem T. Prvky množiny V se nazývají **vektory**, (prvky tělesa T se nazývají **skaláry**).

Příklad 1.1 :

1. Množina všech řešení diferenciální rovnice
$$u''(x) + 4u(x) = 0$$
je tvořena funkcemi $u(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ a tvoří lineární prostor.
2. Množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel tvoří vektorový prostor.
3. Množina všech polynomů tvoří vektorový prostor.
4. Množina všech matic stejného typu tvoří vektorový prostor.

V množině funkcí nebo polynomů je neutrálním prvkem nulová funkce (polynom), v množině n-tic je neutrálním prvkem nulový vektor $(0, \cdots, 0)$.

Definice 1.4 : (lineární závislost a nezávislost)
Nechť V je lineární prostor nad tělesem T. Nechť vektory $u_1, u_2, \ldots, u_n \in V$, konstanty $a_1, a_2, \ldots, a_n \in T$, $n \in \mathbb{N}$, pak **lineární kombinací** vektorů $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nazýváme vektor
$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n\,.$$
Jestliže
$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n = o \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0\,,$$
(o je nulový (neutrální) vektor) pak říkáme, že vektory $u_1, u_2, \ldots, u_n$ jsou **lineárně nezávislé**, v opačném případě jsou **lineárně závislé**.

Vektory $u = (1, 1)$, $v = (2, 1)$ z prostoru všech uspořádaných dvojic jsou lineárně nezávislé.
Vektory $u = (1, 1)$, $v = (-2, -2)$ jsou lineárně závislé.

Existence báze vektorového prostoru plyne z **axiomu výběru**: Jestliže $\mathcal{M}$ je množina neprázdných množin, potom existuje zobrazení f s definičním oborem $\mathcal{M}$, které každé množině $A \in \mathcal{M}$ přiřadí jistý prvek množiny A, tedy $f(A) \in A$. Axiom výběru zformuloval v roce 1904 německý matematik Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953).

Definice 1.5 : (báze a dimenze prostoru)
Vektory $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$, $n \in \mathbb{N}$, tvoří **bázi** lineárního prostoru V nad tělesem T, jestliže

i) vektory $e_1, e_2, \ldots, e_n$ jsou lineárně nezávislé,

ii) $\forall\, u \in V$ jsou vektory $u, e_1, e_2, \ldots, e_n$ lineárně závislé,

tj. existují $a_1, a_2, \ldots, a_n \in T : u = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$.
Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazýváme **souřadnice** vektoru u vzhledem k bázi $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Píšeme $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Číslo $n \in \mathbb{N}$, neboli počet prvků báze, nazýváme **dimenze** prostoru V. Píšeme $\dim V = n$. Pokud neexistuje konečná báze prostoru V, pak píšeme $\dim V = \infty$.

Cvičení 1.2 : Dokažte, že prostor $(\mathbb{C}(\langle 0,1\rangle), +, \cdot)$ všech spojitých funkcí na intervalu $\langle 0,1\rangle$ s operacemi sčítání funkcí a násobení funkcí reálným číslem je vektorový prostor s nekonečnou dimenzí.

Podobně prostor $L^p(\Omega) = \{u : \int\limits_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty\}$ je lineární prostor s nekonečnou dimenzí.

Prostor všech uspořádaných trojic reálných čísel $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ je vektorový prostor dimenze tři.

Označíme $\ell^p = \{(a_n) : \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}$ (množina všech posloupností s konečným součtem p-tých mocnin absolutních hodnot členů posloupnosti). K tvrzení, že množina ℓ^p je lineární prostor, potřebujeme dokázat, že pokud posloupnosti $(a_n), (b_n) \in \ell^p$, pak také $(a_n + b_n) \in \ell^p$ (uzavřenost prostoru ℓ^p na operaci sčítání). To dokážeme pomocí následujících nerovností.

Prostor ℓ^p má nekonečnou dimenzi, bázi v tomto prostoru tvoří vektory $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, tedy vektory, které mají na i-tém místě jedničku, jinak samé nuly.

Lemma 1.1 : Nechť $a, b > 0$, $p > 1$ a q takové, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, potom

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,. \tag{1}$$

Důkaz : Uvažujeme funkci $\varphi(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}$ pro $t > 0$. Derivace $\varphi'(t) = t^{p-1} + t^{-q-1} = 0$ pro $t = 1$ a v tomto bodě nabývá funkce φ svého minima. Platí $\varphi(1) = \frac{1^p}{p} + \frac{1^{-q}}{q} = 1$, tudíž $1 \le \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}$. Dosadíme $t = a^{\frac{1}{q}}\, b^{\frac{-1}{p}}$, pak dostaneme $1 \le \frac{a^{\frac{p}{q}} b^{-1}}{p} + \frac{b^{\frac{q}{p}} a^{-1}}{q}$, tedy $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Lemma 1.2 : (Hölderova nerovnost)
Mějme dvě posloupnosti $(a_n), (b_n)$, reálná čísla $p, q > 1$ taková, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, potom platí **Hölderova nerovnost**

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q\Big)^{\frac{1}{q}} .$$

Při práci na Fourierových řadách objevil v roce 1884 Hölder nerovnost, která nyní nese jeho jméno.
Otto Ludwig Hölder (1859-1937).

Důkaz : Položíme $A_n = \dfrac{a_n}{\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}}$ a $B_n = \dfrac{b_n}{\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|^q\Big)^{\frac{1}{q}}}$.
Z nerovnosti (1) v lemmatu 1.1 dostaneme $A_n B_n \leq \frac{A_n^p}{p} + \frac{B_n^q}{q}$
a sečtením dostaneme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|}{\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}} \dfrac{|b_n|}{\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|^q\Big)^{\frac{1}{q}}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$
Odtud již plyne Hölderova nerovnost.

Lemma 1.3 : (Minkowského nerovnost)
Mějme dvě posloupnosti $(a_n), (b_n)$ a reálné číslo $p > 1$, potom platí **Minkowského nerovnost**

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} .$$

Známý polský matematik Minkowski rozvíjel nový pohled na prostor a čas a podal matematické základy teorii relativity.
Hermann Minkowski (1864-1909).

Důkaz : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p \leq$ (troj. nerov.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)^p$
$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)^{p-1}(|a_n| + |b_n|) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)^{p-1}|a_n| +$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)^{p-1}|b_n| \leq$ (Hölderova nerovnost) $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| +$
$|b_n|)^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)^{(p-1)q}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$

Platí $(p-1)q = p$ a $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$, tedy

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p}{\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p\Big)^{\frac{1}{q}}} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{a odtud}$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} .$$

1.1 Metrický prostor

Definice 1.6 : (metrický prostor)
Jestliže funkce $\varrho : V \times V \to \mathbb{R}$ splňuje:

pozitivnost

M1) $\forall\, u, v \in V : \ \varrho(u,v) \geq 0 \quad \text{a} \quad \varrho(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = v\,,$

symetrie

M2) $\forall\, u, v \in V : \ \varrho(u,v) = \varrho(v,u)\,,$

trojúhelníková nerovnost

M3) $\forall\, u, v, w \in V : \ \varrho(u,w) \leq \varrho(u,v) + \varrho(v,w)\,,$

pak se ϱ nazývá **metrika** na prostoru V. Říkáme, že V je **metrický prostor**.

Metrika nám umožňuje změřit vzdálenost bodů prostoru.

Příklad 1.2 :

1. Na prostoru $\mathbb{R}^n$ definujeme **eukleidovu metriku** vztahem $\varrho(u,v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}\,,$ kde $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ a $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

Metrika σ není invariantní vůči posunutí, tzn. $\sigma(u+w, v+w) \neq \sigma(u,v)$.

2. Nechť ϱ je eukleidova metrika, potom předpisem

$$\sigma(u,v) = \begin{cases} \varrho(u,v)\,, & \text{jestliže } \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : u = \lambda\, v\,, \\ \varrho(u,o) + \varrho(v,o) & \text{jinak,} \end{cases}$$

definujeme opět metriku.

3. **Diskrétní metriku** definujeme předpisem

$$\varrho(u,v) = \begin{cases} 1\,, & \text{jestliže } u \neq v\,, \\ 0\,, & \text{jestliže } u = v\,. \end{cases}$$

Pokud V je lineární prostor, pak navíc předpokládáme, že metrika ϱ splňuje

invariace vůči posunutí

M4) $\forall\, u, v, w \in V : \ \varrho(u+w, v+w) = \varrho(u,v)\,,$

spojitost metriky

M5) Jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$, pak $\forall\, u \in V : \ \lim\limits_{n\to\infty} \varrho(\lambda_n\, u, o) = 0\,.$

1.2 Normovaný prostor

Příklad 1.3 : (norma, skalární součin)

Nechť V je vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbb{R}$ a $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in V$, potom číslo

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

se nazývá **norma** vektoru u.

Nechť $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in V$, potom číslo

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

nazveme **skalární součin** vektorů u, v.

V prostoru nekonečné dimenze jsou předchozí definice normy a skalárního součinu nepoužitelné. Proto zavádíme jejich obecnou formu.

Definice 1.7 : (zobecnění normy a skalárního součinu)
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ splňující:

N1) $\forall\, u \in V : \|u\| \geq 0 \quad \text{a} \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = o\,,$

N2) $\forall\, u \in V\ \forall\, a \in \mathbb{R} : \|a \cdot u\| = |a| \cdot \|u\|\,,$

N3) $\forall\, u, v \in V : \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
(trojúhelníková nerovnost),

se nazývá **norma** na prostoru V. Říkáme, že V je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varrho(u, v) = \|u - v\|$ se nazývá **vzdálenost** vektorů u, v a je metrikou na prostoru V.

V je lokálně konvexní prostor, potom V je metrizovatelný $\Leftrightarrow$ má spočetný fundamentalní systém okolí nuly. Prostor všech funkcí na nespočetné množině M s topologií bodové konvergence není metrizovatelný. Metrizovatelný lokálně konvexní prostor nemusí být normovatelný - např. prostor všech posloupností.

<u>*Příklad 1.4*</u> : Na prostoru ℓ^p definujeme normu předpisem $\|u\| = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Trojúhelníková nerovnost plyne z Minkowského nerovnosti, viz lemma 1.3.

1.3 Unitární prostor

Pro vektory také používáme značení se šipkou $\vec{u}$ a skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ se také značí $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
S pojmem skalárního součinu se velice často setkáme ve fyzice.
Například, působí-li síla $\vec{F}$ po přímočaré dráze směrem $\vec{s}$, pak vykoná práci $A = \vec{F} \cdot \vec{s} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\| \cdot \cos\varphi$, kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{F}$ a $\vec{s}$.

Definice 1.8 : (unitární prostor)
Nechť V je reálný (komplexní) vektorový prostor a existuje zobrazení $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ takové, že

S1) $\forall\, u \in V,\, u \neq o : (u, u) > 0\,,$ (pozitivita)

S2) $\forall\, u, v \in V\ (u, v) = \overline{(v, u)}\,,$ (symetrie)

S3) $\forall\, \lambda \in \mathbb{C},\, \forall u, v \in V\colon (\lambda u, v) = \lambda (u, v)\,,$ (násobení)

S4) $\forall\, u, v, w \in V\colon (u + v, w) = (u, w) + (v, w)\,,$ (distributivita)

potom se $(\cdot, \cdot)$ nazývá **skalární součin** na prostoru V a prostor $(V, \cdot)$ je **unitární prostor**.

Pro pevně zvolené u je skalární součin $F(v) = (u, v)$ lineární zobrazení a zobrazení $F(v) = (v, v)$ je pozitivně definitní.

<u>*Cvičení 1.3*</u> : Vlastnosti skalárního součinu

a) $(u, \lambda v) = \overline{\lambda}(u, v)$

$$[\,(u, \lambda v) = \overline{(\lambda v, u)} = \overline{\lambda}\overline{(v, u)} = \overline{\lambda}(u, v)\,]$$

b) $(u, av + bw) = \overline{a}(u, v) + \overline{b}(u, w)$ linearita

c) $(u, u) = \overline{(u, u)} \;\Rightarrow\; (u, u) \in \mathbb{R}$!

d) $(o, o) = 0$ a $(u, o) = 0$

$$[\,(o, o) = (0 \cdot u, o) = 0 \cdot (u, o) = 0\,]$$

<u>*Příklad 1.5*</u> : Skalární součin v prostorech

a) $C(\langle 0, 1\rangle)$ $\quad (u, v) = \int\limits_0^1 u(x)\overline{v(x)}\, dx$

b) ℓ^2 $\quad (u, v) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i \overline{v_i}$

Věta 1.1 : (norma indukovaná skalárním součinem)
Nechť V je unitární vektorový prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$, potom předpisem $\|u\| = \sqrt{(u, u)}\,,\ u \in V$ je definovaná norma na prostoru V (indukovaná skalárním součinem).

<u>*Poznámka 1.1*</u> : Obráceně dané tvrzení neplatí, např. na prostoru $\mathcal{L}^3(0, 1)$ můžeme položit $(u, v) = \left(\int\limits_0^1 \left(|u|^{\frac{3}{2}} \cdot |v|^{\frac{3}{2}}\right) dx\right)^{\frac{2}{3}}$, ale neplatí vlastnost S4 skalárního součinu.

Ze Schwarzovy nerovnosti plyne

$$\frac{|(u, v)|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1,$$

tudíž má smysl definovat úhel φ dvou vektorů (tzn. například dvou funkcí) předpisem

$$\cos\varphi = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}\,.$$

Věta 1.2 : (Schwarzova nerovnost)
Nechť V je unitární vektorový prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$, potom platí **Schwarzova nerovnost**:

$$\forall\, u, v \in V :\; |(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|\,. \tag{2}$$

<u>Důkaz</u> : $\forall\, k \in \mathbb{C}\ \forall u, v \in V$ platí $0 \leq (ku - v, ku - v) = k\overline{k}(u, u) - \overline{k}(v, u) - k(u, v) + (v, v) = \|v\|^2 - \overline{k}(u, v) - k(v, u) + \|k\|^2\|u\|^2 \ (= F(u))$.

Položíme $k = \frac{(u,v)}{\|v\|^2}$ ($v \neq o$, pro $v = o$ je tvrzení triviální), pak

$$0 \leq \|u\|^2 - \frac{(v, u)(u, v)}{\|v\|^2} - \frac{(u, v)(v, u)}{\|v\|^2} + \frac{|(u, v)|^2}{\|v\|^2} =$$

$$= \|u\|^2 - \frac{|(u, v)|^2}{\|v\|^2} \Rightarrow \quad \text{Schwarzova nerovnost.}$$

<u>*Poznámka 1.2*</u>: Pro $k \in \mathbb{R}$, $(u, v) \in \mathbb{R}$ máme

$$F(k) = \|v\|^2 + 2k(u, v) + k^2\|u\|^2$$

a hledáme minimum funkce F, pak

$$F'(k) = -2(u, v) + 2k\|u\|^2 = 0 \;\Rightarrow\; k = \frac{(u, v)}{\|u\|^2}\,.$$

Pro toto k je $(ku - v, ku - v) = \|ku - v\|^2$ nejmenší a vektor $x = ku$ je ortogonální projekce v na u (z geometrického pohledu). Platí

$$(x - v, x) = (ku - v, ku) = \left|\frac{(u, v)}{\|u\|^2}\right|^2 \|u\|^2 - \overline{\frac{(u, v)}{\|u\|^2}}(v, u) = 0\,.$$

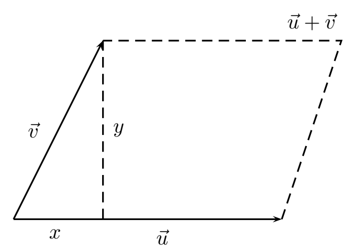
<u>*Poznámka 1.3*</u>: Rovnost rovnoběžníka geometricky

$$\|u + v\|^2 = (\|u\| + x)^2 + y^2 \qquad \|u - v\|^2 = (\|u\| - x)^2 + y^2$$

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2(x^2 + y^2)$$

$$(x^2 + y^2) = \|v\|^2$$

$$\boxed{\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)}\,.$$



Rovnost rovnoběžníka v unitárním prostoru

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = (u + v, u + v) + (u - v, u - v) =$$

$$\|u\|^2 + (v, u) + (u, v) + \|v\|^2 + \|u\|^2 - (v, u) - (u, v) + \|v\|^2$$
$$= 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)\,.$$

<u>*Příklad 1.6*</u> : Schwarzova nerovnost v $\mathcal{L}^2(0, 1)$ se nazývá Bunjakovského nerovnost

$$\int_0^1 |f(x)g(x)|\; dx \le \Big(\int_0^1 |f(x)|^2\; dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_0^1 |g(x)|^2\; dx\Big)^{\frac{1}{2}},$$

v prostoru ℓ^2 se nazývá Cauchyho nerovnost

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

a je zároveň důsledkem Hölderovy nerovnosti pro $p = q = 2$.

Příklad 1.7 : Množina $\mathcal{L}^2(\langle 0,1\rangle) = \{f : \int_0^1 |f(x)|^2\,dx < \infty\}$ je nekonečně dimenzionální vektorový prostor s normou $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Zobrazení $(f,g) = \int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$ je skalární součin na prostoru $\mathcal{L}^2(\langle 0,1\rangle)$.

Cvičení 1.4 : Dokažte, že $\mathcal{L}^1(0,1) = \{f : \int_0^1 |f|\,dx < \infty\}$ je normovaný lineární prostor s normou $\|f\| = \int_0^1 |f|\,dx$. Zobrazení $(f,g) = \int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$ však není skalárním součinem na tomto prostoru.

Cvičení 1.5 :

1. Rozhodněte, kdy ve Schwarzově nerovnosti nastává rovnost. [Pro lineárně závislé vektory]
2. Dokažte, že Schwarzova nerovnost je ekvivalentní s trojúhelníkovou nerovností. [$\|u+v\|^2 \le (\|u\|+\|v\|)^2 \Leftrightarrow (u+v,u+v) \le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \Leftrightarrow (u,u)+2(u,v)+(v,v) \le \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \Leftrightarrow 2(u,v) \le 2\|u\|\|v\|$.]

Definice 1.9 : (ortogonalita)
Nechť V je unitární prostor se skalárním součinem $(\cdot,\cdot)$. Řekneme, že vektory $u,v \in V$ jsou navzájem **ortogonální**, jestliže

$$(u,v) = 0.$$

Posloupnost $(e_n)_{n=1}^{\infty} \subset V$ se nazývá **ortogonální systém**, jestliže pro $j \neq k$ je

$$(e_j,e_k) = 0$$

a **ortonormální systém**, jestliže

$$(e_j,e_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k. \end{cases}$$

Cvičení 1.6 : Dokažte, že posloupnost funkcí $(\sin n\pi t)_{n=1}^{\infty}$ tvoří ortonormální systém v prostoru $\mathcal{L}^2(0,1)$.

Problém aproximace:

Chceme funkci $f \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ aproximovat pomocí trigonometrického polynomu

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

tak, aby střední kvadratická odchylka

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - T_n(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

byla co nejmenší, tj. hledáme minimum výrazu $\frac{1}{2\pi} \|f - T_n(x)\|_2$, což je norma v prostoru $\mathcal{L}^2(0, 2\pi)$. Spočítáme

$$0 \leq \|f - T_n(x)\|^2 = \|f - \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k\|^2 = (f - \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k, f - \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k)$$

Jelikož $\varphi_0 = 1$, $\varphi_{2k+1} = \sin kx$, $\varphi_{2k} = \cos kx$, tj. (φ_k) je ortogonální systém a f je reálná, pak předchozí vztah lze upravit do tvaru

$$\begin{aligned} &(f, f) - 2\Big(\sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k, f \Big) + \Big(\sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k, \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k \Big) = \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k (\varphi_k, f) + \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = F(c_k) \,. \end{aligned}$$

Funkce F nabývá minima, pokud $\frac{\partial F(c_k)}{\partial c_k} = 0$
$\Rightarrow \quad -(\varphi_k, f) + c_k \|\varphi_k\|^2 = 0$
$\Rightarrow \quad c_k^* = \frac{(\varphi_k, f)}{\|\varphi_k\|^2} \quad \ldots$ známé Fourierovy koeficienty.

Poznámka 1.4: Druhý diferenciál $d^2 F = \sum_{k=0}^{2n} \|\varphi_k\|^2 \, dc_k^2$ je pozitivně definitní $\Rightarrow$ v (c_k^*) je ostré minimum funkce F. Takže nejlepší aproximací funkce f je polynom tvaru

$$T_n^* = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(\varphi_k, f)}{\|\varphi_k\|^2} \cdot \varphi_k.$$

<u>*Poznámka 1.5*</u>: Dokážeme, že $(f - T_n^*, T_n) = 0$.

$$\begin{aligned}
&(f - \sum_{k=0}^{2n} \tfrac{(\varphi_k, f)}{\|\varphi_k\|^2} \cdot \varphi_k, \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k) = \\
&= (f, \sum_{k=0}^{2n} c_k \varphi_k) - (\sum_{k=0}^{2n} \tfrac{(\varphi_k, f) \cdot c_k}{\|\varphi_k\|^2} (\varphi_k, \varphi_k)) = \\
&= \sum_{k=0}^{2n} c_k (f, \varphi_k) - \sum_{k=0}^{2n} (\varphi_k, f) \cdot c_k = 0.
\end{aligned}$$

<u>*Poznámka 1.6*</u>: Protože $0 \leq F(c_k^*)$, tak

$$\begin{aligned}
&0 \leq \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} \tfrac{(\varphi_k, f)^2}{\|\varphi_k\|^2} + \sum_{k=0}^{2n} \tfrac{(\varphi_k, f)^2}{\|\varphi_k\|^4} \|\varphi_k\|^2 \\
&\Rightarrow \quad 0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{2n} \tfrac{(\varphi_k, f)^2}{\|\varphi_k\|^2} \\
&\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{2n} (\varphi_k, f)^2 \leq \|f\|^2 \quad \ldots \quad \text{Besselova nerovnost,}
\end{aligned}$$

Pokud $\|\varphi_k\| = 1$ ... pak (φ_k) tvoří ortonormální systém.
Rovnost $\sum_{k=0}^{2n} (\varphi_k, f)^2 = \|f\|^2$ ... se nazývá Parsevalova.
Pokud pro každé f nastane Parsevalova rovnost, pak (φ_k) je úplný systém.

<u>*Poznámka 1.7*</u>: Teď budeme potřebovat to nejlepší přiblížení najít, tzn. pomocí limitního přechodu. Budeme hledat odpovědi na otázky:

a) Co to je limita v prostorech funkcí?

b) Když limita $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ a $f_n \in V$, platí pak $f \in V$?

K podobným otázkám dospějeme i v případě, kdy na intervalu I hledáme řešení obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

$$y' = f(x, y) \tag{3}$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0 \qquad x_0 \in I\,. \tag{4}$$

Věta 1.3 : Funkce $y = y(x)$, $x \in I$ je řešením počáteční úlohy (3), (4) právě tehdy, když je řešením integrální rovnice

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{5}$$

Nechť $g(\xi) = f(\xi, y(\xi))$ a funkce G je primitivní funkce k funkci g, potom $G(x) - G(x_0) = \int_{x_0}^{x} g(\xi) \quad d\xi$ a platí $(G(x) - G(x_0))' = g(x) = f(x, y(x))$.

<u>Důkaz</u> : Nechť $y(x)$ je řešením Cauchyovy úlohy (3), (4). Integrujeme-li rovnost

$$y'(x) = f(x, y(x))\,, \quad x \in \langle x_0, x_1 \rangle,$$

od x_0 do x, pak dostáváme

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi\,.$$

Protože $y(x_0) = y_0$, splňuje funkce $y(x)$ integrální rovnici (5). Nechť naopak $y(x)$ je řešením integrální rovnice (5), tj. platí

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi\,, \quad x \in I\,.$$

Potom $y(x_0) = y_0$ a derivováním podle x dostáváme

$$y'(x) = f(x, y(x))\,.$$

Věta 1.4 : (Peanova, Picardova)
Předpokládáme, že funkce $f(x, y)$ je spojitá na obdélníku $D = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \times \langle y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon \rangle$. Položíme $M = \max\limits_{[x,y] \in D} f(x, y)$, $h = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{M}\}$. Potom v intervalu $\langle x_0 - h, x_0 + h \rangle$ existuje řešení $y(x)$ rovnice $y' = f(x, y)$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$.

Nechť navíc existuje konstanta $L > 0$ taková, že $\forall\, x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle\,, \forall y_1, y_2 \in \langle y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon \rangle$ platí

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L\, |y_1 - y_2|\,, \qquad \text{(lipschitzova podmínka)}$$

pak existuje právě jedno řešení úlohy (3), (4).

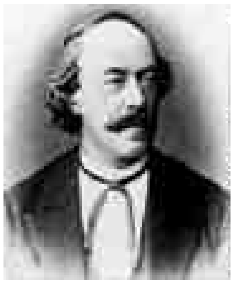
Dokázat existenci a jednoznačnost řešení úlohy je jedním z hlavních úkolů matematické analýzy.

Například rovnice

$$y' = \operatorname{sign} x$$

řešení nemá.

Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903).



se kromě diferenciálních rovnic věnoval rovněž studiu kvaternionů, diferenciální geometrii ap..

Poznámka 1.8: Důkaz věty (1.4) je založen na **Picardově iterační metodě postupných aproximací**. Definujeme **nultou aproximaci**

$$y_0(x) = y_0$$

a dosadíme ji do pravé strany v (5); dostaneme **první aproximaci**

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)\, d\xi.$$

Po dosazení $y_1(x)$ do pravé strany v (5) dostaneme **druhou aproximaci**

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi.$$

Obecně n-tý krok iteračního procesu je dán formulí (**n-tou aproximací**)

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))\, d\xi.$$

Z předpokladů věty (1.4) vyplývá, že $|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi| \leq \int_{x_0}^{x} |f(\xi, y(\xi))|\, d\xi \leq Mh$ a zároveň $|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq L\, h\, |y_n(x) - y_{n-1}(x)|$.

Dostaneme tak **posloupnost postupných aproximací**

$$y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots,$$

která za předpokladů věty 1.4 konverguje a limitní funkce $y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ je řešením dané počáteční úlohy, což dokážeme pomocí Banachovy věty o kontrakci 2.7.

Příklad 1.8: Určete přibližné řešení počáteční úlohy

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

jako n-tý člen posloupnosti postupných Picardových aproximací. K výpočtu užijeme iterační formuli

$$y_n(x) = 1 + \int_{0}^{x} y_{n-1}(\xi)\, d\xi.$$

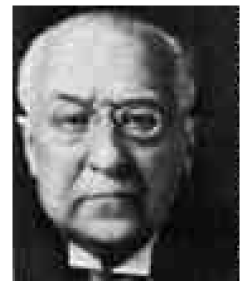
Máme tedy

$$
\begin{aligned}
y_0(x) = &\ 1, \\
y_1(x) = &\ 1 + \int_0^x 1 \, d\xi = 1 + x, \\
y_2(x) = &\ 1 + \int_0^x (1+\xi) \, d\xi = 1 + x + \tfrac{x^2}{2}, \\
&\vdots \\
y_n(x) = &\ 1 + \int_0^x \left(1 + \xi + \tfrac{\xi^2}{2} + \ldots + \tfrac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}\right) \, d\xi = \\
&\ 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots + \tfrac{x^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Z Taylorova rozvoje funkce e^x lze dokázat, že

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = y(x) = e^x.$$

Francouzský matematik Charles Emile Picard (1856-1941).



se hlavně zaměřil na studium analýzy, teorie funkcí, diferenciálních rovnic a analytické geometrie.

2 Úplné prostory

2.1 Úplný metrický prostor

Definice 2.1 : (Limita posloupnosti)
Máme (V, ϱ) metrický prostor. Řekneme, že posloupnost $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset V$ je **konvergentní** ve V, jestliže $\exists\, u \in V$ takové, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(u_n, u) = 0\,.$$

Prvek u se nazývá **limita** posloupnosti (u_n) v prostoru V.

Poznámka 2.1 :

i) Limita u je určena jednoznačně.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n$ neexistuje v prostoru spojitých funkcí $C(\langle 0,1\rangle)$, ale $\left(\int\limits_0^1 (x^n - g(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\left[\frac{x^{np+1}}{np+1}\right]_0^1\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{np+1}\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \,|n \in N, p \geq 0, np+1 \neq 0;\ g(x) = 1, x = 1;\ g(x) = 0, x \in \langle 0,1);\ x^n \to g(x)$ v $L^p(0,1)$ bodová konvergence.

iii) V prostorech uspořádaných n-tic různé předpisy pro metriku neovlivňují konvergenci posloupností:

$$\ell^1\!:\ \varrho_1(u,v) = |u_1 - v_1| + \ldots |u_n - v_n|$$
$$\ell^2\!:\ \varrho_2(u,v) = \left(|u_1 - v_1|^2 + \ldots |u_n - v_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\ell^p\!:\ \varrho_p(u,v) = \left(|u_1 - v_1|^p + \ldots |u_n - v_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1$$
$$\ell^\infty\!:\ p \to \infty \Leftrightarrow \varrho_\infty(u,v) = \max_i |u_i - v_i|.$$

dokázat jako DÚ$_{3,3}$ a vztah ϱ_1 a ϱ_∞ pro $n \to \infty$ jako DÚ$_{3,4}$
dokažte jako DÚ$_{3,5}$

Důkaz pro $n = 2$:

A) ϱ_1 a ϱ_2 :

$$|a_1| + |a_2|\ ?\ \left(|a_1|^2 + |a_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$|a_1|^2 + 2|a_1 a_2| + |a_2|^2 \leq 2\left(|a_1|^2 + |a_2|^2\right)$$

$$\Rightarrow \varrho_1(u,v) \leq \sqrt{2}\varrho_2(u,v) \text{ a } \varrho_1(u,v) \geq \varrho_2(u,v)$$

B) ϱ_1 a ϱ_2 :

$$|a_1| + |a_2| \geq \left(|a_1|^p + |a_2|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$|a_1|^p(1 + \tfrac{|a_2|}{|a_1|})^p \geq |a_1|^p(1 + \tfrac{|a_2|}{|a_1|}^p)$$
$$(|a_1| + |a_2|)^p \leq 2^{p-1}\left(|a_1|^p + |a_2|^p\right)^p\ .$$

Definice 2.2 : (Ekvivalence metrik)
O dvou metrikách ϱ, ϱ' na prostoru V řekneme, že jsou ekvivalentní, jestliže existují kladné konstanty c_1, c_2 takové, že $\forall\, u, v \in V$ platí:

$$c_1 \varrho(u,v) \le \varrho'(u,v) \le c_2 \varrho(u,v)$$

Konvergence se v ekvivalentních metrikách zachová; $\varrho(u_n, u_0) \to 0 \Leftrightarrow \varrho'(u_n, u_0) \to 0$.

Definice 2.3 : (Okolí bodu)
Nechť (V, ϱ) je metrický prostor a $u_0 \in V$, $\varepsilon > 0$. Množinu

$$K(u_0, \varepsilon) = \{u \in V : \varrho(u_0, u) < \varepsilon\}$$

nazveme ε **- okolím bodu $\mathbf{u_0}$** (nebo otevřenou koulí ve V).

Definice 2.4 : (Vnitřní bod, vnitřek množiny, otevřená množina)
Řekneme, že bod $u \in M$ podmnožiny $M \subset V$ je **vnitřní bod** množiny M, jestliže $\exists\, K(u, \varepsilon)$ tak, že $K(u, \varepsilon) \subset M$.
Množina všech vnitřních bodů množiny M tvoří **vnitřek množiny** M, značíme $\operatorname{int} M$.
Řekneme, že množina M je **otevřená**, jestliže $M = \operatorname{int} M$.

Otevřená množina obsahuje s každým svým bodem i nějaké jeho okolí.

Definice 2.5 : (Omezená množina)
Řekneme, že množina $M \subset V$ je **omezená** ve (V, ϱ), jestliže $\exists\, u_0 \in V\, \exists\, \varepsilon > 0$ takové, že $M \subset K(u_0, \varepsilon)$.

Definice 2.6 : (Uzavřená množina, uzávěr, hranice)
Množina $M \subset V$ je **uzavřená**, je-li množina $V \setminus M$ otevřená.
Množina $\overline{M} = \bigcap\{F : M \subset F \subset V, F \text{ uzavřená množina}\}$ se nazývá **uzávěr množiny** M.
Množina $\partial M = \overline{M} \cap \overline{V \setminus M}$ se nazývá **hranice množiny** M.

Prázdná množina $\emptyset$ je uzavřená i otevřená $\Rightarrow$ prostor V je otevřený i uzavřený (v sobě).

Věta 2.1 : (Uzavřenost a uzávěr)
Množina M je uzavřená právě tehdy, když $M = \overline{M}$.

Uzavřená množina se rovná svému uzávěru. Rozmyslete si, že $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Pro $M = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ je $\overline{M} = M \cup \{0\}$.

<u>Důkaz</u> : "$\Rightarrow$" : Množina M je uzavřená a chceme dokázat, že $M = \overline{M}$. Z definice vyplývá, že $M \subset \overline{M}$ ($\overline{M} = \bigcap\{F : M \subset F, F \text{ uzavřená }\}$). Zbývá tedy dokázat, že $\overline{M} \subset M$, což je ekvivalentní s $V \setminus M \subset V \setminus \overline{M}$. Nechť $u \in V \setminus M$. Protože M je uzavřená, je $V \setminus M$ otevřená $\Rightarrow$ existuje okolí $K(u, \varepsilon) \subset V \setminus M$. Položíme $F_1 = V \setminus K(u, \varepsilon)$, pak F_1 je uzavřená a $M \subset F_1$. Z de Morganových pravidel plyne $V \setminus \overline{M} = V \setminus \bigcap F = \bigcup (V \setminus F) \supset V \setminus F_1 = K(u, \varepsilon)$. Odtud

plyne $u \in V \setminus \overline{M}$, tedy $V \setminus M \subset V \setminus \overline{M}$ a $\overline{M} \subset M$.

"$\Leftarrow$" Nyní máme dokázat, že $\overline{M} = \bigcap\{F : M \subset F, F$ uzavřená$\}$ je uzavřená množina. Neboli doplněk $V \setminus \overline{M} = V \setminus \bigcap F = \bigcup(V \setminus F)$ je otevřená množina.

Nechť $u \in \bigcup(V \setminus F)$, pak existuje množina F_2 taková, že $u \in V \setminus F_2$. Protože množina $V \setminus F_2$ je otevřená obsahuje i okolí $K(u, \varepsilon)$, tudíž $K(u, \varepsilon) \subset V \setminus F_2 \subset \bigcup(V \setminus F)$. Tedy $\bigcup(V \setminus F)$ je otevřená množina, což jsme měli dokázat.

Poznámka 2.2:

K zavedení pojmu topologie není zapotřebí metrika.

1) Vezmeme-li množinu V a systém jejich podmnožin τ takových, že $\emptyset \in \tau, V \in \tau$ a libovolné sjednocení množin ze systému τ a konečný průnik množin ze systému τ patří opět do τ, pak se τ nazývá topologie na V.

Každá konvergentní posloupnost má limitu v M.

Věta 2.2 : (Konvergence a uzavřenost)
Nechť (V, ϱ) je metrický prostor. Podmnožina $M \subset V$ je uzavřená právě tehdy, když

$$\text{z předpokladů} \quad \begin{bmatrix} (u_n) \subset M \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = u \\ u \in V \end{bmatrix} \quad \text{plyne} \quad u \in M.$$

Důkaz :

"$\Rightarrow$" M uzavřená $\Leftrightarrow V \setminus M$ otevřená (pokud $V = M$, pak $u \in V$, což jsme chtěli. Nechť tedy $V \neq M$) $\wedge$ pro spor $u \notin M$, neboli $u \in V \setminus M \Rightarrow \exists K(u, \varepsilon) \subset V \setminus M \wedge u_n \to u \Rightarrow \exists\, n_0, \forall\, n > n_0$ je $\varrho(u_n, u) < \varepsilon \Rightarrow u_n \in K(u, \varepsilon) \Rightarrow u_n \in V \setminus M$ spor s předpokladem $u_n \in M$!

"$\Leftarrow$" Platí $(u_n) \subset M, u_n \to u \Rightarrow u \in M \wedge$ a pro spor nechť M není uzavřená $\Rightarrow V \setminus M$ není otevřená $\Rightarrow \exists\, u_0 \in V \setminus M$ tak, že $\forall\, K(u_0, \frac{1}{n})\, \exists\, u_n \in M \cap K(u_0, \frac{1}{n}) \Rightarrow \varrho(u_0, u_n) < \frac{1}{n} \Rightarrow u_n \to u_0, u_n \in M \Rightarrow u_0 \in M,$ což je spor s $u_0 \in V \setminus M$.

Definice 2.7 : (Cauchyovská posloupnost)
Posloupnost (u_n) prvků metrického prostoru (V, ϱ) se nazývá **cauchyovská** (fundamentální), jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall\, m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_0 \Rightarrow \varrho(u_n, u_m) < \varepsilon\,.$$

Věta 2.3 : (Vztah konvergentní a cauchyovské posloupnosti)

a) Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

b) Pokud cauchyovská posloupnost obsahuje konvergentní podposloupnost, pak je konvergentní.

Zároveň platí, že každá konvergentní posloupnost je omezená i každá cauchyovská posloupnost je omezená.

Důkaz :

Konvergentní $\Rightarrow \exists\, u : \forall\, \varepsilon\, \exists\, n_0\ \forall n : n > n_0 \Rightarrow \varrho(u, u_n) < \varepsilon \Rightarrow \forall\, m, n : m, n > n_0 : \varrho(u_m, u_n) \leq \varrho(u_m, u) + \varrho(u_n, u) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Poznámka 2.3 :

a) Posloupnost funkcí (x^n) konverguje v prostoru $\mathcal{L}^p$, ale nekonverguje v prostoru $C(\langle 0, 1\rangle)$.

b) Posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^n$ je cauchyovská, ale nekonverguje v $\mathbb{Q}$, konverguje však v $\mathbb{R}$.

Definice 2.8 : (Úplný prostor)
Prostor (V, ϱ) nazveme **úplným**, jestliže každá cauchyovská posloupnost z V je konvergentní ve V.

Metrický prostor s diskrétní metrikou je vždy úplný.

Příklad 2.1 :

$(\mathbb{R}, \varrho)$ je úplný prostor s metrikou $\varrho = |x - y|$ .Z omezené posloupnosti v $\mathbb{R}$ lze vždy vybrat konvergentní podposloupnost!

Věta 2.4 :
Nechť (V, ϱ) je úplný metrický prostor a $M \subset V$, potom prostor (M, ϱ) je úplný prostor právě tehdy, když M je uzavřená množina.

Tato věta platí i pro obecné prostory, bez lineární struktury.
K úplnosti potřebujeme metriku, k uzavřenosti stačí topologie.

Důkaz :

"$\Rightarrow$" Zvolíme libovolnou cauchyovskou posloupnost $(u_n) \subset M$. Díky úplnosti prostoru V má tato posloupnost limitu $u \in V$. Množina M je však uzavřená, proto $u \in M$ a prostor (M, ϱ) je tedy úplný.

"$\Leftarrow$" Dokažte že každá cauchyovská posloupnost z M konverguje v M.

topologicky: Prostor V je kompaktní, jestliže z každého pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.

Definice 2.9 : (Kompaktní prostor)
Metrický prostor (V, ϱ) nazveme **kompaktní**, jestliže z každé posloupnosti $(u_n) \subset V$ lze vybrat posloupnost, která konverguje ve V.

Příklad 2.2 :

$(\langle 0, 1\rangle, \varrho)$, $\varrho(x, y) = |x-y|$ je kompaktní prostor (při důkazu lze použít metodu půlení intervalu);

$(\mathbb{R}, \varrho) \ldots$ není kompaktní, protože posloupnost (n) není omezená; interval $(0, 1)$ také není není kompakt, protože posloupnost $(\frac{1}{n})$ nekonverguje v tomto intervalu;

$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ je kompaktní zúplnění prostoru $\mathbb{R}$.

Pro $M \subset R^n$ platí: M je omezená a uzavřená $\Leftrightarrow$ kompaktní. V prostoru ℓ^p to však nestačí. Označíme $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, kde 1 je na i-tém místě, pak množina $M = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} e_i$ je omezená a uzavřená, ale není kompaktní. Dokažte, že $\overline{K_\varepsilon(0)}$ je uzavřená množina.

Věta 2.5 :
Každý kompaktní prostor (V, ϱ) je úplný ($\Rightarrow$ uzavřený) a omezený.

Důkaz :

Nechť $(u_n) \subset V$ je cauchyovská posloupnost, pak existují $(u_{n_k}) \subset (u_n) \wedge u_0 \in V$ takové, že $u_{n_k} \to u_0$. Tedy $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \forall n > n_0 : |u_n - u_0| \leq |u_n - u_{n_k} + u_{n_k} - u_0| < \varepsilon + \varepsilon$. Posloupnost (u_n) je tedy konvergentní k u_0 a prostor V je úplný.

Poznámka 2.4 :
Obrácené tvrzení k větě 2.5 neplatí.
$V = C(\langle 0, 1\rangle)$ prostor všech spojitých funkcí a $\varrho(u, v) = \max\limits_{t \in \langle 0,1\rangle} |u(x) - v(x)|$ (tzv. maximová norma), jedná se o stejnoměrnou konvergenci. DÚ$_{5,3}$: Důkaz úplnosti prostoru V. Podle věty z MA2, pokud $u_n \to u$ stejnoměrně a $u_n(x) \subset C(\langle 0, 1\rangle)$, pak $u(x) \in C(\langle 0, 1\rangle) \Rightarrow C(\langle 0, 1\rangle)$ je úplný prostor. Ale posloupnost $u_n(x) = n$ nekonverguje $\Rightarrow C(\langle 0, 1\rangle)$ není kompaktní!

Pokud je V úplný prostor, pak nám stačí pracovat na jeho husté podmnožině. "Limitně se dostaneme na celý prostor".

Definice 2.10 : (Hustá podmnožina)
Máme metrický prostor (V, ϱ) a množinu $M \subset V$. Řekneme, že množina M je **hustá** ve V, jestliže $\overline{M} = V$.

Příklad 2.3 :

Množina $Q \setminus \{0\}$ je hustá v $\mathbb{R}$.

Definice 2.11 : (Separabilní prostor)
Řekneme, že prostor (V, ϱ) je **separabilní**, jestliže v něm existuje hustá a spočetná podmnožina M.

Množina M je spočetná, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny M na množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$.

Příklad 2.4 :

Prostor ℓ^∞ není separabilní, protože posloupnosti generované z čísel $0, 1$ (tedy $u = (1, 0, 0, 1, \cdots)$) tvoří nespočetnou množinu a pro $u \neq v$ je $\|u - v\|_\infty = \sup_n |u_n - v_n| = 1$.

Prostory ℓ^p, $1 \leq p < \infty$ jsou separabilní.

Každý kompaktní prostor je separabilní.

V praktických aplikacích děláme vše přes posloupnosti a ty jsou spočetné, proto jsou tak důležité separabilní prostory.

Každý kompaktní prostor V je totálně omezený (tzn. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť K ve V, tedy ke každému bodu $u \in V$ existuje bod sítě K, který je ve vzdálenosti menší než ε od u).

Každý totálně omezený prostor je separabilní.

Definice 2.12 : (Zúplnění)
Máme metrický prostor (V, ϱ).

1) Nechť $V \subset V^*$ a (V^*, ϱ^*) je úplný metrický prostor.
2) Takový, že $\varrho(u, v) = \varrho^*(u, v), \forall u, v \in V$.
3) a $\overline{V} = V^*$

Potom (V^*, ϱ^*) nazýváme **zúplněním** prostoru (V, ϱ) (nebo úplný obal).

Příklad 2.5 :

$(\mathbb{R}, \varrho^*)$, $(\mathbb{Q}, \varrho)$ pro $\varrho(x, y) = |x - y| = \varrho^*(x, y)$

Definice 2.13 : (Izometrie)
Nechť f zobrazuje (V, ϱ) na $(\widetilde{V}, \widetilde{\varrho})$ (tj. $f(V) = \widetilde{V}$). Řekneme, že f je **izometrické zobrazení** (izometrie), jestliže $\forall\, u, v \in V$ platí: $\varrho(u, v) = \widetilde{\varrho}(f(u), f(v))$.

Poznámka 2.5:
Každý separabilní Banachův prostor (úplný normovaný prostor) je izometricky izomorfní s $C(\langle 0, 1\rangle)$.

Příklad 2.6 :

$f(x) = 2x$, $f : \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 2\rangle$. Najděte metriky ϱ, $\widetilde{\varrho}$ tak, aby oba prostor byly izometrické.

Jak ukazuje následující věta, každý metrický prostor se dá "vnořit" do prostoru, který už je úplný.

Věta 2.6 : (Existence úplného obalu)
Každý metrický prostor (V, ϱ) má úplný obal $(\widetilde{V}, \widetilde{\varrho})$ a každé dva úplné obaly prostoru (V, ϱ) jsou izometrické.

Důkaz : K danému metrickému prostoru (V, ϱ) zkonstruujeme jeho úplný obal.

1. Řekneme, že dvě cauchyovské posloupnosti (u_n) a (v_n) jsou ekvivalentní, jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(u_n, v_n) = 0$ a značíme $(u_n) \sim (v_n)$. Třída ekvivalence je tvořena cauchyovskými, ekvivalentními posloupnostmi a značí se u^*.
2. Prostor všech tříd ekvivalence označíme V^* a zavedeme na něm metriku
$$\varrho^*(u^*, v^*) = \lim_{n\to\infty} \varrho(u_n, v_n)\,,$$
kde $(u_n) \in u^*$ a $(v_n) \in v^*$ jsou libovolné cauchyovské posloupnosti. (Ukažte, že ϱ^* nezávisí na výběru posloupností (u_n) a (v_n) a že ϱ^* je metrika.)
3. Označíme V_0 množinu všech stacionárních posloupností. Potom $\overline{V_0} = V^*$.
4. V^* je úplný prostor a je určen jednoznačně až na izometrii.

Relace je podmnožina kartézského součinu $V \times V$.
Relace se nazývá ekvivalentní, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
Např. posloupnosti $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}$ patří do stejné třídy ekvivalence.

Příklad 2.7 :

Zúplnění závisí na metrice. Prostor racionálních čísel $\mathbb{Q}$ s diskrétní metrikou je úplný, ale $(\mathbb{Q}, |x-y|)$ není úplný.

$C(\langle 0,1\rangle)$ s maximovou metrikou $\varrho(u,v) = \max\limits_{x\in\langle 0,1\rangle} |u(x) - v(x)|$ je úplný, ale s L^p metrikou není úplný!

Věta 2.7 : (Banachova věta o kontrakcích)
Nechť (V, ϱ) je úplný metrický prostor a $F : V \to V$ je **kontraktivní zobrazení** (kontrakce). Tzn. $\exists\, \alpha \in (0,1)$ tak, že
$$\forall\, u, v \in V : \varrho(F(u), F(v)) \le \alpha \varrho(u,v).$$
Potom existuje právě jeden bod $u \in V$ tak, že $F(u) = u$, tzv. **pevný bod** zobrazení F.

Rozmyslete si, že každé kontraktivní zobrazení je spojité.
Kontraktivní zobrazení zobrazuje kouli do koule o menším poloměru.

Důkaz :

Nechť $u_0 \in V$ a definujeme $u_n = F(u_{n-1})$, $n \in N$. Potom $\varrho(u_2, u_1) = \varrho(F(u_1), F(u_0)) \le \alpha\varrho(u_1, u_0)$, $\varrho(u_3, u_2) \le \alpha\varrho(u_2, u_1) \le \alpha^2\varrho(u_1, u_0)$ a obecně $\varrho(u_{n+1}, u_n) \le \alpha^n\varrho(u_1, u_0)$. Tedy $\varrho(u_{n+k}, u_n) \le \varrho(u_{n+k}, u_{n+k-1}) + \ldots + \varrho(u_{n+1}, u_n) \le (\alpha^{n+k-1} + \ldots + \alpha^n)\varrho(u_1, u_0) = (\alpha^{k-1} + \ldots + 1)\alpha^n\varrho(u_1, u_0) = \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\alpha^n\varrho(u_1, u_0) \to 0 \Rightarrow \varrho(u_m, u_n) \to 0$ a (u_n) je cauchyovská posloupnost $\Rightarrow \exists!\, u \in V$ (V je úplný): $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

Ještě dokážeme jednoznačnost pevného bodu. Nechť existují $u \ne v$ takové, že $F(u) = u$ a $F(v) = v$, potom $\varrho(u, v) = \varrho(F(u), F(v)) \le \alpha\varrho(u, v)$. Odtud plyne $\varrho(u, v) = 0$, tudíž $u = v$.

Příklad 2.8 :

Funkce $f(x)$, s $|f'| < 1$, nebo matice A s $\|A\| < 1$, pokud $u = A \cdot v$, ap. představují kontraktivní zobrazení.

Příklad 2.9 :

Uvažujeme Cauchyovu úlohu

$$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0 .$$

Řešení hledáme v prostoru $C(\langle x_0, b\rangle)$.

Tato úloha je ekvivalentní s integrální úlohou

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, \quad x \in (x_0, b\rangle \ .$$

Označíme $F(y(x)) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi$, potom F zobrazuje $C(\langle x_0, b\rangle)$ do $C(\langle x_0, b\rangle)$. Uvažujeme metriku $\varrho(y(x), z(x)) = \max\limits_{x\in\langle x_0,b\rangle} |y(x) - z(x)|$ (prostor $C(\langle 0, 1\rangle)$ je pak úplný). Platí $\varrho(F(y(x)), F(z(x))) = \max\limits_{x\in\langle x_0,b\rangle} |F(y(x)) - F(z(x))| = \max\limits_{x\in\langle x_0,b\rangle} \left|\int_{x_0}^{x} [f(t, y(t)) - f(t, z(t))]\, dt\right| \le \int_{x_0}^{b} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\, dt \le K \int_{x_0}^{b} |y(t) - z(t)|\, dt \le K|b - x_0|\varrho(y, z)$ (f lipschitzovská: $|f(t, y) - f(t, z)| \le K|y - z|, \forall\, t \in \langle x_0, b\rangle, \forall\, y, z \in \mathbb{R}) \Rightarrow F$ je kontrakce pro $K|b - x_0| < 1$, což pro $b \to x_0$ lze docílit vždy.

Vyřešit danou úlohu znamená najít pevný bod zobrazení F .

2.2 Banachovy prostory

Významný polský matematik Stefan Banach (1892-1945).

se řadí k zakladatelům moderní funkcionální analýzy. Mnoho svých prací věnoval studiu topologických prostorů a teorii míry.

Definice 2.14 : (Banachův prostor)
Normovaný lineární prostor $(V, \|\cdot\|)$, který je úplný vzhledem k metrice $\varrho(u,v) = \|u-v\|$ se nazývá **Banachův** (úplný NLP).

Příklad 2.10 :

Prostor $(R^n, \|\cdot\|), \|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ je Banachův.

Definice 2.15 : (Kartézský součin prostorů)
Máme $(V_i, \|\cdot\|_i)$, $i = 1, \ldots, n$, n normovaných lineárních prostorů. Označíme $V = V_1 \times V_2 \times \ldots V_n$ a pro $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ zavedeme na prostoru V operace $u+v = (u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)$ a $\lambda u = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n)$.
Dále pro $u \in V$ definujeme normu vztahem $\|u\| = \sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_i$, pak prostor $(V, \|\cdot\|)$ je opět NLP (ověřte) a nazývá se **kartézský součin normovaných lineárních prostorů**.

Poznámka 2.6: Kartézský součin Banachových prostorů je opět Banachův prostor.

2.2.1 Prostory spojitých funkcí

Funkce f je spojitá v bodě u_0, jestliže pro každou posloupnost $u_n \subset D(f)$, $u_n \to u_0$ platí $f(u_n) \to f(u_0)$

Definice 2.16 : (Prostor spojitých funkcí)
Nechť $\Omega \subset R^n$, symbolem $C(\Omega)$ označíme množinu všech spojitých funkcí na Ω. Nechť $\Omega \subset R^n$ je omezená množina, symbolem $C(\overline{\Omega})$ označíme **prostor spojitých funkcí** na $\overline{\Omega}$.

Cvičení 2.1 : Dokažte, že $C(\Omega), C(\overline{\Omega})$ jsou lineární prostory a předpisem $\|u\|_C = \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$ je definována norma na prostoru $C(\overline{\Omega})$. (Proč tuto normu nevolíme na $C(\Omega)$?)

Věta 2.8 : Prostor $(C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_C)$ je Banachův prostor.

Důkaz :

Nechť $(u_n) \subset C(\overline{\Omega})$ je cauchyovská posloupnost (tedy $\max_{x\in\overline{\Omega}} |u_m(x) - u_n(x)| < \varepsilon$). Tudíž pro pevné $x \in \overline{\Omega}$ je posloupnost $(u_n(x)) \subset \mathbb{R}$ také cauchyovská a $\mathbb{R}$ je úplný prostor $\Rightarrow \forall x \in \overline{\Omega}\ \exists\, u(x)$ a $u_n(x) \to u(x)$, (tzv. bodová konvergence, bodová limita u_n je u .) Funkce u je definována na $\overline{\Omega}$. Pro každé $x \in \overline{\Omega}$ platí $u_m(x) - \varepsilon < u_n(x) < u_m(x) + \varepsilon$, tedy $u_m(x) - \varepsilon \le u(x) \le u_m(x) + \varepsilon$ a $u_n(x) \rightrightarrows u(x)$.

Posloupnost u_n konverguje stejnoměrně k funkci u, jestliže $\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |u_n(x) - u(x)| \to 0$, píšeme $u_n(x) \rightrightarrows u(x)$.

Potřebujeme dokázat, že $u \in C(\overline{\Omega})$. Pro důkaz sporem předpokládáme, že $u \notin C(\overline{\Omega})$ tzn. $\exists\, x_0 \in \overline{\Omega}$, $x_k \to x_0$ a $u(x_k) \not\to u(x_0) \Rightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0\, \forall\, k_0\, \exists\, k > k_0 : |u(x_k) - u(x_0)| > \varepsilon_0$, zároveň $u_n(x) \rightrightarrows u(x) \Rightarrow \sup\limits_{x\in\overline{\Omega}} |u_n(x) - u(x)| \to 0 \Rightarrow \forall\, x \in \overline{\Omega} : |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$. Platí $|u_n(x_k) - u_n(x_0)| = |-(-u_n(x_k) + u(x_k)) + u(x_k) - u(x_0) + u(x_0) - u_n(x_0)| \ge |u(x_k) - u(x_0)| - |(u(x_k) - u_n(x_k)) + u_n(x_0) - u(x_0)| \ge \varepsilon_0 - 2\varepsilon$. Zvolíme-li např. $\varepsilon = \varepsilon_0/4$ pak dostaneme spor se spojitostí funkce u_n .

Používáme nerovnost $|x - y| \ge |x| - |y|$.

Podmnožina M metrického prostoru (V, ρ) se nazývá souvislá, pokud ve V neexistují takové neprázdné otevřené množiny A, B, že
1) $M = A \cup B$,
2) $A \cap B = \emptyset$.

Množina Ω je spojitě souvislá, jestliže každé dva body lze spojit grafem spojité funkce $f : \langle 0,1\rangle \mapsto \Omega$.

Uzávěr grafu funkce $\sin\frac{1}{x}$ na intervalu $\langle 0,1\rangle$ je souvislá množina, ale není to spojitě souvislá množina.

Definice 2.17 : (Oblast, multiindex, parciální derivace)
Podmnožina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **oblast**, jestliže je otevřená a souvislá. Vektor $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, jehož hodnoty α_i jsou nezáporná celá čísla, se nazývá **multiindex**. Číslo $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ se nazývá **délka multiindexu**.

Pro funkci $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ definovanou na oblasti Ω označíme

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \partial x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}$$

a hovoříme o parciální derivaci funkce u podle multiindexu α.

<u>Cvičení 2.2</u> :

Pro $|\alpha| = 2$ může být $D^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, D^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, D^\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Definice 2.18 : (Prostory spojitě diferencovatelných funkcí)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblast a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Označíme

$$C^k(\Omega) = \{u : D(u) = \Omega, D^\alpha u \in C(\Omega), |\alpha| \le k\}\,,$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)\,.$$

Je-li navíc Ω omezená, pak označíme

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{\, u:\ D(u) = \overline{\Omega}, \forall\alpha\, |\alpha| \le k\, \exists\, v_\alpha \in C(\overline{\Omega})$$

$$D^\alpha u(x) = v_\alpha(x)\ \forall\, x \in \Omega \,\}\,,$$

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega})$$

a hovoříme o spojitě diferencovatelných funkcích až do řádu k, popřípadě o nekonečněkrát diferencovatelných funkcích.

Funkce u z prostoru $C^k(\Omega)$ má spojité derivace až do řádu k. $D(u)$ Jestliže funkce u má spojité parciální derivace na mn. Ω, pak to například znamená, že platí $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ (záměnnost parciálních derivací) a existenci druhého diferenciálu d^2u funkce u.

<u>*Poznámka 2.7*</u>:

i) Pro $k = 0$ je $C^0(\overline{\Omega}) = C(\overline{\Omega})$.

ii) Obecně derivaci nelze definovat na hranici $\partial\Omega$, lze ji definovat pouze v $\operatorname{int}\Omega = \Omega^0$. Proto předpokládáme existenci spojité funkce $v_\alpha \in C(\overline{\Omega})$ takové, že $v_\alpha(x) = D^\alpha u(x)$ na Ω. Dostáváme tzv. spojité prodloužení derivací funkce u do hranice.

iii) Ke každé spojité funkci nemusí existovat spojité prodloužení:
např. funkce $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ je na $\langle 0, 1\rangle$ spojitá. Dokažte, že $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ nelze spojitě dodefinovat.

Věta 2.9 :
Množina $C^k(\overline{\Omega})$ s normou

$$\|u\|_{C^k} = \sum_{|\alpha| \le k} \max_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)|$$

je Banachův prostor.

Neboli $\|u\|_{C^k} = \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|$.

<u>Důkaz</u> :

Víme, že $D^\alpha u(x) = v_\alpha(x) \in C(\overline{\Omega}), \forall\, \alpha,\ |\alpha| \le k$. Prostor $C^k(\overline{\Omega})$ "lze tedy chápat" jako kartézský součin Banachových prostorů $C(\overline{\Omega}) \times \ldots \times C(\overline{\Omega})$, tedy opět Banachův prostor, viz poznámka 2.6.

Jinou možností je chápat funkci u jako vektor společně s jejími derivacemi, tedy $\mathbf{u} = (u, D^{(1,0,\ldots)}u, \ldots, D^\alpha u)$, $|\alpha| \le k$ a dokázat úplnost v každé složce.

Příklad 2.11 :

Laplaceův operátor $\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, potom úloha $-\triangle u = f$ na $\Omega, u = g$ na $\partial\Omega$ popisuje rozdělení teploty v tělese Ω nebo průhyb membrány $(n = 2)$. Řešení dané Dirichletovy úlohy hledáme v $C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, tzv. klasické řešení.

Jestliže $f \in C(\overline{\Omega})$ a $\Omega \subset \mathbb{R}$, pak řešení u je z prostoru $C^2(\Omega)$. Ve vyšší dimenzi toto tvrzení neplatí.
Tam platí, jestliže $f \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$, pak řešení $u \in C^{2,\lambda}(\overline{\Omega})$.

Definice 2.19 : (Prostor funkcí s kompaktním nosičem)
Máme oblast $\Omega \subset R^n$ a funkci $u : \Omega \to R$. Množina

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$$

se nazývá **nosič funkce** u. Označíme

$$C_0^k(\Omega) = \{\, u \in C^k(\Omega) : \ \operatorname{supp} u \ \text{je omezená množina}, \ \operatorname{supp} u \subset \Omega \,\}$$

a

$$C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_0^k(\Omega) \,.$$

Uzávěr je vzhledem k eukleidovské metrice, supp je z anglického support.

Hovoříme o prostoru funkcí s kompaktním nosičem.

Poznámka 2.8:
Index "0" znamená, že funkce jsou "nulové na okolí $\partial\Omega$", tzn. $\forall\, x_0 \in \partial\Omega\, \exists\, U(x_0) \wedge \forall x \in U(x_0) : u(x) = 0$.

Definice 2.20 : (Hölderovsky spojité funkce)
Nechť $0 < \lambda \leq 1$, Ω omezená oblast a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jestliže $\exists\, c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall\, x, y \in \Omega \quad |u(x) - u(y)| \leq c\, |x - y|^\lambda \,,$$

pak říkáme, že funkce u splňuje **hölderovu podmínku**; pro $\lambda = 1$ hovoříme o lipschitzově podmínce.
Označíme

$$C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : \ \forall\, \alpha, \ |\alpha| = k, \ \sup_{x,y \in \overline{\Omega}, x \neq y} \tfrac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda} < \infty\} \,.$$

Funkce, která je hölderovsky spojitá je zřejmě i spojitá.

Cvičení 2.3 :

i) Označme $H_\lambda(D^\alpha u) = \sup\limits_{x,y\in\overline{\Omega},x\neq y} \frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}$, potom $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ je Banachův prostor s normou danou předpisem $\|u\|_{C^{k,\lambda}} = \|u\|_{C^k} + \sum\limits_{|\alpha|=k} H_\lambda(D^\alpha u)$.

(Návod: $\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\lambda} = \frac{|u(x)-u_n(x)+u_n(x)-u_n(y)+u_n(y)-u(y)|}{|x-y|^\lambda}$)

ii) $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^{k,\mu}(\overline{\Omega}), 0 < \mu \leq \lambda \leq 1$ $(C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^k(\overline{\Omega}),$ $0 \leq \lambda \leq 1 \leq k, k \in \mathbb{N})$

iii) Proč neuvažujeme $\lambda > 1$ nebo $\lambda = 0$ $(C^{k,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C^{k+1}(\overline{\Omega}))$

Příklad 2.12 :

1) $f(x) = \sqrt{x}$ na (1,2), potom $\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{|x-y|} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{1}{2} = H_1(f)$.

2) $f' \in C(\overline{\Omega}) \Rightarrow f \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$? Na $\langle 0, 1\rangle$ tato funkce není Hölderovsky spojitá!

Věta 2.10 : (Arzela-Ascoli)
Nechť Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^n$ a množina $M \subset (C^k(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^k})$ je uzavřená. Množina M je kompaktní právě tehdy, když

1. $\exists K \forall u \in M : \|u\|_{C^k} < K$,
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \overline{\Omega}, |\alpha| \leq k \forall u :$
   $|x-y| < \delta \Rightarrow |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| < \varepsilon$, .

funkce $u \in M$ jsou stejně omezené

funkce $u \in M$ jsou stejně spojité

Důkaz :

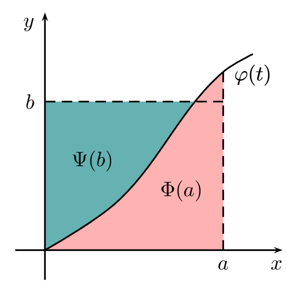
2.2.2 Lebesgueovy prostory funkcí

Pokud pravá strana diferenciální rovnice není spojitá, pak stačí její integrovatelnost. Příklad: $y' = \operatorname{sign} x \Rightarrow y = x + c$, $x > 0$, $y = -x + c$, $x < 0$ a řešení najdeme až na malou množinu (zde $x = 0$) pomocí $y(x) = \int\limits_a^x \operatorname{sign} t \, dt$. Budeme nyní zkoumat prostory integrovatelných funkcí.

Definice 2.21 : (Prostor $\mathcal{L}^p$)
Nechť $p > 0$ a Ω je oblast v R^n. Symbolem $\mathcal{L}^p(\Omega)$ označíme množinu všech měřitelných funkcí u definovaných na Ω, pro které $\int\limits_\Omega |u(x)|^p\,dx < \infty$.
Dále definujeme
$L^\infty(\Omega) = \{u : \exists\, a \in \mathbb{R} : \mathrm{meas}(\{x \in \Omega; |u(x)| \geq a\}) = 0\}$.

Prostory funkcí pojmenované po polském matematikovi jménem Wladyslaw Orlicz (1903-1990).

mají bohatou topologii a překvapivou geometrickou strukturu s vlastnostmi, které nemají L^p prostory.



Poznámka 2.9:
Zobecnění $\mathcal{L}^p$ prostoru. Uvažujeme **Orliczovy** prostory

$$L^\Phi(\Omega) = \{u : \int\limits_\Omega \Phi(|u(x)|)dx < \infty\},$$

kde Φ je **Yongova funkce** $\Phi(t) = \int\limits_0^t \varphi(s)\,ds$ a φ je rostoucí, spojitá funkce na intervalu $\langle 0,\infty)$ taková, že $\varphi(0) = 0$ (pro $\varphi(t) = t^{p-1}$ je $L^\Phi = \mathcal{L}^p$).
Definujeme $\Psi(t) = \int\limits_0^t \varphi^{-1}(s)\ ds$, potom $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+$ platí **Yongova nerovnost**

$$a \cdot b \leq \Phi(a) + \Psi(b),$$

rovnost nastane pro $b = \Phi(a)$.
Pro $\varphi(t) = t^{p-1}$ dostaneme $a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Podobně jako v lemmatu 2.1 dostaneme nyní volbou
$a = \frac{|u(x)|}{(\int |u(x)|\,dx)^{\frac{1}{p}}}$ a $b = \frac{|v(x)|}{(\int |v(x)|\,dx)^{\frac{1}{p}}}$ následující nerovnosti:

I) Nechť $p > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(p = 1 \Leftrightarrow q = \infty,\ p = \infty \Leftrightarrow q = 1)$, potom pro $u \in \mathcal{L}^p(\Omega), v \in \mathcal{L}^q(\Omega)$ platí Hölderova nerovnost

$$\int\limits_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_\Omega |v(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

tj. $u \cdot v \in L^1(\Omega)$.
II) Dále pro $u, v \in \mathcal{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$ platí Minkowského nerovnost

$$\left(\int\limits_\Omega |u(x) + v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_\Omega |v(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Poznámka 2.10:

1) Minkowského nerovnost implikuje, že prostor $\mathcal{L}^p(\Omega)$ je uzavřený na sčítaní.

2) Hodnota $\left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ není normou, protože je nulová i pro nenulovou funkci.

Definice 2.22 : (Faktor prostor, prostor $L^p(\Omega)$)
Označíme $\mathcal{N}_0(\Omega) = \{u : u(x) = 0 \text{ skoro všude}\}$. Na prostoru $\mathcal{L}^p(\Omega)$ zavedeme ekvivalenci $u \sim v \Leftrightarrow u - v \in \mathcal{N}_0(\Omega)$. Pro funkci $u \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ definujeme třídu ekvivalence předpisem $u^* = \{v \in \mathcal{L}^p(\Omega) : v \sim u\}$. Množina všech tříd ekvivalence s operacemi $u^* + v^* = (u+v)^*$ a $\lambda u^* = (\lambda u)^*$ se nazývá **faktorový prostor** a značí se $\mathcal{L}^p(\Omega)|\mathcal{N}_0(\Omega) = L^p(\Omega)$.

$\mathcal{N}_0(\Omega)$ je lineární prostor a pro $u \in \mathcal{N}_0(\Omega)$ je $\int\limits_\Omega |u(x)|^p \, dx = 0$.

Relace $u \sim v$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Poznámka 2.11:

1) V dalším textu ztotožníme třídu $u^* \in L^p(\Omega)$ s jejím libovolným reprezentantem a píšeme $u \in L^p(\Omega)$.

2) Pro omezenou oblast Ω platí $C(\overline{\Omega}) \subset L^p(\Omega)$.

3) Číslo $\|u\|_p = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ je normou na prostoru $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, číslo $\|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)|$ je normou na prostoru $L^\infty(\Omega)$, kde ess sup čteme esenciální (podstatné) supremum a
$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf\{a>0 : \operatorname{meas}(\{x\in\Omega : |u(x)| \geq a\}) = 0\},$$
nebo
$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf_{N, \operatorname{meas} N = 0} \sup_{x\in\Omega\setminus N} |u(x)|.$$

Platí $C(\Omega) \subset L^p(\Omega)$?

Lemma 2.1 : (Fatuovo lemma)
Nechť $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí definovaných na Ω, potom
$$\int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n(x) dx.$$

Najděte příklad ostré nerovnosti v MA2.

<u>Důkaz</u> : Položíme $g_k(x) = \inf\limits_{n\geq k} f_n(x); k \in \mathbb{N}; x \in \Omega$. Pak posloupnost $g_k(x)$ je neklesající a zdola omezená. Označíme

$\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = f(x)\,(= \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x))$. Dále pro $k \le n$ platí $g_k(x) \le f_n(x)$, tedy

$$\int\limits_\Omega g_k(x)\,dx \le \int\limits_\Omega f_n(x)\,dx \Rightarrow \int\limits_\Omega g_k(x)\,dx \le \inf_{n\ge k} \int\limits_\Omega f_n(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int\limits_\Omega f(x)\,dx = \int\limits_\Omega \lim_{k\to\infty} g_k(x)\,dx =$$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega g_k(x)\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\inf_{n\ge k} \int\limits_\Omega f_n(x)\,dx.$$

Poznámka 2.12: - Lebesgueova věta o monotónní konvergenci.
Předpokládáme, že $g_k(x) \le g_{k+1}(x)$ na množině Ω a označíme $g(x) = \sup\limits_k g_k(x)$. Chceme dokázat, že pak platí rovnost $\sup\limits_k \int\limits_\Omega g_k(x)\,dx = \int\limits_\Omega g(x)\,dx$.
Nechť $h(x)$ je jednoduchá měřitelná funkce $0 \le h(x) \le g(x)$ a $\Omega_k = \{x \in \Omega : g_k(x) \ge \alpha h(x), \alpha < 1\}$, pak $\bigcup\limits_k \Omega_k = \Omega$. Dále $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = g(x) \ge h(x) > \alpha h(x) \Rightarrow \int\limits_\Omega g_k(x)\,dx \ge \int\limits_{\Omega_k} g_k(x)\,dx \ge \alpha \int\limits_{\Omega_k} h(x)\,dx \Rightarrow \sup\limits_k \int\limits_\Omega g_k(x) \ge \alpha \int\limits_\Omega h(x)\,dx$ - to platí $\forall\,\alpha < 1\,\forall\,h(x) \le g(x)$, pak z definice Lebesqueova integrálu $\sup\limits_k \int\limits_\Omega g_k(x) = \int\limits_\Omega g(x)$, což jsme chtěli dokázat.

Věta 2.11 : (Riesz-Fischerova)
Prostor L^p je pro $1 \le p \le \infty$ Banachovým prostorem.

Důkaz :

Nechť $(u_n) \subset L^p(\Omega), 1 \le p \le \infty, (u_n)$ je cauchyovská posloupnost, tzn. $\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,n_0\,\forall\,m,n > n_0 : \|u_m - u_n\|_p < \varepsilon$. Volíme postupně $\varepsilon = \frac{1}{2^i}$, pak $\exists\,n_i$ a $\|u_{n_i+1} - u_{n_i}\|_p < \frac{1}{2^i}$, nechť (n_i) je rostoucí posloupnost a označíme $v_i = u_{n_i}$ (tj. vybrali jsme podposloupnost z (u_n)). Potom $v_m - v_n = v_m - v_{m-1} + v_{m-1} - \ldots - v_n = \sum\limits_{i=n}^{m-1} v_{i+1} - v_i$ a $|v_m - v_n| \le \sum\limits_{i=n}^{m-1} |v_{i+1} - v_i| \le \sum\limits_{i=n}^{\infty} |v_{i+1} - v_i|$.
Zároveň platí

$$\Big(\int_\Omega \lim_{k\to\infty}\big(\sum_{i=n}^{k}|v_{i+1}-v_i|\big)^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le \liminf_{k\to\infty}\Big(\int_\Omega\big(\sum_{i=n}^{k}|v_{i+1}-v_i|\big)^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

První nerovnost plyne z Fatuova lemmatu, druhá z Minkowského nerovnosti.

$\le \liminf\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=n}^{k}\big(\int\limits_\Omega |v_{i+1}-v_i|^p\,dx\big)^{\frac{1}{p}} = \liminf\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{i=n}^{k}\|v_{i+1}-v_i\|_p \le \sum\limits_{i=n}^{\infty}\|v_{i+1}-v_i\|_p = 1 \Rightarrow$ řada $\sum\limits_{i=n}^{\infty}|v_{i+1}(x)-v_i(x)|$ je konvergentní pro s.v. $x\in\Omega$ (rozmyslete si proč) a posloupnost $(v_i(x))$ je cauchyovská pro s.v. $x\in\Omega$. Tudíž existuje funkce $v(x) : \lim\limits_{i\to\infty} v_i(x) = v(x)$ pro s.v. $x\in\Omega$ a platí

Opět využijeme Fatuovo lemma. Rozmyslete si proč fukce v je z prostoru $L^p(\Omega)$.

$$\|v-v_n\|_p = \Big(\int_\Omega |v-v_n|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} = \Big(\int_\Omega \lim_{k\to\infty}|v_k-v_n|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\big(\liminf_{k\to\infty}\int_\Omega |v_k-v_n|^p dx\big)^{\frac{1}{p}} = \liminf_{k\to\infty}\|v_k-v_n\|_p \le \sum_{i=n}^{\infty}\|v_{i+1}-v_i\|_p.$$

Poslední výraz konverguje pro $i\to\infty$ k nule. Tedy $\|v-v_n\|_p\to 0$ a posloupnost (v_n) konverguje v prostoru $L^p(\Omega)$.

Definice 2.23 : (Lokální L^p prostor)
Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^n$ a $0<p<\infty$. Jestliže pro každou omezenou oblast $\Omega^*\subset\overline{\Omega^*}\subset\Omega$ platí $u\in L^p(\Omega^*)$, pak říkáme, že u je z prostoru $L^p_{loc}(\Omega)$ (je lokálně v $L^p(\Omega)$).

Příklad 2.13 :

Nechť $u(x)=\frac{1}{x^2}$ na $(0,1)$, pak $u\in L^1_{loc}(0,1)$

Nechť $u(x)=x^3$ na $(0,\infty)$, pak $u\in L^1_{loc}(0,\infty)$.

Cvičení 2.4 :

Nechť Ω je omezená oblast, pak dokažte, že platí $1\le p\le q\le\infty\Rightarrow L^q(\Omega)\subset L^p(\Omega)$.

$(\int\limits_\Omega [1\cdot f]^p dx \le (\int\limits_\Omega 1^r dx)^{\frac{1}{r}}(\int\limits_\Omega |f|^p dx)^{\frac{q}{p}})^{\frac{p}{q}}$.

Pro neomezenou oblast Ω toto tvrzení neplatí, najděte příklad.

$(\ \frac{1}{x}\in L^2(1,\infty)$, ale $\frac{1}{x}\notin L^1(1,\infty)$.)

Pokud oblast Ω je neomezená, pak dokažte, že platí $L^p(\Omega)\subset L^1_{loc}(\Omega)$.

Věta 2.12 : (Spojitost v průměru)
Nechť $\Omega \subset R^n$ je omezená oblast, $1 \leq p < \infty$ a $u \in L^p(\Omega)$. Dodefinujeme-li funkci nulovou vně Ω, pak
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall h \in R^n, \|h\| < \delta$ je

$$\left(\int_\Omega |u(x+h) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \, .$$

Poznámka 2.13 :

1) Hovoříme o spojitosti v průměru stupně p.

2) Věta 2.11 platí i pro neomezené oblasti Ω) s konečnou mírou $\operatorname{meas} \Omega$.

Věta 2.13 : (Kompaktnost v L^p)
Nechť M je uzavřená podmnožina $L^p(\Omega)$. Pak M je kompaktní právě tehdy, když

1) M je omezená, tj. $\exists c \in \mathbb{R} \, \forall u \in M : \|u\|_p \leq c$,

2) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ a $\exists$ omezená uzavřená $F \subset \Omega : \forall u \in M$

$$\int_{\Omega \setminus F} |u(x)|^p \, dx \leq \varepsilon$$

a

$$\forall h \, , \, \|h\| < \delta : \left(\int_\Omega |u(x+h) - u(x)|^p \, dx \right) \leq \varepsilon \, .$$

Říkáme, že funkce u jsou stejně omezené.

Tento předpoklad potřebujeme, pokud je Ω neomezená množina.

Toto je stejná spojitost v průměru. Vně Ω je u dodefinována nulou.

Příklad 2.14 : Uvažujeme funkce $u_n(x) = x^n$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pro $p = 1$ rozhodneme o jejich spojitosti v průměru. Pro $h > 0$ je funkce $(x+h)^n$ definována na intervalu $\langle 0, 1-h \rangle$, protože mimo $\Omega = \langle 0, 1 \rangle$ je dodefinována nulou. Tedy $\int\limits_0^1 |(x+h)^n - x^n|^1 \, dx = \int\limits_0^{1-h} (x+h)^n \, dx - \int\limits_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{(x+h)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{1-h} - \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{h^{n+1}}{n+1}$.

Podobně pro $h < 0$ dostaneme $\int\limits_0^1 |(x+h)^n - x^n|^1 \, dx = - \int\limits_{-h}^1 (x+h)^n dx + \int\limits_0^1 x^n \, dx = - \left[\frac{(x+h)^{n+1}}{n+1} \right]_{-h}^1 - \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 =$

Poslední nerovnost plyne z Bernoulliovy nerovnosti, viz MA1.

$-\frac{(1+h)^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \geq -(n+1)h\,.$

Tudíž funkce $u_n(x) = x^n$ nejsou stejně spojité v průměru.

Také říkáme, že prostor spojitých funkcí s kompaktním nosičem je hustý v prostoru Lebesgueovsky integrovatelných funkcí.

Věta 2.14 : (Spojité funkce v $L^p(\Omega)$)
Nechť $1 \leq p < \infty$, potom $\overline{C_0^\infty(\Omega)} = L^p(\Omega)$ vzhledem k normě $\|\cdot\|_p$; je-li Ω omezená oblast, pak $\overline{C^\infty(\,\overline{\Omega}\,)}^{\|\cdot\|_p} = L^p(\Omega)$.

Poznámka 2.14 :

Je-li Ω neomezená oblast, pak pokud máme funkci $u \in L^p(\Omega)$, tak na "krajích Ω" se musí blížit k 0. Proto ji stačí aproximovat funkcemi s kompaktním nosičem. Pomocí posloupnosti spojitých funkcí se dostaneme k funkcím z $L^p(\Omega)$.

1) Neboli $\forall\, u \in L^p(\Omega)\,\forall\, \varepsilon > 0\,\exists\, u_c \in C_0^\infty(\Omega), \|u-u_c\|_p < \varepsilon$. Prostor $L^p(\Omega)$ je zúplnění prostoru $(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_p)$.

2) Nechť pro funkci $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ platí $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\;dx = 1$, $\varphi(x) \geq 0$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \|y\| \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Potom nazveme **regularizátor** funkce $u \in L^p(\Omega)$ funkci

$$R_\varepsilon u(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_\Omega \varphi(\frac{x-y}{\varepsilon})\, u(y)\;dy\,.$$

Platí $R_\varepsilon u(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0_+} \|R_\varepsilon u - u\|_p = 0$.

3) Luzinova věta: Nechť $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ je měřitelná funkce a $\varepsilon > 0$, pak existuje kompaktní podmnožina $K \subset \langle a, b\rangle$ taková, že restrikce f/K je spojitá funkce a míra doplňku $\operatorname{meas}(\langle a, b\rangle \setminus K) = 0$.

2.2.3 Sobolevovy prostory

Uvažujeme funkci $u \in C^\infty(\Omega)$ a pro $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ označíme

$$\|u\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p$$

Ekvivalentně můžeme definovat $\|u\|_{k,p} = \big(\sum\limits_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_p^p\big)^{\frac{1}{p}}$.

Pro $k = 0$ označíme $\|u\|_{0,p} = \|u\|_p$.

Uvažujeme cauchyovskou posloupnost $(u_n) \subset C^\infty(\Omega)$ vzhledem k uvedené normě, tzn.

$$\forall\, \varepsilon\, \exists\, n_0\, \forall\, m, n, m > n_0, n > n_0 \Rightarrow \|u_m - u_n\|_{k,p} < \varepsilon\,.$$

Pak pro každé α je posloupnost $(D^\alpha u_n)$ cauchyovská a v úplném prostoru $L^p(\Omega)$ existuje $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} D^\alpha u_n = u_\alpha\,.$$

Pro $\alpha = (0, \ldots, 0)$ označíme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u_0$. Potom $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ platí

$$\int\limits_\Omega u_0(x) D^\alpha \varphi(x)\; dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega u_\alpha(x)\varphi(x)\; dx\,, \tag{6}$$

což plyne z Greenovy věty.

<u>Důkaz</u> : $\forall\, u \in C^\infty(\Omega), \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ platí podle Greenovy formule

$$\int\limits_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)\; dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega D^\alpha u(x)\varphi(x)\; dx\,.$$

V této rovnosti položíme $u = u_n$ a limitním přechodem dostaneme rovnost (6).

Definice 2.24 : (Zobecněná derivace)
Nechť Ω je oblast v $\mathbb{R}^n$ a $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Funkce $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ taková, že

$$\int\limits_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)\; dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega w(x)\, \varphi(x)\; dx, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

se nazývá **zobecněná derivace** funkce u vzhledem k multiindexu α a píšeme $\mathbf{w} = \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}$. Hovoříme také o **derivaci ve smyslu distribucí**.

Pro hladké funkce je zobecněná derivace rovna klasické.

Definice 2.25 : (Sobolevův prostor)
Nechť $\Omega \subset R^n$ je oblast, $k \in N$, $1 \le p < \infty$. Množina $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)$: zobecněná derivace $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, $\forall |\alpha| \le k\}$ se nazývá **Sobolevův prostor** .

Hledáme prostory, ve kterých má smysl rovnost $y'(x) = \operatorname{sign} x$.

<u>*Poznámka 2.15*</u>:

i) $W^{k,p}$ je Banachův prostor - můžeme jej chápat jako podprostor $L^p(\Omega) \times \cdots \times L^p(\Omega)$.

ii) Označíme $X = \{u \in C^\infty, \|u\|_{k,p} < \infty\}$, potom platí $W^{k,p}(\Omega) = \overline{(X, \|\cdot\|_{k,p})}$. Pro omezenou oblast Ω s hladkou hranicí $\partial\Omega$ je $\overline{(C^k(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{k,p})} = W^{k,p}(\Omega)$

Definice 2.26 : (Sobolevův prostor "s nulou na hranici")
Nechť $\Omega \subset R^n$ je oblast, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Definujeme prostor
$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{(C_0^\infty, \|.\|_{k,p})}\,.$$

Prostor $W_0^{k,p}(\Omega)$ je zúplněním prostoru $C_0^\infty(\Omega)$ vzhledem k normě $\|.\|_{k,p}$.

<u>*Příklad 2.15*</u> : Dokažte, že funkce $u(x) = |x|$ je z prostoru $W^{1,p}(0,1)\ \forall\, p \in \langle 1, \infty)$

<u>*Poznámka 2.16*</u>: $\Omega \subset R^n$ omezená oblast s hladkou hranicí, $n \geq 2$, $1 \leq p < \infty$. Označíme $X \hookrightarrow Y$ právě tehdy, když $X \subset Y \wedge \|u\|_Y \leq c\,\|u\|_X$ a hovoříme o spojitém vnoření prostoru X do prostoru Y. Platí

Hovoříme o spojitém vnoření Sobolevova prostoru do prostoru Lebesgueova (Hölderova).

$$q \in \left\langle 1, \tfrac{np}{n-kp} \right\rangle, n > kp, \qquad W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

$$q \in \langle 1, \infty)\,, n = kp \qquad W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

$$n < kp, \qquad W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}),$$

$\lambda = k - \frac{n}{p}$, když $k - \frac{n}{p} < 1$; $\lambda \in (0,1)$, když $k - \frac{n}{p} = 1$ a $p > 1$; $\lambda = 1$, když $k - \frac{n}{p} > 1$.

2.3 Lineární funkcionály, slabá konvergence

Při řešení diferenciální rovnice $y' = \operatorname{sign} x$, $x \in (-1,1)$ nenalezneme řešení v prostoru $C^1(-1,1)$, ale v prostoru $W^{1,1}(-1,1)$. Řešením bude funkce $y\,(x) = |x|$. Zřejmě $\int\limits_{-1}^{1} |x|\ dx < \infty$. Dále zobecněnou derivací y' funkce $y(x) = |x|$ je funkce $\operatorname{sign} x$, neboť $\forall\, \varphi \in C_0^\infty\,(-1,1)$ platí

$$\int\limits_{-1}^{1} |x| \cdot \varphi'(x)\, dx = [\operatorname{sign} x \cdot \varphi(x)]_{-1}^{1} - 1 \int\limits_{-1}^{1} \operatorname{sign} x \cdot \varphi(x)\, dx$$

a funkce φ má $\operatorname{supp} \varphi \subset (-1,1) \Rightarrow \varphi\,(-1) = \varphi\,(1) = 0\,.$

Pro řešení y rovnice $y' = f$ platí pro každé $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ rovnost

$$-\int\limits_{\Omega} y(x)\, \varphi'(x)\ dx = \int\limits_{\Omega} y'(x)\, \varphi(x)\ dx = \int\limits_{\Omega} f(x)\, \varphi(x)\ dx\,.$$

Označíme $F_f(\varphi) = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$, potom dostaneme funkcionál $F : C_0^\infty(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$. Podobně $F_y(\varphi) = -\int\limits_\Omega y \cdot \varphi'$ a hledáme, kdy nastane rovnost funkcionálů $F_y = F_f$.

Funkcionál je zobrazení z prostoru funkcí do prostoru reálných (komplexních) čísel.

Definice 2.27 : (lineární funkcionál)
Nechť V je lineární prostor a zobrazení $F : V \mapsto \mathbb{C}$ splňuje

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\ \forall\, u, v \in V : F(au + bv) = a\,F(u) + b\,F(v)\,,$$

pak se F nazývá **lineární funkcionál**.

Geometricky je reprezentantem lineárního funkcionálu přímka nebo rovina procházející počátkem.

Příklad 2.16 :
Nechť $u \in C(\langle a, b\rangle)$, pak $F_1(u) = \int\limits_a^b u(x)\,dx,\ F_2(u) = u(x_0)$ jsou lineární funkcionály na prostoru spojitých funkcí.

Definice 2.28 : (spojitost funkcionálu)
Nechť $(V, \|.\|)$ je NLP a $F : V \mapsto \mathbb{C}$. Řekneme, že funkcionál F je **spojitý** na V, jestliže $\forall\ (u_n) \subset V : u_n \mapsto u$ ve V platí

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = F(u).$$

Definice 2.29 : (omezený funkcionál)
Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je NLP a $F : V \mapsto \mathbb{C}$. Řekneme, že funkcionál F je **omezený**, jestliže $\exists\, K > 0\ \forall\, u \in V$ platí

$$|F(u)| \le K\,\|u\|.$$

Věta 2.15 :
Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je NLP. Lineární funkcionál $F : V \mapsto \mathbb{C}$ je spojitý na V právě tehdy, když

i) je omezený na V,

ii) je spojitý v nulovém prvku prostoru V,

iii) $\forall\, r\ \exists\, K_r\ \forall\, u \in \overline{K(o\,, r)} : |F(u)| \le K_r\,.$ (omezený na kouli)

Tedy $u_n \to o \Rightarrow F(u_n) \to 0$. Rovnost $F(o) = 0$ plyne z linearity funkcionálu F.

Důkaz : Důkaz věty provedeme postupně v následujících krocích spojitý $\overset{a)}{\Rightarrow}$ spojitý v 0 $\overset{b)}{\Rightarrow}$ omezený na kouli $\overset{c)}{\Rightarrow}$ omezený $\overset{d)}{\Rightarrow}$ spojitý.

a) Pokud je F spojitý, pak je zřejmě spojitý i v počátku.

b) Nechť $u \in S(o,r) = \{u \in V : \|u\| = r\}$ (sféra o poloměru r) a nechť pro spor F není omezený na $S(o,r)$ $\Rightarrow \forall n \, \exists u_n \in S(o,r) : |F(u_n)| \geq n$. Pro $\frac{u_n}{n} \to o$ je $|F(\frac{u_n}{n})| \geq 1$ (z linearity F), což je spor se spojitostí v počátku o. Tudíž $\exists K : |F(u)| < K \, \forall u, \|u\| = r$. Pro $\|u\| < r$ je $r\frac{u}{\|u\|} \in S(o,r) \Rightarrow |F(r\frac{u}{\|u\|})| < K \Rightarrow |F(u)| < \frac{\|u\|}{r} K < K \Rightarrow F$ je omezený funkcionál ($F(o) = 0$).

c) Nechť $v \in V, v \neq o$, pak $\frac{v}{\|v\|} \in S(o,r) \Rightarrow |F(\frac{v}{\|v\|})| < K \Rightarrow |F(v)| \leq K\|v\|$ a F je omezený funkcionál.

d) Z omezenosti a linearity F plyne $|F(u_n) - F(u)| \leq K \|u_n - u\|$ a pro $u_n \mapsto u$ tedy $\lim\limits_{n\to\infty} F(u_n) = F(u)$, což je definice spojitosti funkcionálu F.

Odtud také vyplývá, že svých největších hodnot na kouli o poloměru r nabývá funkcionál na její hranici, tj. sféře $S(o,r)$.

Definice 2.30 : (norma funkcionálu)
Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je NLP a F spojitý lineární funkcionál na V, potom číslo

$$\|F\|_* = \sup_{\|u\|=1} |F(u)|$$

se nazývá **norma** funkcionálu F.

Normu funkcionálu F můžeme také definovat vztahem $\|F\|_* = \inf\{K : |F(u)| \leq K\|u\|\}$.

Cvičení 2.5 : Dokažte, že pro lineární funkcionál F platí $\forall u \in V : |F(u)| \leq \|F(u)\|_* \cdot \|u\|$ a $\|F\|_* = \sup\limits_{\|u\|\leq 1} |F(u)|$.

Využijte linearitu F, z které plyne rovnost $F(\frac{u}{\|u\|}) = \frac{1}{\|u\|}F(u)$.

Příklad 2.17 :

a) Pro pevné $v \in V$, kde V je unitární prostor, je skalární součin $F(u) = (u, v)$ lineární funkcionál.

b) $F(u) = \int\limits_\Omega u(x)v(x)\, dx$, $u \in L^p$, $v \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, pak F je spojitý, lineární funkcionál a $\|F\|_* = \|v\|_q$.

$\|F\|_* = \sup\limits_{\|u\|\leq 1} |F(u)| = \sup\limits_{\|u\|\leq 1} |(u,v)| = \|v\|$.

Věta 2.16 : (F. Riesz - o reprezentaci)
Nechť $1 < p < \infty$ a funkcionál $F : L^p(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ je spojitý a lineární. Pak $\exists!\, v \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ takové, že

$$F(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx, \quad u \in L^p(\Omega)$$

a

$$\|F\|_* = \|v\|_q .$$

Volbou funkce

$$u(x) = \frac{|v(x)|^{q-1} \operatorname{sign} v(x)}{\|v(x)\|_q^{q-1}}$$

lze dokázat rovnost $\|F\|_* = \|v\|_q$.

<u>*Cvičení 2.6*</u> : Dokažte, že množina všech spojitých lineárních funkcionálů je NLP s normou $\|\cdot\|_*$.

Definice 2.31 : (Duální prostor)
Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je NLP. Normovaný lineární prostor všech spojitých lineárních funkcionálů se nazývá **duální prostor** k prostoru V a značí se $(V^*, \|\cdot\|_*)$.

Z Rieszovy věty (2.16) plyne $L^q(\Omega) = (L^p(\Omega))^*$. Platí $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$, ale $(L^\infty(\Omega))^* \neq L^1(\Omega)$. Duálem k prostoru $L^\infty(\Omega)$ je prostor měr.

Věta 2.17 : (Úplnost duálního prostoru)
Duální prostor $(V^*, \|\cdot\|_*)$ k NLP $(V, \|\cdot\|)$ je **Banachův prostor**.

(poznámka k důkazu: $|\,F_n(u) - F_m(u)\,| \leq \|F_n - F_m\|_* \|u\| \to 0$ $\Rightarrow F_n(u) \to F_0(u)$.)

Věta 2.18 : (Hahn-Banach)
Nechť V je NLP a V_0 je lineární podprostor V a $F_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ lineární spojitý funkcionál, potom $\exists\, F \in V^* : F/V_0 = F_0$ a $\|F\|_* = \|F_0\|_*$.

Hahn-Banachově větě se také říká věta o rozšíření spojitého lineárního funkcionálu.

Důsledkem předcházející věty je následující tvrzení, které zaručuje existenci netriviálních (nenulových) funkcionálů.

Věta 2.19 : Nechť V je NLP, $u_0 \in V$, $u_0 \neq o$, pak $\exists\, F \in V^*$ takový, že $F(u_0) = \|u_0\|_V$ a $\|F\|_* = 1$.

<u>Důkaz</u> : Definujeme $V_0 = \{\lambda u_0 : \lambda \in T\}$ a $F_0(\lambda u_0) = \lambda \|u_0\|_V$. Potom $F_0(u_0) = \|u_0\|_V$, $|F_0(\lambda u_0)| = |\lambda|\, \|u_0\|_V = \|\lambda u_0\| \Rightarrow$ $\|F_0\|_* = 1$ a existence $F \in V^*$ plyne z věty (2.18).

Definice 2.32 : (Izomorfismus prostorů)
Nechť $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ jsou dva NLP a lineární zobrazení S z prostoru V na W splňuje: $\forall\, u \in V : \|u\|_V = \|S(u)\|_W$. Potom se S nazývá **izomorfismus** prostorů V a W.

Dokažte, že zobrazení S je také prosté, tedy vzájemně jednoznačné a spojité.
Příkladem S je zobrazení, které matici A přiřadí matici transponovanou A^T.

Definice 2.33 : (Druhý duál)
Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je NLP a $(V^*, \|\cdot\|_*)$ jeho duální prostor. Duální prostor k prostoru V^* označíme V^{**}. Obecně platí $V \subset V^{**}$ ve smyslu izomorfismu κ, kde $\kappa : V \to V^{**}$ a

$$\kappa(u)(F) = F(u) \quad \forall\, F \in V^* .$$

Izomorfismus κ se nazývá **kanonické zobrazení**.

$(L^q(\Omega))^* = L^p(\Omega) \Rightarrow ((L^p(\Omega))^*)^* = L^p(\Omega)$, pro $1 < p < \infty$.

Pokud je prostor V reflexivní, pak V^* je rovněž reflexivní prostor.
Prostor V je reflexivní právě tehdy, když je stejnoměrně konvexní.

Definice 2.34 : (reflexivní prostor)
Jestliže $\kappa(V) = V^{**}$, pak se prostor V nazývá **reflexivní**.

Příklad 2.18 :

Prostor $L^p(\Omega), 1 < p < \infty$ je reflexivní, ale prostory $L^1(\Omega)$ a $L^\infty(\Omega)$ nejsou reflexivní.

Příklad 2.19 :

Řešení y diferenciální rovnice

$$y''(x) = f(x)\,, \quad y(0) = y(\pi) = 0\,,$$

hledáme v prostoru $W_0^{1,2}(0,\pi)$. Toto řešení splňuje rovnost

$$\int_0^\pi y''(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^\pi f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\,\varphi \in W_0^{1,2}(0,\pi)\,. \quad (7)$$

$F(y,\varphi)$ je bilineární forma, tzn. F je lineární jak v proměnné y, tak v proměnné φ.

Označíme $F(y,\varphi) = \langle F_y, \varphi\rangle = \int_0^\pi y'(x)\varphi'(x)\,dx$ a $F_f(\varphi) = \int_0^\pi f(x)\varphi(x)\,dx$. Pokud najdeme funkci y, která splňuje rovnici (7), pak hovoříme o slabém řešení původní úlohy.

Jak toto slabé řešení hledáme? Samozřejmě přes posloupnost! Hledáme (y_n) tak, aby $F_{y_n}(\varphi) \to F_y(\varphi)$ $\forall\,\varphi$ pevné, tudíž otočíme význam y a φ. Funkce φ nyní reprezentuje funkcionál a chceme $\int y_n'\varphi' \to \int y'\varphi'$ a $F_{\varphi'}(y_n) \to F_{\varphi'}(y)$.

Definice 2.35 : (Slabá konvergence)
Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je NLP. Řekneme, že posloupnost $(u_n) \subset V$ **konverguje slabě** k $u \in V$, jestliže

$$\forall\, F \in V^* : \lim_{n\to\infty} F(u_n) = F(u)\,.$$

Píšeme $u_n \rightharpoonup u$.

Příklad 2.20 :

Platí $e_n \rightharpoonup 0$ v ℓ^2 a $\sin n\pi \rightharpoonup 0$ v $L^2(0,2\pi)$, ale $\|e_n\| = 1$, $\|\sin n\pi\|_2 = \pi$.

V konečné dimenzi $u_n \rightharpoonup u$ znamená $(u_n, v) \to (u, v)$, $\forall\, v \in \mathbb{R}^k \Rightarrow (u_n - u, v) \to 0$ a pro $v = e_i$ dostaneme konvergenci i-té složky $\Rightarrow$ silná konvergence $u_n \to u$.

Následující větu lze využít v přibližných metodách nebo k důkazu omezenosti slabě konvergentní posloupnosti.

Věta 2.20 : (Banach - Steinhaus)
Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor a $(F_n) \subset (V^*, \|\cdot\|_*)$. Nechť $\forall u \in V \; \exists K(u) : |F_n(u)| \leq K(u) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Pak je posloupnost funkcionálů (F_n) omezená, tj. $\exists K$

$$\|F_n\|_* \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Věta 2.21 : (Vlastnosti slabé limity)

a) Nechť $u_n \to u$, pak $u_n \rightharpoonup u$.

b) Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je NLP a $u_n \rightharpoonup u$, pak

1) slabá limita u je dána jednoznačně,

2) posloupnost (u_n) je omezená,

3) $\|u\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\|$.

Silná konvergence implikuje slabou.

Připomenutí: $u_n \to u \Rightarrow (u_n)$ je omezená a $\|u\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|$.

Důkaz :

a) $F(u_n) - F(u) = F(u_n - u) \leq \|F\|_* \cdot \|u_n - u\| \to 0$ pro $u_n \to u$ tedy $F(u_n) \to F(u) \; \forall F \in V^*$, tudíž $u_n \rightharpoonup u$.

b) 1) Pro spor nechť $u_n \rightharpoonup u \wedge u_n \rightharpoonup v$, $u \neq v \Rightarrow \|u - v\| \neq 0 \Rightarrow \; \exists F_0 : V_0 \to \mathbb{R}$, kde $V_0 = \{\lambda(u-v) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ a $F_0(\lambda(u-v)) = \lambda\|u-v\|$, tedy $F_0 \in V^*$. Podle Hahnovy-Banachovy věty 2.18 $\exists F \in V^*$ tak, že $\|F\| = \|F_0\|$ a $F(u-v) = \|u-v\| \neq 0$, což je spor s $F(u) = F(v)$.

2) Použijeme izomorfismus κ z definice 2.33 a ztotožnění $V^{**} \ni \kappa(u_n) \cong u_n$. V Banachově-Steinhausově větě 2.20 je Banachovým prostorem nyní prostor V^*, jeho duál prostor V^{**} a $F_n = u_n$. Platí $\forall F \in V^* : u_n(F) \cong \kappa(u_n)(F) = F(u_n)$ a posloupnost $(F(u_n))$ je omezená, protože $F(u_n)$ konverguje k $F(u)$. Tedy i posloupnost $(u_n(F))$ je omezená a podle věty 2.20 $\exists K$ takové, že $\|u_n\| \leq K$.

3) Opět použijeme izomorfismus κ z definice 2.33 a rovnost $\|\kappa(u)\| = \|u\|$, pak platí $\|u\| = \sup\limits_{\|F\|_* \leq 1} |F(u)| =$

$$\sup_{\|F\|_*\leq 1} |F(\lim_{n\to\infty} u_n)| = \sup_{\|F\|_*\leq 1} \liminf_{n\to\infty} |F(u_n)| \leq \text{(cvič. (2.5))}$$

$$\sup_{\|F\|_*\leq 1} \liminf_{n\to\infty} \|F\|_*\|u_n\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|\,.$$

Protože duální prostor V^* je úplný, můžeme se omezit na hustou podmnožinu M.

Věta 2.22 : (Slabá konvergence pro hustou podmnožinu - oslabení definice slabé konvergence)
Nechť $(V, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, M je hustá podmnožina duálu V^* a posloupnost $(u_n) \subset V$ je omezená. Jestliže $\exists\, u \in V$ takové, že $\forall\, F \in M$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} F(u_n) = F(u)$, pak $u_n \rightharpoonup u$.

Slabá konvergence úzce souvisí s reflexivitou daného prostoru, jak ukazuje následující věta.

1) V konečné dimenzi lze z každé omezené posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost.
2) V konečné dimenzi silná a slabá konvergence splývají.
3) V $\mathbb{R}^n$ je uzavřená koule kompaktní, v reflexivním prostoru je uzavřená koule slabě kompaktní.

Věta 2.23 : (Eberlein - Šmuljan)
Banachův prostor $(V, \|\cdot\|)$ je reflexivní právě tehdy, když z každé omezené posloupnosti lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost.

2.4 Hilbertovy prostory

Definice 2.36 : (Hilbertův prostor)
Unitární prostor se skalárním součinem $(\cdot,\cdot)$, který je úplný vzhledem k normě $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ se nazývá **Hilbertův**.

Příklad 2.21 : $\ell^2, L^2(\Omega), W^{k,2}(\Omega)$ jsou Hilbertovy prostory.

Prostor $L^p(\Omega)$, $p \neq 2$ není Hilbertův, norma $\|u\|_p$ nesplňuje rovnost rovnoběžníka: $\|u+v\|_p^2 + \|u-v\|_p^2 = 2(\|u\|_p^2 + \|v\|_p^2)$.

Připomeňme, že zobrazení $F(u) = (u, v)$ definované pro pevné $v \in H$ a pro všechna $u \in H$ je spojitý lineární funkcionál. Tato implikace platí i obráceně, jak je vidět z následující věty.

Věta 2.24 : (R. Rieszova - o reprezentaci)
Nechť H je Hilbertův prostor a $F \in H^*$, pak $\exists!\, v \in H$ tak, že

$$\forall\, u \in H : \quad F(u) = (u, v) \quad \text{a} \quad \|F\|_* = \|v\|\,.$$

Důsledek 2.1 : Pro Hilbertův prostor H platí $H = H^* = H^{**}$, tudíž H je reflexivní prostor a podle věty 2.23 z každé omezené posloupnosti lze v něm vybrat slabě konvergentní podposloupnost.

K důkazu Rieszovy věty o reprezentaci je zapotřebí následující teorie ortogonálního rozkladu Hilbertova prostoru.

Definice 2.37 : (Ortogonální doplněk)
Buď M podmnožina Hilbertova prostoru H, potom množina

$$M^{\perp} = \{u \in M : (u, v) = 0 \qquad \forall\, v \in M\}$$

se nazývá **ortogonální doplněk** množiny M v prostoru H.

Věta 2.25 :
Ortogonální doplněk $M^{\perp}$ je uzavřený lineární podprostor Hilbertova prostoru H .

$M^{\perp}$ je podle věty 2.4 také Hilbertův prostor.

Definice 2.38 : (Direktní (ortogonální) součet)
Nechť M_1, M_2 jsou uzavřené lineární podprostory H a

$$(u_1, u_2) = 0 \quad \forall\, u_1 \in M_1\ \forall\, u_2 \in M_2\,.$$

Množinu

$$M_1 \oplus M_2 = \{u : u = u_1 + u_2;\ u_i \in M_i,\ i = 1, 2\}$$

nazveme **direktním součtem** prostorů M_1 a M_2 .

Dokažte, že $M_1 \oplus M_2$ je opět uzavřený podprostor M.

Cvičení 2.7 :
Nechť $M = M_1 \oplus M_2$, pak $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, $M_1 = M_2^{\perp}$, $M_2 = M_1^{\perp}$ (dokažte).

Důkaz : Rieszovy věty o reprezentaci 2.24 :
Máme dokázat, že $\forall\, F\ \exists!\, v : F(u) = (u, v),\ \forall\, u \in H$.

Pro nulový funkcionál $F = o \in V^*$ je zřejmě $v = o$.

Nechť tedy $F \neq o$ a definujme $\ker F = \{v \in V : F(v) = 0\}$, pak $\ker F \neq H$ a $(\ker F)^{\perp} \neq o \Rightarrow \exists\, u_0 \in (\ker F)^{\perp} \setminus \{o\}$ a položíme $v = \frac{\overline{F(u_0)}}{\|u_0\|^2} \cdot u_0$.

Potom $(u, v) = \left(u - \frac{F(u)}{F(u_0)} \cdot u_0 + \frac{F(u)}{F(u_0)} \cdot u_0\,,\ \frac{\overline{F(u_0)}}{\|u_0\|^2} \cdot u_0\right) =$

$\frac{F(u)}{F(u_0)} \cdot \overline{\frac{\overline{F(u_0)}}{\|u_0\|^2}} \cdot (u_0, u_0) = F(u)$, což jsme měli dokázat.
Nyní dokážeme jednoznačnost. Pokud pro další v^* platí $(u, v^*) = F(u) = (u, v) \Rightarrow (u, v^* - v) = 0 \Rightarrow$ (volbou $u = v^* - v$) $(v^* - v, v^* - v) = 0 \Rightarrow v^* = v$.

V posledním kroku dokážeme rovnost $\|F\|_* = \|v\|$. Platí
$|F(u)| = (u, v) \leq \|u\| \cdot \|v\| \wedge F(v) = \|v\|^2 \Rightarrow \|F\|_* = \|v\|$.

V definici 1.9 jsme zavedli ortonormální systém e_n v unitárních prostorech. V problému aproximace jsme diskutovali Besselovu nerovnost a Parsevalovu rovnost ($\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leq \|u\|^2$; $c_n = (e_n, u)$).

2.4.1 Fourierova řada v Hilbertových prostorech

Definice 2.39 : (Úplný ortonormální systém)
Nechť $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ je ortonormální systém v Hilbertově prostoru H. Jestliže platí implikace

$$(e_k, u) = 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N} \Rightarrow u = o\,,$$

pak se (e_k) nazývá **úplný systém**.

Jestliže je prvek u kolmý ke všem prvkům úplného systému (báze), pak je nulový.

Příklad 2.22 :

Systém vektorů $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ je úplný v prostoru ℓ^2, systém funkcí $(\frac{1}{2}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots)$ je úplný v prostoru $L^2(0, 2\pi)$.

Z báze $(1, x, x^2, \ldots)$ vytvoříme po Grammm-Schmitově ortonormalizaci ortonormální systém Legendreových polynomů v prostoru $L^2(-1, 1)$.

Věta 2.26 : (Existence úplného systému)
Nechť H je separabilní Hilbertův prostor, pak v něm existuje úplný ortonormální systém.

Věta 2.27 : (Ekvivalence k úplnosti systému)
Ortonormální systém (e_k) v Hilbertově prostoru H je úplný právě tehdy, když pro každý prvek $u \in H$ zapsaný ve tvaru $u = \sum_{k=1}^{\infty} (e_k, u) e_k$ platí Parsevalova rovnost

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, u)|^2.$$

Označíme $(e_k, u) = c_k$, pak $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, tedy posloupnost $(c_k) \in \ell^2$.

Definice 2.40 : (Fourierova řada)
Nechť (e_k) je ortonormální systém prvků v Hilbertově prostoru H, potom čísla $c_k = (e_k, u)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ se nazývají **Fourierovy koeficienty** a $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e_k$ se nazývá **Fourierova řada** prvku u (vzhledem k systému (e_k)).

Příklad 2.23 :

Funkce u z prostoru $W_0^{1,2}(0,\pi)$ má Fourierovy koeficienty $c_k = \int_0^\pi u(x) \sin kx \, dx$ vzhledem k systému $(\sin kx)_{k=1}^\infty$.

Cvičení 2.8 :

Nechť (e_k) je ortonormální úplný systém prvků v Hilbertově prostoru H. Označíme $M = \{e_1, \ldots, e_m\}$, potom platí $M^\perp = \{e_{m+1}, \ldots\}$ a $M = M \oplus M^\perp$ (Rozmyslete si).

Dále koeficienty $c_k = (u, e_k)$ jsou nejlepší v následujícím smyslu

Bod $v_0 \in M$ má nejmenší vzdálenost od bodu u.

$$\varrho(u, M) = \inf_{v \in M} \varrho(u, v) = \varrho(u, v_0), \text{ kde } v_0 = \sum_{k=1}^{m} c_k e_k .$$

Věta 2.28 : (Izomorfismus s ℓ^2)
Máme prostor H a úplný systém (e_k) v H. Nechť $(c_k) \in \ell^2$, pak $\exists! \, u \in H : c_k = (e_k, u), k \in \mathbb{N}$ (posloupnosti (c_k) přiřadíme jednoznačně prvek $u \in H$). Tedy prostor H je izomorfní s prostorem ℓ^2.

3 Operátory na Banachových prostorech

Na rovnici

$$y''(x) = f(x) \tag{8}$$

můžeme také pohlížet jako na úlohu, kdy k funkci $f \in C(0,\pi)$ hledáme funkci $y \in C^2(0,\pi)$ tak, že (8) platí. Jedná se tedy o zobrazení $T : C^2(0,\pi) \to C(0,\pi)$, $T(y) = y''$. Obecně operátor T zobrazuje prostor X do prostoru Y.

- Speciálním případem operátoru je funkcionál.
- Ve větě (2.7) jsme měli kontrahující operátor $T : X \to X$.
- Cílem je opět najít takové vlastnosti prostorů X, Y a operátoru T, že rovnice $Tu = v$ má řešení, pokud možno $\forall \, v \in Y$.
- $A\vec{x} = \vec{y}$, kde A je matice, $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, je také operátorová rovnice.

Definice 3.1 : (lineární operátor)
Nechť $(X, \| \cdot \|), (Y, \| \cdot \|)$ jsou dva Banachovy prostory. Nechť $X_0\,(\subset X)$ je lineární podprostor X. Nechť T zobrazuje X_0 do Y a $\forall\,\alpha, \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}), \forall u, v \in X$ platí

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha\, T(u) + \beta\, T(v)\,,$$

pak T je **lineární operátor**.
Prostor X_0 označíme $D(T)$ a nazveme **definiční obor** operátoru T.
Množinu $R(T) = \{v \in Y : \exists u \in D(T) : v = T(u)\}$ nazveme **obor hodnot** operátoru T.
Množinu $\ker(T) = \{u \in X_0, T(u) = 0\}$ nazveme **jádro operátoru** T,
Operátor $I : X \to X$ takový, že $I(u) = u$ nazveme identický operátor.

$R(T)$ je lineární podprostor prostoru Y. Jádro také značíme $Ker(T) = N(T)$ (null space).

Definice 3.2 : Pro operátory T, S definujeme

a) sčítání: $(T + S)u = T(u) + S(v)$,

b) skládání: $TS(u) = T(S(u))$.

Jestliže $T : X \to Y$ a $\exists\, T^{-1} : Y \to X$ tak, že $T(T^{-1}) = I_Y$ a $T^{-1}(T) = I_X$, pak T^{-1} se nazývá **inverzní operátor** k operátoru T.

Místo skládání operátorů hovoříme také o jejich násobení. Proto také píšeme

$$T^2(u) = T(T(u))\,.$$

I_X je identický operátor na prostoru X.

Příklad 3.1 :

K základním lineárním operátorům patří "derivování a integrování", $T(u) = u'$ a $T(u) = \int u(x)\,dx$.

Podobně násobení vektoru u maticí A je lineární operátor $T(u) = A\,u$.

Cvičení 3.1 : Dokažte následující tvrzení

1) Množina všech lineárních operátorů $T\colon X \to Y$ tvoří lineární prostor.

2) Nechť T, S jsou lineární operátory. Má-li složení $T \cdot S$ smysl, pak je také lineární.

3) Existuje-li T^{-1}, potom je také lineární a platí vztah $(ST)^{-1} = T^{-1} \cdot S^{-1}$.

Definice 3.3 : (spojitý a omezený operátor)
Nechť $(X, \|.\|)$, $(Y, \|.\|)$ jsou NLP a $T\colon D(T) \to (Y, \|.\|)$, $D(T) \subset X$. Řekneme, že operátor T je **spojitý operátor** na $D(T)$, jestliže $\forall\, u \in D(T)$ platí

$$\left.\begin{array}{r} \forall\,(u_n) \subset D(T) \\ u_n \to u \end{array}\right\} \Rightarrow T(u_n) \to T(u) \ \text{ v } \ Y \quad (n \to \infty).$$

T je **omezený operátor**, jestliže $\exists\, K$:

$$\|Tu\|_Y \le K\|u\|_X \quad \forall\, u \in D(T).$$

Infimum ze všech takových K se nazývá norma operátoru T a značí se $\|T\|$.

Zároveň platí

$$\|T\| = \sup_{\|u\|_Y=1} \frac{\|Tu\|}{\|u\|}.$$

Věta 3.1 : Lineární operátor $T\colon X \to Y$ je spojitý právě tehdy, když je omezený.

Příklad 3.2 :
$T(y) = y''$, $\quad D(T) = C^2(\langle 0,1\rangle)$, $\quad R(T) = C(\langle 0,1\rangle)$.
T není spojitý operátor, protože $T(\sin nx) = -n^2 \sin x$, tedy $\|T(\sin nx)\|_{C(\langle 0,1\rangle)} = n^2$ a $\|\sin nx\|_{C(\langle 0,1\rangle)} = 1$. Odtud vyplývá, že operátor T není omezený.

Definice 3.4 : (Prostor spojitých lineárních operátorů)
Prostor všech **spojitých lineárních operátorů** z prostoru X do prostoru Y značíme $\mathcal{L}(X,Y)$, z prostoru X do X značíme $\mathcal{L}(X)$.

Při hledání řešení operátorové rovnice $Tu = v$ je důležitá existence inverzního operátoru T^{-1}. Pak $T^{-1}(T(u)) = T^{-1}(v) = u$.

Věta 3.2 : (Banachova)
Jestliže operátor T zobrazuje Banachův prostor $X (= D(T))$ na Banachův prostor $Y (= R(T))$ a operátor T je omezený, prostý a lineární, pak $\exists\, T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Poznámka 3.1 : Pokud $\exists\, T^{-1}$, pak T je prostý - to je nutné, neboť pokud $Tu = Tv \Rightarrow u = T^{-1}(T(u)) = T^{-1}(T(v)) = v$.

Cvičení 3.2 :

Uvažujeme operátor $T\colon \ell^2 \to \ell^2$, $(u_n) = (u_1, u_2, \dots) \in \ell^2$,

definovaný předpisem $T(u_1, u_2, \dots) = (u_1, \frac{u_2}{2}, \frac{u_3}{3}, \dots)$.

Rozhodněte, zda $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Z podmínky 9 plyne, že operátor T je prostý a má triviální jádro $N(T)=\{0\}$.

Věta 3.3 : (Existence inverzního operátoru)
Nechť operátor $T\in\mathcal{L}(X,Y)$, $R(T)=Y$, pak existuje inverzní operátor $T^{-1}\in\mathcal{L}(Y,X)$ právě tehdy, když $\exists\, c>0$ takové, že

$$\|Tu\|_Y \geq c\,\|u\|_X \qquad \forall\, u \in X. \tag{9}$$

Věta 3.4 :
Nechť X je Banachův prostor a operátor $T \in \mathcal{L}(X)$ má normu $\|T\| < 1$. Pak existuje $(I-T)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T^k$.

Při řešení operátorové rovnice $Tu = v$ postupujeme opět pomocí posloupností. Řešíme například $Tu = v_n, v_n \to v$ a najdeme u_n splňující $Tu_n = v_n$. Pokud posloupnost (u_n) je omezená a prostor, ve kterém hledáme řešení, je reflexivní, pak $\exists\, u_{n_k} \rightharpoonup u_0$. Chceme $Tu_{n_k} \to Tu_0$.

Obraz každé omezené množiny je relativně kompaktní množina - tzn. uzávěr obrazu je kompakt.

Definice 3.5 : (Kompaktní operátor)
Nechť $T : X \to Y$ je lineární a X, Y jsou NLP. Řekneme, že T je **kompaktní operátor**, jestliže pro každou omezenou množinu $M\subset X$ je $\overline{T(M)}$ kompaktní množina v Y.

Poznámka 3.2:

1. Jestliže operátor T je lineární a kompaktní, pak je také spojitý.

   Obrazem jednotkové koule je u kompaktního operátoru omezená množina, tedy $\exists\, K : \|Tv\| \leq K \quad \forall\, v \in X$, $\|v\| = 1$. Dále platí $u = \|u\|\frac{u}{\|u\|}$, tudíž $\|Tu\| \leq \|T(\frac{u}{\|u\|})\| \cdot \|u\| \leq K\|u\|$. Operátor T je tedy omezený a podle věty 3.1 i spojitý.

2. Jestliže $u_n \rightharpoonup u_0 \wedge T$ je kompaktní, pak $\exists\, (u_{n_k}) \subset (u_n)$: $T(u_{n_k}) \to T(u_0)$.

3. Jestliže $\dim R(T) < \infty$, pak T je kompaktní ($R(T)$ je lineární podprostor).

Příklad 3.3 :

Kompaktní operátor lze aproximovat operátory s konečně dimenzionálním oborem hodnot.

Zobrazení $T : \ell^2 \to \ell^2$ dané vztahem $T((u_n)) = \left(\frac{u_n}{n}\right)$ je lineární kompaktní operátor.

Definice 3.6 : (Duální operátor)
Nechť X, Y jsou NLP a X^*, Y^* jejich duální prostory. Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Definujeme $T^* : Y^* \to X^*$ předpisem

$$T^*(F) = F \circ T,\ \forall\, F \in Y^* \Leftrightarrow (T^*F)(u) = F(T(u)),\ \forall\, u \in X.$$

Operátor T^* se nazývá **duální operátor** k operátoru T.

$$\begin{tikzcd} X^* & Y^* \arrow[l, "T^*"'] \\ X \arrow[u] \arrow[r, "T"] & Y \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Poznámka 3.3:

1) Platí $T^* \in \mathcal{L}(X^*, Y^*)$.

2) Pro normu duálního operátoru platí $\|T^*\| = \|T\|$.

3) Na prostoru $\mathbb{R}^n$ je lineární operátor T reprezentován maticí A, pak duální operátor T^* je reprezentován transponovanou maticí A^T.

4) Jestliže $u_n \rightharpoonup u \wedge T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak $Tu_n \rightharpoonup Tu$.
   $u_n \rightharpoonup u \Rightarrow Fu_n \to Fu$ i $(T^*F)u_n \to (T^*F)u \Rightarrow F(Tu_n) \to F(Tu), \forall\, F \Rightarrow Tu_n \rightharpoonup Tu$

Využíváme definice

$$(T^*F)u = FT(u)\,.$$

3.1 Lineární operátory na Hilbertových prostorech

Nechť $T : H \mapsto H, D(T) = H$ je spojitý, lineární operátor. Pro pevné $v \in H$ označíme

$$F_v(u) = (Tu, v) \qquad \forall\, u \in H.$$

Potom F_v je lineární funkcionál, protože operátor T i skalární součin jsou lineární. Dále $|F_v(u)| = |(Tu, v)| \le \|Tu\| \cdot \|v\| \le \|T\| \cdot \|u\| \cdot \|v\| \Rightarrow \|F_v\|_* \le \|T\| \cdot \|v\| \Rightarrow F_v$ je omezený (spojitý). Podle Rieszovy věty 2.27 $\exists!\, w \in H$ takové, že

$$F_v(u) = (u, w) \qquad \forall\, u \in H,$$

tedy

$$(Tu, v) = (u, w) \quad \text{a} \quad \|F_v\|_* = \|w\|.$$

K prvku $v \in H$ je tedy jednoznačně určen prvek $w \in H$, toto přiřazení označíme T^*, neboli $T^*v = w$ a

$$(Tu, v) = (u, T^*v).$$

Operátor T^* se nazývá **adjungovaný operátor** k operátoru T. Prvek v reprezentuje spojitý lineární funkcionál z $H^*(=\ H)$

a T^* mu opět přiřadí w - reprezentaci spojitého lineárního funkcionálu z H^* $(= H)$. Nebo-li T^* je duální operátor, neboť

$$(Tu, v) = F_v(u) = (FT)(u) = (T^*F)(u) = (u, T^*v).$$

Definice 3.7 : (Adjungovaný operátor)
Nechť $T : H \mapsto H$ je lineární operátor a nechť $\overline{D(T)} = H$. Jestliže k prvku $v \in H$ existuje prvek $w \in H$ takový, že $\forall\, u \in D(T)$ platí

$$(Tu, v) = (v, w)$$

pak v patří do definičního oboru $D(T^*)$ a píšeme $w = T^*v$. Operátor $T^* \colon H \to H$ se nazývá **adjungovaný operátor** k operátoru T.

Pokud T je spojitý operátor, pak je tato definice ekvivalentní s předchozí definicí, stačí hodnoty T spojitě prodloužit z $D(T)$ na H.
Tato definice se používá pro neomezené (nespojité) lineární operátory.

Definice 3.8 : (Symetrie, samoadjungovanost)
Nechť $T : H \mapsto H$ je lineární operátor. Řekneme, že T je **symetrický operátor** , jestliže

$$(Tu, v) = (u, T^*u) \qquad \forall\, u, v \in D(T),\ \overline{D(T)} = H.$$

Jestliže $D(T) = D(T^*)$, pak říkáme, že T je **samoadjungovaný operátor**.

Z definice symetrického operátoru plyne $Tv = T^*v\ \forall\, v \in D(T)$ $\Rightarrow D(T) \subset D(T^*)$.
Například symetrická matice je reprezentantem samoadjungovaného operátoru.

Definice 3.9 : (Kladný, kladně definitní operátor)
Nechť $T : H \mapsto H$ je symetrický operátor. Jestliže

$$(Tu, u) \geq 0 \qquad \forall\, u \in H,$$

pak řekneme, že operátor T je **kladný**.
Jestliže $\exists\, c > 0$ takové, že

$$(Tu, u) \geq c\,\|u\|^2 \qquad \forall\, u \in H,$$

pak řekneme, že T je (**pozitivně**) **kladně definitní**.

Věta 3.5 : (Minimum kvadratického funkcionálu a řešení operátorové rovnice)
Nechť $T : D(T) \mapsto H, \overline{D(T)} = H$, je lineární, symetrický a kladný, pak operátorová rovnice $Tu = w$ má řešení u_0 (tj. $Tu_0 = w$) právě tehdy, když u_0 je minimum kvadratického funkcionálu

$$F(u) = \frac{1}{2}(Tu, u) - (w, u) \quad (\text{tj. } F(u_0) = \min_{u \in D(T)} F(u)).$$

<u>Důkaz</u> : V bodě minima u_0 platí

$$F(u_0) \leq F(u) \Leftrightarrow F(u) - F(u_0) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}(Tu, u) - (w, u) - \tfrac{1}{2}(Tu_0, u_0) + (w, u_0) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}\left[(Tu, u) - (Tu, u_0) + (Tu, u_0) - (Tu_0, u_0)\right] - (w, u - u_0) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left[(Tu, u - u_0) + (T(u - u_0), u_0)\right] - (w, u - u_0) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}\left[(Tu, u - u_0) + (u - u_0, Tu_0)\right] - (w, u - u_0) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\tfrac{1}{2}\left[(T(u + u_0), u - u_0)\right] - (w, u - u_0) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\tfrac{1}{2}T(u + u_0) - w, u - u_0\right) \geq 0 \quad \forall\, u \in H.$$

Postupně využijeme: definici funkcionálu F, linearitu operátoru T, symetrii operátoru T, symetrii a opět distributivitu skalárního součinu.

Pro $u = u_0 - \lambda(Tu_0 - w)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ dostaneme

$$\left(\tfrac{1}{2}T(u_0 - \lambda(Tu_0 - w) + u_0) - w, -\lambda(Tu_0 - w)\right) =$$

$$-\lambda\|Tu_0 - w\|^2 + (\tfrac{1}{2}T(Tu_0 - w), Tu_0 - w)\lambda^2 \geq 0$$

Tato nerovnost platí pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ pouze v tom případě, když $Tu_0 = w$, což jsme měli dokázat.

Index

Reference

[1] Drábek, Kufner: Úvod do funkcionální analýzy, skripta ZČU Plzeň 1993

[2] Tomiczek: Matematická analýza II (http://home.zcu.cz/∼tomiczek/Data/MA2.pdf)

[3] Tomiczek: Matematická analýza III (http://home.zcu.cz/∼tomiczek/Data/MA3.pdf)