

Sbírka příkladů z matematické analýzy II

Petr Tomiczek

Obsah

10 Diferenciální rovnice 1. řádu

10.1 Separace proměnných

Příklad 1: Najděte obecné řešení (obecný integrál) diferenciální rovnice

$$y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y.$$

Teorie

Separací proměnných převedeme rovnici na tvar

$$\frac{dy}{\sin y} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \Rightarrow \frac{\cos y}{\sin y} dy = \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

a substitucemi $u = \sin y$, $v = \cos x$ dostaneme po integrování

$$\ln |u| = -\ln |v| + \ln C, \quad \text{neboli} \quad \sin y = \frac{C}{\cos x} \quad (\text{obecný integrál}).$$

$$2. (xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0 \quad [1 + y^2 = C(1 - x^2)]$$

$$3. xyy' = 1 - x^2 \quad [x^2 + y^2 = \ln Cx^2]$$

$$4. y' \operatorname{tg} x - y = a \quad [y = C \sin x - a]$$

$$5. xydx + (x + 1)dy = 0 \quad [y = C(x + 1)e^{-x}]$$

$$6. \sqrt{y^2 + 1}dx = xydy \quad [\ln |x| = C + \sqrt{y^2 + 1}; x = 0]$$

$$7. e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0 \quad [1 + e^y = C(1 + x^2)]$$

$$8. (x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, \quad y(0) = 1 \quad [y\{\ln(1 - x^2) + 1\} = 1]$$

$$9. y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e \quad [y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}]$$

$$10. \sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx, \quad y(0) = \frac{\pi}{4} \quad [\cos x = \sqrt{2} \cos y]$$

$$11. y' \operatorname{cotg} x + y = 2, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad [y = 2 - 4 \cos x]$$

Řešení pomocí [webMathematicy](#)

10.2 Rovnice umožňující přechod k separaci proměnných.

Příklad 12: Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2(x+y)}.$$

Substitucí $x + y = u$, $1 + y' = u'$ převedeme rovnici na tvar

$$u' - 1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1-u}{2u}.$$

Separaci proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{2u}{1-u} du = \int 1 dx, \quad \text{neboli} \quad -2u - 2 \ln |1-u| = x - C$$

a přejdeme k původním proměnným $3x + 2y + 2 \ln |1-x-y| = C$.

Příklad 13: Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(x + y + 2) dx + (2x + 2y - 1) dy = 0.$$

Substitucí $x + y = u$, $dx + dy = du$ převedeme rovnici na tvar

$$(u + 2) dx + (2u - 1)(du - dx) = 0 \Rightarrow (3 - u) dx + (2u - 1) du = 0.$$

Separaci proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{2u-1}{3-u} du + \int 1 dx = -C, \quad \text{neboli} \quad -2u - 5 \ln |u-3| + x = -C$$

a přejdeme k původním proměnným $x + 2y + 5 \ln |x + y - 3| = C$.

$$14. y' - y = 2x - 3 \quad [2x + y - 1 = Ce^x]$$

$$15. y' = \sin(x - y) \quad [x + C = \operatorname{cotg}\left(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)]$$

$$16. y' = \sqrt{4x + 2y - 1} \quad [\sqrt{4x + 2y - 1} - 2 \ln(\sqrt{4x + 2y - 1} + 2) = x + C]$$

$$17. y' = \cos(x - y - 1) \quad [y = x - 1 - 2 \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{C-x}\right) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}]$$

$$18. y' \sqrt{1 + x + y} = x + y - 1 \quad [x + C = 2u + \frac{2}{3} \ln |u - 1| - \frac{8}{3} \ln(u + 2)] \\ [u = \sqrt{1 + x + y}]$$

webMathematica

Příklad 19: Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{x^2 + 2xy}{xy}.$$

Teorie

Substitucí $y = ux$, $y' = u'x + u$ převedeme rovnici na tvar

$$u'x + u = -\frac{x^2 + 2xux}{xux} \Rightarrow \frac{u du}{(u+1)^2} = -\frac{dx}{x}.$$

Integrovaním dostaneme

$$\int \frac{u+1-1}{(u+1)^2} du = \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = -\ln|x| + C$$

a přejdeme k původním proměnným

$$\ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x} + 1} = -\ln|x| + C \Rightarrow \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C.$$

20. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

$$\left[\operatorname{arccotg} \frac{y}{x} = \ln C \sqrt{x^2 + y^2} \right]$$

21. $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$

$$\left[x^2 + y^2 = Cy \right]$$

22. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\left[x^2 = C^2 + 2Cy \right]$$

23. $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$

$$\left[(x+y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}} \right]$$

24. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$

$$\left[y^2 - x^2 = Cy, y = 0 \right]$$

25. $xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$

$$\left[\ln Cx = \operatorname{cotg}\left(\frac{1}{2} \ln \frac{y}{x}\right) \right]$$

$$\left[y = xe^{2k\pi}, k \in \mathbb{Z} \right]$$

26. $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0, y(1) = 0$

$$\left[y = \frac{x^2-1}{2} \right]$$

27. $(xy' - y) \operatorname{arccotg} \frac{y}{x} = x, y(1) = 0$

$$\left[\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x} \operatorname{arccotg} \frac{y}{x}} \right]$$

28. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y(0) = 1$

$$\left[y^3 = y^2 - x^2 \right]$$

29. $y' = \frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}, y(1) = 1$

$$\left[y = -x \right]$$

webMathematica

10.3 Variace konstant

Příklad 30: Metodou variace konstanty řešte diferenciální rovnici

$$y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x.$$

Teorie

Nejdříve vyřešíme homogenní rovnici metodou separace proměnných

$$y' \cos^2 x + y = 0 \Rightarrow \ln y + \operatorname{tg} x = \ln C \Rightarrow y = Ce^{-\operatorname{tg} x}.$$

Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y = C(x)e^{-\operatorname{tg} x}$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} + C(x)e^{-\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x}) \cos^2 x + C(x)e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x.$$

tedy

$$C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} \cos^2 x = \operatorname{tg} x \Rightarrow C(x) = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1) + K.$$

Obecné řešení rovnice má tvar $y = Ce^{-\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x = 1$.

$$31. xy' - 2y = 2x^4 \quad [y = Cx^2 + x^4]$$

$$32. xy' + y + 1 = 0 \quad [y = Cx - 1]$$

$$33. xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x} \quad [xy = (x^3 + C)e^{-x}]$$

$$34. (xy + e^x)dx - xdy = 0 \quad [y = e^x(\ln|x| + C)]$$

$$35. y = x(y' - x \cos x) \quad [y = x(C + \sin x)]$$

$$36. (xy' - 1) \ln x = 2y \quad [y = C \ln^2 x - \ln x]$$

$$37. y \sin x + y' \cos x = 1 \quad [y = \sin x + C \cos x]$$

$$38. (2e^y - x)y' = 1 \quad [x = e^y + Ce^{-y}]$$

$$39. y' = \frac{y}{3x - y^2} \quad [x = Cy^3 + y^2]$$

$$40. y' = \frac{1}{x \sin y + 2 \sin 2y} \quad [x = 8 \sin^2 \frac{y}{2} + Ce^{-\cos y}]$$

$$41. y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1 \quad [y = -\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}]$$

$$42. y' - 2xy = 1, y(0) = 0 \quad [y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt]$$

$$43. 2\sqrt{xy}' - y = -\sin \sqrt{x} - \cos \sqrt{x}, y \text{ je omezená pro } \rightarrow \infty \quad [y = \cos \sqrt{x}]$$

$$44. 2x^2y' - xy = 2x \cos x - 3 \sin x, y \rightarrow 0 \text{ pro } x \rightarrow \infty \quad [y = \frac{\sin x}{x}]$$

$$45. (1 + x^2) \ln(1 + x^2)y' - 2xy = \ln(1 + x^2) - 2x \operatorname{arctg} x \quad [y = \operatorname{arctg} x]$$

$$[y \rightarrow -\frac{\pi}{2} \text{ pro } x \rightarrow -\infty]$$

webMathematica

10.4 Bernoulliiova rovnice

Příklad 46: Převodem na lineární diferenciální rovnici vyřešte

$$x y' - y = x^2 y^{-1}.$$

Teorie

Substitucí $z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$ dostaneme

$$xy'y - y^2 = x^2 \Rightarrow xz' - 2z = 2x^2.$$

Vyřešíme lineární rovnici

1. hom. rovnice

$$xz' - 2z = 0$$

$$z_h = C x^2$$

2. part. řešení

$$x C' x^2 = 2x^2$$

$$C = \ln |x|^2$$

$$z_p = \ln x^2 \cdot x^2$$

3. obecné řešení

$$z = C x^2 + \ln(x^2) x^2 \Rightarrow$$

$$y^2 = C x^2 + \ln(x^2) x^2.$$

47. $y' + 2y = y^2 e^x$

$$[y(e^x + Ce^{2x}) = 1, y = 0]$$

48. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

$$[y = x^4 \ln^2 Cx, y = 0]$$

49. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$

$$[y^{-2} = x^4(2e^x + C), y = 0]$$

50. $(1 + x^2)y' = xy + x^2 y^2$

$$\left[\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(C - \frac{x}{2} \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right) \right]$$

webMathematica

11 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

11.1 Systémy funkcí

Příklad 51: Máme rozhodnout o lineární závislosti nebo nezávislosti funkcí $1, x, x^2$ na intervalu $I = (-\infty, \infty)$.

Teorie

Budeme zkoumat, kdy $\forall x \in I$ nastane rovnost

$$c_1 1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0.$$

Postupně pro $x = 0$ dostaneme $c_1 = 0$, pak pro $x = 1$ a $x = -1$ dostaneme $c_2 + c_3 = 0$ a $-c_2 + c_3 = 0$. Odtud plyne $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Podle definice jsou funkce $1, x, x^2$ lineárně nezávislé. Wronskián daných funkcí je

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Tedy i podle věty 10.4 jsou funkce $1, x, x^2$ lineárně nezávislé.

Rozhodněte o lineární závislosti nebo nezávislosti následujících funkcí

52. $1, 2, x, x^2$ [závislé]

53. e^x, xe^x, x^2e^x [nezávislé]

54. $5, \cos^2 x, \sin^2 x$ [závislé]

55. $\cos x, \cos(x+1), \cos(x-2)$ [závislé]

56. $1, \arcsin x, \arccos x$ [závislé]

57. $\cos x, \sin x, \cos 2x$ [nezávislé]

Najděte Wronskián funkcí

58. $1, x$ [1]

59. e^{-x}, xe^{-x} [e^{-2x}]

60. $2, \cos x, \cos 2x$ [$-8 \sin^3 x$]

61. $4, \sin^2 x, \cos 2x$ [0]

62. $e^{-3x} \sin 2x, e^{-3x} \cos 2x$ [$-2e^{-6x}$]

webMathematica

11.2 Eulerova rovnice

Řešení Eulerovy rovnice $x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$, kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$, (popř. $x^\lambda \ln x, \dots, x^\lambda \ln^{k-1} x$) $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorie

Příklad 63: Dosazením funkce $y(x) = x^\lambda$ do rovnice

$$x^2 y'' - 4x y' + 6y = 0$$

dostaneme $x^2 \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} - 4x \lambda x^{\lambda-1} + 6x^\lambda = 0$, tedy

$$(\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^\lambda = 0.$$

Tato rovnost je splněna (při $x \neq 0$) pro kořeny $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, uvedeného polynomu. Funkce $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ tvoří fundamentální systém dané rovnice a její obecné řešení má tvar

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3.$$

Příklad 64: Podobně při řešení rovnice $x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0$ dostaneme $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ a fundamentální systém rovnice je tvořen funkcemi $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 \ln x$. Obecné řešení má tedy tvar $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$.

Příklad 65: Řešení rovnice $x^2 y'' + 3x y' + 2y = 0$ hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$. Po dosazení do rovnice dostaneme $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$. Do fundamentálního systému tedy patří funkce $y_1(x) = x^{-1+i}$, $y_2(x) = x^{-1-i}$ nebo $y_1(x) = x^{-1} \cos(\ln x)$, $y_2(x) = x^{-1} \sin(\ln x)$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = \frac{C_1}{x} \cos(\ln x) + \frac{C_2}{x} \sin(\ln x).$$

$$66. \quad x^2 y'' - 3x y' - y = 0 \quad \left[y = C_1 x^{2+\sqrt{5}} + C_2 x^{2-\sqrt{5}} \right]$$

$$67. \quad x^3 y''' + x^2 y'' = 0 \quad [y = C_1 + C_2 x + C_3 x \ln x]$$

$$68. \quad x^2 y'' + 5x y' + 3y = 0 \quad [y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-3}]$$

$$69. \quad x^2 y'' + 7x y' + 8y = 0 \quad [y = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-4}]$$

$$70. \quad x^3 y''' - 6y = 0 \quad [y = C_1 x^3 + C_2 \cos(\sqrt{2} \ln x) + C_3 \sin(\sqrt{2} \ln x)]$$

$$71. \quad x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1 \quad [y = x]$$

webMathematica

11.3 Rovnice s konstantními koeficienty

Příklad 72: Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$y'' - y' - 12y = 0$$

hledáme ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$ (popř. $x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$), kde číselný parametr λ je kořenem **charakteristické rovnice (charakteristického polynomu)**

$$\lambda^2 - \lambda + 12 = 0.$$

Tedy $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$, fundamentální systém rovnice je tvořen funkcemi e^{-4x} , e^{3x} a obecné řešení rovnice má tvar

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}.$$

Teorie

Příklad 73: Rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$. Fundamentální systém rovnice je nyní tvořen funkcemi $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = x e^{2x}$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Příklad 74: K rovnici $y'' + 4y = 0$ přísluší charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4 = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Fundamentální systém je tvořen funkcemi $y_1(x) = e^{2ix}$, $y_2(x) = e^{-2ix}$ nebo $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$. Obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

75. $y''' - y'' - y' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$ [$y = e^x(1 + x)$]

76. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$ [$y = 4e^x + 2e^{3x}$]

77. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ [$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$]

78. $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$ [$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6 x)$]

79. $4y'' - 8y' + 5y = 0$ [$y = e^x(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2})$]

80. $y''' - 8y = 0$ [$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x)$]

81. $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$ [$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)e^{-x}$]

82. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ [$y = e^x \sin x$]

83. $y'' - 2y' + 3y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ [$y = e^x(\cos \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x)$]

webMathematica

11.4 Metoda snižování řádu

Pokud známe jedno řešení $y_1(x)$ homogenní rovnice, pak další partikulární řešení hledáme ve tvaru $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$.

Teorie

Příklad 84: Rovnice $(\sin x - \cos x)y'' - 2 \sin x y' + (\cos x + \sin x)y = 0$ má jedno řešení $y_1 = e^x$. Pro druhé řešení $y(x) = e^x z(x)$, platí $y' = e^x(z + z')$, $y'' = e^x(z + 2z' + z'')$ a po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(\sin x - \cos x)e^x(z + 2z' + z'') - 2 \sin x e^x(z + z') + (\cos x + \sin x)e^x z = 0 \Rightarrow$$

$$(\sin x - \cos x)(2z' + z'') - 2 \sin x z' = 0 \Rightarrow (u = z')$$

$$(\sin x - \cos x)u' - \cos x 2u = 0 \Rightarrow (\sin x - \cos x) du = \cos x 2u dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{2u} du = \int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} dx; \quad \text{vypočteme integrál vpravo}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x - \sin x + \cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \sin x - \cos x \\ dv = (\cos x + \sin x) dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int -1 dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{v} dv = -\frac{x}{2} + \ln |\sin x - \cos x| + C;$$

$$\text{tedy} \quad \frac{1}{2} \ln u = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin x - \cos x| + \hat{C} \Rightarrow u = C e^{-x} (\sin x - \cos x) (= z') \Rightarrow$$

$$z = C e^{-x} (-\sin x) \Rightarrow y = e^x C e^{-x} (-\sin x) = -C \sin x \quad \text{a obecné řešení má tvar}$$

$$y = C_1 e^x + C_2 \sin x.$$

Nalezněte obecné řešení následujících rovnic, jestliže znáte partikulární řešení

$$85. (1 - x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4}y = 0; \quad y_1 = \sqrt{1+x} \quad [y = C_1 \sqrt{1+x} + C_2 \sqrt{1-x}]$$

$$86. x^2(x+1)y'' - 2y = 0; \quad y_1 = 1 + \frac{1}{x} \quad [y = C_1(1 + \frac{1}{x}) + C_2(\frac{x}{2} + 1 - \frac{x+1}{x} \ln |x+1|)]$$

$$87. xy'' + 2y' - xy = 0; \quad y_1 = \frac{e^x}{x} \quad [xy = C_1 e^{-x} + C_2 e^x]$$

$$88. y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0; \quad y_1 = \operatorname{tg} x \quad [y = C_1 \operatorname{tg} x + C_2(1 + x \operatorname{tg} x)]$$

$$89. (e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0; \quad y_1 = e^x - 1 \quad [y = C_1(e^x - 1) + \frac{C_2}{e^x + 1}]$$

$$90. x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0 \quad [y = C_1 x + \frac{C_2}{x} + C_3(x \ln |x| + 1)] \\ [y_1 = x, y_2 = \frac{1}{x}]$$

$$91. (x^2 - 2x + 3)y''' - (x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0 \quad [y = C_1 x + C_2 e^x + C_3(x^2 - 1)] \\ [y_1 = x, y_2 = e^x]$$

webMathematica

11.5 Nehomogenní rovnice

Teorie

Příklad 92: Metodou variace konstant vyřešíme rovnici

$$y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}.$$

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice $y'' + 9y = 0$ (viz metoda charakteristické rovnice, příklad (??))

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow y_h(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

2. Partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x) \cos 3x + C_2(x) \sin 3x.$$

Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ splňují soustavu algebraických rovnic:

$$\begin{aligned} C_1' \cos 3x + C_2' \sin 3x &= 0 \Rightarrow 3C_1' \cos 3x \sin 3x + 3C_2' \sin^2 3x = 0, \\ -3C_1' \sin 3x + 3C_2' \cos 3x &= \frac{1}{\sin 3x} \Rightarrow -3C_1' \sin 3x \cos 3x + 3C_2' \cos^2 3x = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}. \end{aligned}$$

Odtud po sečtení rovnic dostaneme $3C_2' = \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{9} \ln |\sin 3x|$ a z první rovnice plyne $C_1' \cos 3x + \frac{\cos 3x}{3} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{x}{3}$. Partikulární řešení má tvar

$$y_p(x) = -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \ln |\sin 3x| \sin 3x.$$

3. Obecným řešením úlohy je funkce

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \ln |\sin 3x| \sin 3x.$$

Řešte rovnice

$$93. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad [y = e^x(x \ln |x| + C_1 x + C_2)]$$

$$94. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1} \quad [y = e^x(C_1 x + C_2 - \ln \sqrt{x^2 + 1} + x \operatorname{arctg} x)]$$

$$95. \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1} \quad [y = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}]$$

$$96. \quad y'' + y + \cot^2 x = 0 \quad [y = 2 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos(x) \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}|]$$

Vyřešte rovnici $y'' - y' = f(x)$, jestliže

$$97. \quad f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad [y = e^x(x + C_1) - (e^x + 1) \ln(e^x + 1) + C_2]$$

$$98. \quad f(x) = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}} \quad [y = \frac{1}{2} e^x (\arcsin(e^x) + e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + C_1) + \frac{1}{3} \sqrt{(1 - e^{2x})^3} + C_2]$$

$$99. \quad f(x) = e^{2x} \cos(e^x) \quad [y = C_1 e^x - \cos(e^x) + C_2]$$

webMathematica

11.6 Metoda odhadu tvaru partikulárního řešení

Teorie

Příklad 100: Pomocí odhadu tvaru partikulárního řešení vyřešíme rovnici

$$y'' - 5y' = (x - 1)^2.$$

1. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, má kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ a homogenní řešení má tvar

$$y_h = C_1 + C_2 e^{5x}.$$

2. Z rovnosti

$$(x - 1)^2 = e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$$

vyplývá $a = 0$, $b = 0$, $n = 2$, $m = 0 \Rightarrow k = 2$, $R_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, kde a_2, a_1, a_0 jsou konstanty. Kritické číslo $a + ib = 0$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, tedy $r = 1$.

Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x(a_2x^2 + a_1x + a_0),$$

potom $y'_p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 + x(2a_2x + a_1) = 3a_2x^2 + 2a_1x + a_0$, $y''_p(x) = 6a_2x + 2a_1$. Po dosazení y'_p, y''_p do dané rovnice dostaneme:

$$\begin{aligned} 6a_2x + 2a_1 - 5(3a_2x^2 + 2a_1x + a_0) &= (x - 1)^2, \\ -15a_2x^2 + (6a_2 - 10a_1)x + 2a_1 - 5a_0 &= x^2 - 2x + 1, \\ \Rightarrow a_2 = \frac{-1}{15}, a_1 = \frac{4}{25}, a_0 = \frac{-17}{125}, \end{aligned}$$

a partikulárním řešením je funkce $y_p(x) = x\left(\frac{-1}{15}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{-17}{125}\right)$.

3. Obecné řešení má tvar $y(x) = C_1 + C_2 xe^{5x} + x\left(\frac{-1}{15}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{-17}{125}\right)$.

Metodou odhadu řešte rovnice

101. $y'' + y = 4xe^x$ $[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2)e^x]$

102. $y'' - y = 2e^x - x^2$ $[y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x + x^2 + 2]$

103. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$ $[y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)e^x]$

104. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ $[y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{\sin x}{10} + \frac{3 \cos x}{10}]$

105. $y'' + y = 4 \sin x$ $[y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x]$

106. $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$ $[y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(\frac{x}{10} - \frac{12}{100}\right) \cos x - \left(\frac{3x}{10} + \frac{34}{100}\right) \sin x]$

$$107. y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x} \quad [y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5} e^{-4x} - (\frac{x}{6} + \frac{1}{36}) e^{-x}]$$

$$108. y'' - 9y = e^{3x} \cos x \quad [y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x} (\frac{6}{37} \sin x - \frac{1}{37} \cos x)]$$

$$109. y'' - 2y' + y = 6xe^x \quad [y = (C_1 + C_2 x + x^3) e^x]$$

$$110. y'' + y = x \sin x \quad [y = (C_1 - \frac{x^2}{4}) \cos x + (C_2 + \frac{x}{4}) \sin x]$$

Řešte rovnice s počáteční podmínkou

$$111. y'' + 9y = 6e^{3x}; y(0) = y'(0) = 0 \quad [y = -\frac{1}{3}(\cos 3x + \sin 3x - e^{3x})]$$

$$112. y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x; y(0) = 2, y'(0) = 3 \quad [y = e^{2x}(\cos x - 2 \sin x) + (x+1)^2 e^x]$$

$$113. y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x; y(0) = y'(0) = 0 \quad [y = (x + \frac{3}{5}) e^{-3x} + \frac{1}{5}(4 \sin x - 3 \cos x)]$$

$$114. y'' + 4y = \sin x; y(0) = y'(0) = 1 \quad [y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\sin 2x + \sin x)]$$

$$115. y'' + y = 2 \cos x; y(0) = 1, y'(0) = 0 \quad [y = \cos x + x \sin x]$$

Odhadněte partikulární řešení následujících rovnic

$$116. y'' - 7y' = (x - 1)^2 \quad [A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x]$$

$$117. y'' + 7x' = e^{-7x} \quad [A x e^{-7x}]$$

$$118. y'' - 8y' + 16y = (10 - x) e^{4x} \quad [(A_1 x^3 + A_2 x^2) e^{4x}]$$

$$119. y'' + 25y = \cos 5x \quad [x(A \cos 5x + B \sin 5x)]$$

$$120. y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x) \quad [(A \cos 2x + B \sin 2x) e^{2x}]$$

$$121. y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x) \quad [x(A \cos 2x + B \sin 2x) e^{2x}]$$

$$122. y^{(4)} - y''' = 4 \quad [A x^3]$$

$$123. y''' + 2y'' + y' = (2x + 1) \sin x + (x^2 - 4x) \cos x \quad \left[\begin{array}{l} (A x^2 + B x + C) \cos x + \\ + (D x^2 + E x + F) \sin x \end{array} \right]$$

$$124. y''' - y' = e^x \sin x + 2x^2 \quad \left[\begin{array}{l} e^x (A \cos x + B \sin x) + \\ + x(C x^2 + D x + E) \end{array} \right]$$

$$125. y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = e^x(x \cos x + \sin x) \quad \left[\begin{array}{l} x^2 e^x \{ (A x + B) \cos x + \\ + (C x + D) \sin x \} \end{array} \right]$$

$$126. y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 3 \cos 2x + 1 \quad \left[\begin{array}{l} x^2 (A \cos 2x + B \sin 2x) + C \\ y = 3 \cos 2x + 1 \end{array} \right]$$

webMathematica

11.7 Okrajové úlohy

Teorie

Příklad 127: Pomocí charakteristické rovnice a dosazením okrajových podmínek vyřešíme smíšenou okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} y'' - 2y' - 8y &= 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) &= 1, & y'(1) = 0. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$ a obecným řešením úlohy je funkce $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$. Z okrajových podmínek dostaneme

$$\left. \begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2, \\ 0 &= 4C_1 e^4 - 2C_2 e^{-2}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{1+2e^6}, \\ C_2 &= \frac{2e^6}{1+2e^6}. \end{aligned}$$

Řešením okrajové úlohy je funkce $y(x) = \frac{1}{1+2e^6} e^{4x} + \frac{2e^6}{1+2e^6} e^{-2x}$.

Řešte následující okrajové úlohy

128. $y'' - y = 0; y(0) = 0, y(2\pi) = 1$ [$y = \frac{\sinh x}{\sinh 2\pi}$]

129. $y'' + y = 0; y(0) = 0, y(2\pi) = 1$ [nemá řešení]

130. $y'' - k^2 y = 0; y(0) = v_1, y(x_0) = v_2$ [$y = \frac{1}{\sinh kx_0} (v_1 \sinh k(x_0 - x) + v_2 \sinh kx)$]

131. $y'' - \alpha^2 y = 0; y(0) = v, y'(x_0) = 0$ [$y = v \frac{\cosh(x_0 - x)}{\cosh \alpha x_0}$]

132. $y'' - \alpha^2 s y = 0; y(0) = \frac{1}{s}, y'(x_0) = 0$ [$s < 0; y = \frac{\cos \alpha \sqrt{-s}(x_0 - x)}{s \cos \alpha \sqrt{-s} x_0}$ pro $x_0 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha \sqrt{-s}}$]
[pro $x_0 = \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha \sqrt{-s}}$ nemá řešení; $s > 0; y = \frac{\cosh \alpha \sqrt{s}(x_0 - x)}{s \cosh \alpha \sqrt{s} x_0}; k = 1, 2, 3, \dots$]

133. $y'' - \lambda^2 y = 0; \lambda \neq 0, y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{\lambda}$ [$y = \frac{\sinh \lambda x}{\lambda \sinh \lambda}$]

134. $y'' - \lambda^2 y = 0; \lambda \neq 0, y(0) = 0, y'(1) = \frac{1}{\lambda}$ [$y = \frac{\sinh \lambda x}{\lambda^2 \cosh \lambda}$]

135. $y'' - \lambda^2 y = 0; \lambda \neq 0, y'(0) = 0, y(1) = \frac{1}{\lambda}$ [$y = \frac{\cosh \lambda x}{\lambda \cosh \lambda}$]

136. $xy'' + y' = 0; y(1) = \alpha y'(1); y(x)$ je omezená pro $x \rightarrow \infty$ [$y = 0$]

137. $y^{(4)} - \lambda^4 y = 0; y(0) = y''(0) = 0, y(\pi) = y''(\pi) = 0$ [$y = C \sin kx$ pro $\lambda = k$]
[$k = 1, 2, 3, \dots$ $y = 0$ pro ostatní λ]

webMathematica

11.8 Úlohy na vlastní čísla a vlastní funkce

Teorie

Příklad 138: Určíme vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = e^{kx}$, potom charakteristická rovnice má tvar $k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda}$.

- Pro $\lambda < 0$ je $k_1 = \sqrt{-\lambda}$, $k_2 = -\sqrt{-\lambda}$ a obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \Rightarrow y'(x) = \sqrt{-\lambda} C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda} C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Z okrajových podmínek dostáváme soustavu rovnic pro neznámé konstanty C_1, C_2

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ 0 &= \sqrt{-\lambda} C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \sqrt{-\lambda} C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}, \end{aligned} \right\} C_1 = 0, C_2 = 0 \Rightarrow y = 0.$$

- Pro $\lambda = 0$ má obecné řešení tvar $y(x) = C_1 + C_2 x \Rightarrow y'(x) = C_2$ a z okrajových podmínek dostaneme

$$C_1 \in \mathbb{R}, C_2 = 0 \Rightarrow y = C_1.$$

- Pro $\lambda > 0$ má obecné řešení tvar

$$y(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x \Rightarrow y'(x) = -\sqrt{\lambda} C_1 \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} C_2 \cos \sqrt{\lambda}x.$$

Z okrajových podmínek plyne

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_2, \\ 0 &= -C_1 \sin \sqrt{\lambda}\pi, \end{aligned} \right\} \sqrt{\lambda}\pi = n\pi, n \in \mathbb{N}.$$

Dostáváme tak **posloupnost vlastních čísel**

$$\{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

a **posloupnost jim odpovídajících vlastních funkcí** je

$$\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}.$$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce úlohy $y'' + \lambda y = 0$, je-li

$$139. x \in \langle 0, \pi \rangle, y(0) = y'(\pi) = 0 \quad \left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2}{4}, y_K = \sin \frac{2K-1}{2}x, K \in \mathbb{N} \right]$$

140. $x \in \langle 0, \pi \rangle, y'(0) = y(\pi) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2}{4}, y_K = \cos \frac{2K-1}{2}x, K \in N \right]$
141. $x \in \langle 1, 2 \rangle, y(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2, y_K = \sin K\pi x, K \in N \right]$
142. $x \in \langle 1, 2 \rangle, y(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4}, y_K = \cos \frac{2K-1}{2}\pi x, K \in N \right]$
143. $x \in \langle 1, 2 \rangle, y'(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4}, y_K = \sin \frac{2k-1}{2}\pi x, K \in N \right]$
144. $x \in \langle 1, 2 \rangle, y'(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2, y_K = \cos K\pi x; K = 0, 1, 2, \dots \right]$
145. $x \in \langle a, b \rangle, y(a) = y(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{(b-a)^2}, y_K = \sin \frac{K\pi(x-a)}{b-a}, K \in N \right]$
146. $x \in \langle a, b \rangle, y(a) = y'(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, y_K = \sin \frac{(2K-1)(x-a)\pi}{2(b-a)}, K \in N \right]$
147. $x \in \langle a, b \rangle, y'(a) = y(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, y_K = \cos \frac{(2K-1)(x-a)\pi}{2(b-a)}, K \in N \right]$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce následujících okrajových úloh

148. $y'' + 2y' + \lambda y = 0; x \in \langle 0, l \rangle, y(0) = y(l) = 0$ $\left[\lambda_K = 1 + \frac{K^2\pi^2}{l^2} \right]$
 $\left[y_K = e^{-x} \sin \frac{K\pi x}{l}, K \in N \right]$
149. $x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0; x \in \langle 1, l \rangle, y(1) = y(l) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{\ln^2 l}, y_K = \sin \frac{K\pi \ln x}{\ln l} \right]$
150. $y'' + (\lambda + 1)y = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2 - 1, K \in N \right]$
 $x \in \langle 0, 1 \rangle, y(0) = y'(0) = 0, y(1) - y'(1) = 0$ $\left[y_K = \sin(\operatorname{arctg}(K\pi) + K\pi x) \right]$
151. $y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0; y(l) = 0, y$ je omezená pro $x \rightarrow 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{l^2}, y_K = \frac{1}{x} \sin \frac{K\pi x}{l} \right]$

12 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Teorie

Příklad 152: Určíme fundamentální matici a obecné řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 + y_2 \\y_2' &= 3y_1 + 4y_2.\end{aligned}$$

Matrice soustavy je

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a její vlastní čísla dostaneme z rovnice

$$\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5.$$

K vlastním číslům určíme vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1: (\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_1 = (1, -1)^T,$$

$$\lambda_2 = 5: (5\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_2 = (1, 3)^T.$$

Fundamentální matice má tedy tvar

$$\mathbb{Y}(x) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5x} \right) = \begin{pmatrix} e^x & e^{5x} \\ -e^x & 3e^{5x} \end{pmatrix}$$

a obecné řešení má tvar

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5x} = C_1 \vec{h}_1 e^x + C_2 \vec{h}_2 e^{5x}.$$

12.1 Soustavy homogenních diferenciálních rovnic

$$153. \begin{aligned}y_1' &= y_1 - y_2 \\y_2' &= y_2 - 4y_1\end{aligned} \quad \begin{aligned}[y_1 &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}] \\[y_2 &= 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}]\end{aligned}$$

$$154. \begin{aligned}y_1' + y_1 - 8y_2 &= 0 \\y_2' - y_1 - y_2 &= 0\end{aligned} \quad \begin{aligned}[y_1 &= 2C_1 e^{3x} - 4C_2 e^{-3x}] \\[y_2 &= C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}]\end{aligned}$$

$$155. \begin{aligned}y_1' &= y_1 + y_2 \\y_2' &= 3y_2 - 2y_1\end{aligned} \quad \begin{aligned}[y_1 &= e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)] \\[y_2 &= e^{2x}\{(C_1 + C_2) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x\}]\end{aligned}$$

156. $y_1' = y_1 - 3y_2$ $[y_1 = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)]$
 $y_2' = 3y_1 + y_2$ $[y_2 = e^x(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x)]$
157. $y_1' + y_1 + 5y_2 = 0$ $[y_1 = (2C_2 - C_1) \cos 2x - (2C_1 + C_2) \sin 2x]$
 $y_2' - y_1 - y_2 = 0$ $[y_2 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x]$
158. $y_1' = 2y_1 + y_2$ $[y_1 = (C_1 + C_2x)e^{3x}]$
 $y_2' = 4y_2 - y_1$ $[y_2 = (C_1 + C_2 + C_2x)e^{3x}]$
159. $y_1' = 3y_1 - y_2$ $[y_1 = (C_1 + C_2x)e^x]$
 $y_2' = 4y_1 - y_2$ $[y_2 = (2C_1 - C_2 + 2C_2x)e^x]$
160. $y_1' = y_1 + y_3 - y_2$ $[y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}]$
 $y_2' = y_1 + y_2 - y_3$ $[y_2 = C_1e^x - 3C_3e^{-x}]$
 $y_3' = 2y_1 - y_2$ $[y_3 = C_1e^x + C_2e^{2x} - 5C_3e^{-x}]$
161. $y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3$ $[y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{5x}]$
 $y_2' = y_1 + y_2 + y_3$ $[y_2 = C_1e^x - 2C_2e^{2x} + C_3e^{5x}]$
 $y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3$ $[y_3 = -C_1e^x - 3C_2e^{2x} + 3C_3e^{5x}]$
162. $y_1' = 4y_2 - 2y_3 - 3y_1$ $[y_1 = C_1e^x + C_3e^{-x}]$
 $y_2' = y_3 + y_1$ $[y_2 = C_1e^x + C_2e^{2x}]$
 $y_3' = 6y_1 - 6y_2 + 5y_3$ $[y_3 = 2C_2e^{2x} - C_3e^{-x}]$
163. $y_1' = y_1 - y_2 - y_3$ $[y_1 = e^x(2C_2 \sin 2x + 2C_3 \cos 2x)]$
 $y_2' = y_1 + y_2$ $[y_2 = e^x(C_1 - C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)]$
 $y_3' = 3y_1 + y_3$ $[y_3 = e^x(-C_1 - 3C_3 \cos 2x + 3C_3 \sin 2x)]$
164. $y_1' = 4y_1 - y_2 - y_3$ $[y_1 = C_1e^{2x} + (C_2 + C_3)e^{3x}]$
 $y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3$ $[y_2 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}]$
 $y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3$ $[y_3 = C_1e^{2x} + C_3e^{3x}]$
165. $y_1' = y_1 - y_2 + y_3$ $[y_1 = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{2x}]$
 $y_2' = y_1 + y_2 - y_3$ $[y_2 = (C_1 - 2C_2 + C_2x)e^x]$
 $y_3' = 2y_3 - y_2$ $[y_3 = (C_1 - C_2 + C_2x)e^x + C_3e^{2x}]$
166. $y_1' = 4y_1 - y_2$ $[y_1 = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{2x}]$
 $y_2' = 3y_1 + y_2 - y_3$ $[y_2 = \{2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)x + 2C_3x^2\}e^{2x}]$
 $y_3' = y_1 + y_3$ $[y_3 = \{C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)x + C_3x^2\}e^{2x}]$

12.2 Soustavy nehomogenních diferenciálních rovnic

Příklad 167: Řešení nehomogenní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 + y_2 + e^x \\y_2' &= 3y_1 + 4y_2.\end{aligned}$$

hledáme metodou **variace konstant**.

- Nejdříve vyřešíme homogenní soustavu (viz příklad ??). Řešení homogenní soustavy má tvar

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5x},$$

kde $\mathbb{Y}(x)$ je fundamentální matice soustavy a \vec{C} je vektor konstant.

- Partikulární řešení dané rovnice hledáme ve tvaru $\vec{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C}(x)$, kde $\vec{C}(x)$ je vektor funkcí. Po dosazení do soustavy dostaneme $\mathbb{Y}'(x)\vec{C}(x) + \mathbb{Y}(x)\vec{C}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)\vec{C}(x) + \vec{b}(x)$. Protože $\mathbb{Y}' = \mathbb{A}\mathbb{Y}$, tak platí

$$C_1'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5x} = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Odtud vyplývá

$$\begin{aligned}C_1' e^x + C_2' e^{5x} &= e^x &\Rightarrow & 4C_2' e^{5x} = e^x &\Rightarrow & C_2 = \frac{-1}{16} e^{-4x} \\-C_1' e^x + 3C_2' e^{5x} &= 0 &\Rightarrow & -4C_1' e^x = -3e^x &\Rightarrow & C_1 = \frac{3}{4} x\end{aligned}$$

a partikulární řešení soustavy má tvar

$$y_p(x) = \frac{3}{4} x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^x$$

- Obecným řešením nehomogenní soustavy je funkce

$$\vec{y}(x) = \vec{y}(x)_h + \vec{y}_p(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5x} + \frac{3}{4} x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^x.$$

$$\begin{aligned}168. \quad y_1' &= y_2 + 2e^x & [y_1 &= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x e^x - x^2 - 2] \\y_2' &= y_1 + x^2 & [y_2 &= C_1 e^x - C_2 e^{-x} + (x-1)e^x - 2x]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}169. \quad y_1' &= y_2 - 5 \cos x & [y_1 &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 2 \sin x - \cos x] \\y_2' &= 2y_1 + y_2 & [y_2 &= 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + \sin x + 3 \cos x]\end{aligned}$$

170. $y_1' = 4y_1 + y_2 - e^{2x}$ $[y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + (x+1)e^{2x}]$
 $y_2' = y_2 - 2y_1$ $[y_2 = -2C_1 e^{2x} - C_2 e^{3x} - 2x e^{2x}]$
171. $y_1' = 2y_2 - y_1 + 1$ $[y_1 = (C_1 + 2C_2 x)e^x - 3]$
 $y_2' = 3y_2 - 2y_1$ $[y_2 = (C_1 + C_2 + 2C_2 x)e^x - 2]$
172. $y_1' = 5y_1 - 3y_2 + 2e^{3x}$ $[y_1 = C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{4x} - e^{-x} - 4e^{3x}]$
 $y_2' = y_1 + y_2 + 5e^{-x}$ $[y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} - 2e^{-x} - 2e^{3x}]$
173. $y_1' = 2y_1 - 4y_2$ $[y_1 = 4C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 4x e^x]$
 $y_2' = y_1 - 3y_2 + 3e^x$ $[y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - (x-1)e^x]$
174. $y_1' = 2y_1 - y_2$ $[y_1 = C_1 e^{3x} + 3x^2 + 2x + C_2]$
 $y_2' = y_2 - 2y_1 + 18x$ $[y_2 = -C_1 e^{3x} + 6x^2 - 2x + 2C_2 - 2]$
175. $y_1' = y_1 + 2y_2 + 16x e^x$ $[y_1 = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - (12x+13)e^x]$
 $y_2' = 2y_1 - 2y_2$ $[y_2 = C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-3x} - (8x+6)e^x]$
176. $y_1' = 2y_1 - y_2$ $[y_1 = (C_1 + C_2 x - x^2)e^x]$
 $y_2' = y_1 + 2e^x$ $[y_2 = \{C_1 - C_2 + (C_2 + 2)x - x^2\}e^x]$
177. $y_1' = y_1 - y_2 + 8x$ $[y_1 = C_1 \cos 2x - C_2 \sin 2x + 2x + 2]$
 $y_2' = 5y_1 - y_2$ $[y_2 = (C_1 + 2C_2) \cos 2x + (2C_1 - C_2) \sin 2x + 10x]$
178. $y_1' = 2y_1 - y_2$ $[y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + e^x(2 \cos x - \sin x)]$
 $y_2' = 2y_2 - y_1 - 5e^x \sin x$ $[y_2 = C_1 e^x - C_2 e^{3x} + e^x(3 \cos x + \sin x)]$
179. $y_1' = y_2 + \operatorname{tg}^2 x - 1$ $[y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \operatorname{tg} x]$
 $y_2' = -y_1 + \operatorname{tg} x$ $[y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2]$
180. $y_1' = -4y_1 - 2y_2 + \frac{2}{e^x - 1}$ $[y_1 = C_1 + 2C_2 e^{-x} + 2e^{-x} \ln |e^x - 1|]$
 $y_2' = 6y_1 + 3y_2 - \frac{3}{e^x - 1}$ $[y_2 = -2C_1 - 3C_2 e^{-x} - 3e^{-x} \ln |e^x - 1|]$
181. $y_1' = y_1 - y_2 + \frac{1}{\cos x}$ $[y_1 = (C_1 + x) \cos x + (C_2 + x) \sin x + (\cos x - \sin x) \ln |\cos x|]$
 $y_2' = 2y_1 - y_2$ $[y_2 = (C_1 - C_2) \cos x + (C_1 + C_2) \sin x + 2 \cos x \ln |\cos x| + 2x \sin x]$
182. $y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3 - x + 2$ $[y_1 = C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x]$
 $y_2' = 1 - y_1$ $[y_2 = x - C_1 e^x + C_2 \cos x - C_3 \sin x]$
 $y_3' = y_1 + y_2 - y_3 - x + 1$ $[y_3 = 1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x]$

Najděte partikulární řešení následujících soustav diferenciálních rovnic

183. $y_2' = y_2 + y_3; y_2(0) = 0, y_3(0) = -1$ $[y_2 = e^{2x} - e^{3x}]$
 $y_3' = -2y_2 + 4y_3$ $[y_3 = e^{2x} - 2e^{3x}]$

184. $y_2' = 3y_2 - y_3; y_2(0) = 1, y_3(0) = 5$ $[y_2 = e^{-2x}]$
 $[y_3 = 5e^{-2x}]$
 $y_3' = 10y_2 - 4y_3$
185. $y_1' = 3y_1 + 8y_2; y_1(0) = 6, y_2(0) = -2$ $[y_1 = 2(2e^x + e^{-x})]$
 $[y_2 = -e^x - e^{-x}]$
 $y_2' = -3y_2 - y_1$
186. $y_1' = e^x - y_2 - 5y_1; y_1(0) = \frac{119}{900}, y_2(0) = \frac{211}{900}$ $[y_1 = \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x}]$
 $[y_2 = \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x}]$
 $y_2' = e^{2x} + y_1 - 3y_2$
187. $y_1' = y_2; y_1(0) = y_2(0) = 1$ $[y_1 = \cos x + \sin x]$
 $[y_2 = \cos x - \sin x]$
 $y_2' = -y_1$
188. $y_1' = 4y_1 - 5y_2; y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$ $[y_1 = (1 - 2x)e^{-2x}]$
 $[y_2 = xe^{-2x}]$
 $y_2' = y_1$
189. $y_1' = y_1 + y_2 + x; y_1(0) = -\frac{7}{9}, y_2(0) = -\frac{5}{9}$ $[y_1 = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{9}]$
 $[y_2 = \frac{1}{3}x - \frac{5}{9}]$
 $y_2' = y_1 - 2y_2 + 2x$
190. $y_1' = y_1 + 5y_2; y_1(0) = -2, y_2(0) = 1$ $[y_1 = (\sin x - 2 \cos x)e^{-x}]$
 $[y_2 = e^{-x} \cos x]$
 $y_2' = -3y_2 - y_1$
191. $2y_1' = 6y_1 - y_2 - 6x^2 - x + 3; y_1(0) = 2, y_2(0) = 3$ $[y_1 = e^{2x} + e^{3x} + x^2 + x]$
 $[y_2 = 2e^{2x} + x + 1]$
 $y_2' = 2y_2 - 2x - 1$

webMathematica

13 Posloupnosti a řady funkcí

13.1 Posloupnosti funkcí

Teorie

Příklad 192: Budeme vyšetřovat konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}$.

Pro bodovou konvergenci platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2(1+\frac{x^2}{n^2})} = 1.$$

Při hledání množiny M , na které posloupnost konverguje stejnoměrně nás zajímá rozdíl $\left| \frac{n^2}{n^2+x^2} - 1 \right| = \left| \frac{n^2-n^2-x^2}{n^2+x^2} \right| = \frac{x^2}{n^2+x^2}$. Zjistíme, kdy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 0.$$

Pokud je M omezená množina, pak $\exists K \forall x \in M : |x| \leq K$ a platí

$$\frac{x^2}{n^2+x^2} \leq \frac{K^2}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 0.$$

Jestliže $M = \mathbb{R}$, pak $\sup_{x \in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 1$.

Daná posloupnost tedy konverguje stejnoměrně na každé omezené množině, na celé reálné ose konverguje bodově.

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{f_n(x)\}$, je-li

193. $f_n(x) = x^n$ [$x \in (-1, 1)$ bodově, $x \in \langle -1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon \rangle$ stejn.]

194. $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}}$ [$D(f_1) = (-1, \infty)$, $x \in (-1, +\infty)$ stejn.]

195. $f_n(x) = x^n + x^{n+1}$ [$x \in \langle -1, 1 \rangle$ bodově, $x \in \langle -1, 1 - \varepsilon \rangle$ stejn.]

196. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ [$x \in (-1, 1)$ bodově, $x \in \langle -1 + \varepsilon, 1 \rangle$ stejn.]

197. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ [$f_n \rightarrow 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, ale $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$]

198. $f_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$ [$x \in \mathbb{R}$ stejn.]

199. $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}$ [$x \in \langle 0, +\infty \rangle$ stejn.]

200. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ [$x \in (-\infty, 1)$ bodově, $x \in (-\infty, 1 - \varepsilon)$ stejn.]

201. $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ [$x \in (-\infty, \infty)$ bodově, $x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup \langle \varepsilon, +\infty \rangle$ stejn.]

202. $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$ [$x \in \langle 0, +\infty \rangle$ bodově i stejn.]

13.2 Funkční řady

Teorie

Příklad 203: Máme najít obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Použijeme odmocninové kritérium a zkoumáme, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $\sqrt[n]{|\ln^n x|} = |\ln x| < 1$, což je splněno pro $\frac{1}{e} < x < e$. Pro $x_1 = \frac{1}{e}$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, která diverguje; podobně pro $x_2 = e$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ opět diverguje. Obor konvergence dané řady je tedy interval $(\frac{1}{e}, e)$.

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, je-li

$$204. f_n(x) = \frac{(-1)^n (1-x)^n}{2n+1} \quad [\langle 0, \infty \rangle]$$

$$205. f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \quad [x \in \mathbb{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle]$$

$$206. f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}} \quad [x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}]$$

$$207. f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^n} \quad [|x| > 1]$$

$$208. f_n(x) = e^{-nx} \quad [x > 0]$$

$$209. f_n(x) = \frac{\cos nx}{e^{nx}} \quad [x > 0]$$

$$210. f_n(x) = (5 - x^2)^n \quad [2 < |x| < \sqrt{6}]$$

$$211. f_n(x) = n^{-\ln x^2} \quad [|x| > \sqrt{e}]$$

$$212. f_n(x) = n^2 e^{-nx^2} \quad [x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}]$$

$$213. f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \quad [|x| < 1]$$

Dokažte stejnoměrnou konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, je-li

$$214. f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2} \quad [x \in \mathbb{R}]$$

$$215. f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+2^n} \quad [x \geq 0]$$

$$216. f_n(x) = \frac{x}{1+n^4 x^2} \quad [x \in \mathbb{R}]$$

$$217. f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \quad [x \in \mathbb{R}]$$

$$218. f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5 x^2} \quad [x \in \mathbb{R}]$$

219. $f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$ $[x \in R]$
220. $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$ $[x \in R]$
221. $f_n(x) = \frac{x^2 \sin(n\sqrt{x})}{1+n^3x^4}$ $[x \geq 0]$
222. $f_n(x) = \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^2}\right)^2$ $[x \geq 0]$
223. $f_n(x) = \frac{\sin(\frac{x}{n}) \sin 2nx}{x^2+4n}$ $[x \in R]$
224. $f_n(x) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$ $[\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2]$
225. $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ $[\varepsilon > 0, x \in [\varepsilon, \infty)]$

webMathematica

13.3 Mocniné řady

Teorie

Příklad 226: Najdeme obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n}$.

Po substituci $y = x^3$ dostaneme mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n y^n$, která má poloměr konvergence $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|5^n|}} = \frac{1}{5}$. Pro $y = -\frac{1}{5}$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, která diverguje; podobně pro $y = \frac{1}{5}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje. Obor konvergence původní řady $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n}$ je tedy interval $(-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}, \frac{1}{\sqrt[3]{5}})$.

Najděte poloměr konvergence řady

$$227. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n \quad \left[\frac{1}{4}\right]$$

$$228. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^{2n} \quad \left[\sqrt{\frac{e}{2}}\right]$$

$$229. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (n^3 + 2) x^{2n} \quad \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

Najděte poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, je-li

$$230. a_n = \frac{1}{n^2} \quad [1]$$

$$231. a_n = \frac{1}{n!} \quad [\infty]$$

$$232. a_n = \frac{(1+i)^n}{n2^n} \quad [\sqrt{2}]$$

$$233. a_n = \alpha^{n^2} (0 < \alpha < 1) \quad [\infty]$$

$$234. a_n = \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} (a, b > 0) \quad \left[\min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)\right]$$

$$235. a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} \quad [1]$$

$$236. a_n = \frac{1}{a^n + b^n} (a, b > 0) \quad [\min(a, b)]$$

$$237. a_n = (-1)^{n-1} \left\{ \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right\}^p \quad [2^p]$$

$$238. a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad [1]$$

$$239. a_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)} \quad [1]$$

Najděte obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, je-li

$$240. a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}, x_0 = 1 \quad [< 0, 2 >]$$

$$241. a_n = \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n, x_0 = -2 \quad [(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})]$$

$$242. a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}, x_0 = 0 \quad [(-1, 1 >]$$

$$243. a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}3^n}, x_0 = 1 \quad [< -2, 4 >]$$

$$244. a_n = \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}}, x_0 = -2 \quad [(-3, -1)]$$

$$245. a_n = \frac{5^n+(-3)^n}{n+1}, x_0 = 0 \quad [< -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} >]$$

$$246. a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}, x_0 = -1 \quad [< -2, 0 >]$$

$$247. a_n = \frac{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}}, x_0 = -3 \quad [< -4, -2 >]$$

$$248. a_n = \sqrt[n]{a} - 1, x_0 = 0, a > 0, a \neq 1 \quad [< -1, 1 >]$$

$$249. a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}}, x_0 = 1 \quad [< 0, 2 >]$$

webMathematica

Najděte rozvoj funkce $f(x)$ v mocninou řadu

$$250. f(x) = e^{-x^2} \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}; x \in R \right]$$

$$251. f(x) = \cos^2 x \quad \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}; x \in R \right]$$

$$252. f(x) = \sin 3x \sin 5x \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} (1 - 2^{4n}) x^{2n}; x \in R \right]$$

$$253. f(x) = \sin^3 x \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3(3^{2n}-1)}{4(2n+1)!} x^{2n+1}; x \in R \right]$$

$$254. f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2} \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{n+2}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$255. f(x) = \frac{5x-4}{x+2} \quad \left[-2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7(-1)^{n-1}}{2^n} x^n; x \in (-2, 2) \right]$$

$$256. f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3} \quad \left[-\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n 3^{n+1}}{3^{n+1}} x^n; x \in (-1, 1) \right]$$

$$257. f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$258. f(x) = \ln \frac{3-2x}{2+3x} \quad \left[\ln \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} \frac{x^n}{n}; x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right]$$

$$259. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$260. f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad \left[1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{(2n)!!} x^{2n}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$261. f(x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$262. f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}} \quad \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1}; x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$263. f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x \quad \left[x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

Najděte rozvoj funkce $f(x)$ v mocninnou řadu

$$264. f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \quad \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

$$265. f(x) = \arcsin x \quad \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

$$266. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x-3} \quad \left[-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in \langle -3, -3 \rangle \right]$$

$$267. f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} \right\}; |x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]$$

$$268. f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \quad \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{2\pi(n+1)}{3} x^n; x \in (-1, 1) \right]$$

$$269. f(x) = \frac{x \cos \alpha - x^2}{1-2x \cos \alpha + x^2} \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha; x \in (-1, 1) \right]$$

$$270. f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$271. f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

$$272. f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad \left[1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

$$273. f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n; x \in (-1, 1) \right]$$

$$274. f(x) = \frac{e^x}{1-x} \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^n; x \in (-1, 1) \right]$$

$$275. f(x) = \operatorname{arctg}^2 x \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) \frac{x^{2n}}{n}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

$$276. f(x) = e^x \sin x \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin(\frac{n\pi}{4})}{n!} x^n; x \in R \right]$$

$$277. f(x) = e^x \cos x \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos(\frac{n\pi}{4})}{n!} x^n; x \in R \right]$$

$$278. f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n}; |x| \leq 1 \right]$$

Pomocí rozvoje v mocninnou řadu vypočtěte integrály

$$279. \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}; x \in R \right]$$

$$280. \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}; x \in R \right]$$

$$281. \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \quad \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! x^{4n+1}}{(2n)!!(4n+1)}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$282. \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} \quad \left[\frac{x^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!! x^{2n+3}}{(2n)!!(2n+3)}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

webMathematica

14 Fourierovy řady

Teorie

Příklad 283: Stanovíme Fourierovu řadu funkce $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{pro } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$ podle základního trigonometrického systému, tj. ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Vypočteme koeficienty a_k, b_k :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, d\xi = 1, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos k\xi \, d\xi = \frac{1}{k} [\sin k\xi]_0^{\pi}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin k\xi \, d\xi = -\frac{1}{k} [\cos k\xi]_0^{\pi} = -\frac{1}{k} [(-1)^k - 1], \quad k = 1, 2, \dots$$

Výsledek píšeme ve tvaru:

$$s(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$, je-li

284. $f(x) = |x|$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left[\frac{\pi}{2} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}; \frac{\pi^2}{8} \right]$

285. $f(x) = \pi^2 - x^2$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$
 $\left[\frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx; \frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^2}{12} \right]$

286. $f(x) = \operatorname{sign} x$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}; \frac{\pi}{4} \right]$

287. $f(x) = \sin ax \quad a \notin \mathbb{Z}$ $\left[\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{n^2 - a^2} \right]$

288. $f(x) = \cos ax \quad a \notin \mathbb{Z}$ $\left[\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 - n^2} \right\} \right]$

289. $f(x) = e^{ax} \quad a \neq 0$ $\left[\frac{2}{\pi} \sinh a\pi \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} (a \cos nx - n \sin nx) \right\} \right]$

$$290. f(x) = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad |q| < 1 \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx; \text{zaved'te } e^{ix} = z \right]$$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$, je-li

$$291. f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0, 2\pi) \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \right]$$

$$292. f(x) = x, x \in (a, a + 2l) \quad \left[a + l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}) \right]$$

$$293. f(x) = x^2, x \in (0, 2\pi) \quad \left[\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \right]$$

$$294. f(x) = e^{ax}, x \in (-h, h) \quad \left[2 \sinh ah \left\{ \frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos(\frac{n\pi x}{h}) - n \sin(\frac{n\pi x}{h})}{(ah)^2 + (\pi n)^2} \right\} \right]$$

$$295. f(x) = x \cos x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad \left[\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2 - 1)^2} \sin 2nx \right]$$

$$296. f(x) = e^x - 1, x \in (0, 2\pi) \quad \left[\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{n \sin nx}{1+n^2} \right) \right\} - 1 \right]$$

Najděte Fourierovu řadu funkcí $f_n(x) = \sin^n x$ a $g_n(x) = \cos^n x$ pro $n = 2, 3, 4, 5$.

$$297. f_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \quad [g_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x]$$

$$298. f_3(x) = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \quad [g_3(x) = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x]$$

$$299. f_4(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \quad [g_4(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x]$$

$$300. f_5(x) = -\frac{5}{8} \sin x + \frac{5}{16} \sin 3x - \frac{1}{16} \sin 5x \quad [g_5(x) = \frac{5}{8} \cos x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 5x]$$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$, je-li

$$301. f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, x \in (0, \pi) \text{ (kosinová řada)} \quad \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \right]$$

$$302. f(x) = x^2, x \in (0, \pi) \text{ (sinová řada)} \quad \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^2} [(-1)^n - 1] \right\} \sin nx \right]$$

$$303. f(x) = \sin ax, a \in Z, x \in (0, \pi) \text{ (kosinová řada)} \quad \left[\frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{a^2 - (2n+1)^2} \text{ pro } a \text{ sudé} \right]$$

$$\left[\frac{4a}{\pi} \left\{ \frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{a^2 - 4n^2} \right\} \text{ pro } a \text{ liché} \right]$$

$$304. f(x) = \cos ax, a \in Z, x \in (0, \pi) \text{ (sinová řada)} \left[\begin{array}{l} -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{a^2-(2n+1)^2} \text{ pro } a \text{ sudé} \\ -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{a^2-4n^2} \text{ pro } a \text{ liché} \end{array} \right]$$

$$305. f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right), x \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ podle soustavy} \left[\begin{array}{l} \{\cos(2n-1)x\}, n \in N \quad \left[-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left\{ 1 + \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi} \right\} \cos(2n-1)x \right] \\ \{\sin(2n-1)x\}, n \in N \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{(2n-1)^3} \right\} \sin(2n-1)x \right] \end{array} \right]$$

Integrací Fourierova rozvoje funkce $f(x) = x$ najděte rozvoj funkcí x^2, x^3, x^4, x^5 pro $x \in (-\pi, \pi)$

$$306. f(x) = x \quad \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \right]$$

$$307. f(x) = x^2 \quad \left[\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} (-1)^n \right]$$

$$308. f(x) = x^3 \quad \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^3} \sin nx \right]$$

$$309. f(x) = x^4 \quad \left[\frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{6-\pi^2 n^2}{n^4} \cos nx \right]$$

$$310. f(x) = x^5 \quad \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{120-20\pi^2 n^2 + \pi^4 n^4}{n^5} \sin nx \right]$$

webMathematica

15 Limity, derivace a diferenciál funkcí více reálných proměnných

Teorie

Příklad 311: Je dána funkce f předpisem $f(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, $f(0, 0) = 0$ a body $M = [3, 4]$, $Q = [2, 1]$.

- Rozhodněte o spojitosti funkce f .
- Stanovte diferenciál funkce f v bodě M .
- Stanovte derivaci funkce f v bodě M ve směru vektoru $\vec{v} = (1, -1)^T$.
- Stanovte směr a velikost největšího spádu funkce f v bodě Q .

Řešení:

- Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}^2 \setminus [0, 0]$ (polynomy jsou spojitě funkce na \mathbb{R}^2). Musíme rozhodnout pouze o spojitosti v bodě $[0, 0]$, tzn. ověříme zda platí

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0.$$

Přechodem k polárním souřadnicím $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ dostaneme

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x+y}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi)}} \frac{r(\cos \varphi + \sin \varphi)}{r^2}. \text{ Poslední limita závisí na volbě úhlu } \varphi,$$

tedy neexistuje a daná funkce není spojitá.

- Pro parciální derivace funkce f platí $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-(x+y)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2-2yx}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-(x+y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2-2yx}{(x^2+y^2)^2}$. V bodě $M = [3, 4]$ je $\frac{\partial f}{\partial x}(M) = \frac{-17}{625}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-31}{625}$ a diferenciál funkce f v bodě M je $df(M, h) = \frac{-17}{625} dx + \frac{-31}{625} dy$.

- Derivaci funkce f v bodě M ve směru vektoru $\vec{v} = (1, -1)^T$ vypočítáme pomocí vztahu $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M) = \text{grad } f(M) \cdot \vec{v} = \left(\frac{-17}{625}, \frac{-31}{625}\right) \cdot (1, -1)^T = \frac{14}{625}$.

- Směr největšího spádu funkce f v bodě Q je dán vektorem $-\text{grad } f(Q) = \left(\frac{-7}{25}, \frac{-1}{25}\right)$, jeho velikost je $\|\vec{v}\| = \frac{1}{25}\sqrt{50}$.

Příklad 312: Spočítejte derivaci funkce $f = \frac{x^3+xy^2}{y^2}$, $f(0, 0) = 0$ v bodě $[0, 0]$ ve směru vektoru $\vec{v} = (1, 1)^T$.

Z definice dostaneme $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f([0,0]+t(1,1))-f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3+tt^2}{t^2}-0}{t} = 2$.

Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f([0,0]+t(1,0))-f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3+t \cdot 0}{0}-0}{t}$ neexistuje.

Rozhodněte o spojitosti fce f v bodě $[0, 0]$:

$$313. f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{xy}, f(0, 0) = 0 \quad [\text{není spojitá}]$$

$$314. f(x, y) = \frac{x^2+\sin y^2}{y}, f(0, 0) = 0 \quad [\text{není spojitá}]$$

$$315. f(x, y) = \frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}, f(0, 0) = 0 \quad [\text{je spojitá}]$$

$$316. f(x, y) = (1 + \sin(x - y))^{\ln|x-y|}, f(0, 0) = 1 \quad [\text{je spojitá}]$$

Rozhodněte, zda fce f v bodě $[0, 0]$ a ve směru $(1, 1)$ roste nebo klesá

$$317. f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin x, \quad [\text{fce roste}]$$

$$318. f(x, y) = -\operatorname{tg} y e^x, \quad [\text{fce klesá}]$$

$$319. f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{e^y}, \quad [\text{fce je konstantní}]$$

$$320. f(x, y) = -\ln|y + x + 1| \cos x, \quad [\text{fce klesá}]$$

Najděte diferenciál funkce f v bodech $[0, 0]$ a $[1, 1]$

$$321. f(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, f(0, 0) = 0 \quad \left[df = 0 dx + 0 dy, df = \frac{1}{2\sqrt{2}} dx + \frac{3}{2\sqrt{2}} dy \right]$$

$$322. f(x, y) = (y + 2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}, f(0, 0) = 0 \quad [df = \pi dx + 0 dy, \text{neexistuje}]$$

webMathematica

16 Řešení funkcionálních rovnic, tečná rovina

Teorie

Příklad 323: Je dána funkce F předpisem $F(x, y) = x^2y^3 + 2x - 3y$ a body $A = [3, -1]$, $B = [1, 1]$.

- Pomocí věty o implicitní funkci zjistěte, jestli existuje jediné, spojitě řešení y rovnice $F(x, y) = 0$ na okolí bodů A, B . Případně určete derivaci y' v příslušném bodě.
 - Stanovte vektor normály a tečnou rovinu ke grafu funkce F v bodě grafu $C = [2, 1, ?]$.
 - Stanovte tečnu k hladině funkce F procházející bodem $D = [1, 0]$.
- a) Ověříme předpoklady věty o implicitní funkci:

- Funkce $F(x, y) = x^2y^3 + 2x - 3y$ je spojitá na \mathbb{R}^2 , proto i spojitá na okolí bodů A, B .
- Rovnosti $F(A) = 0$, $F(B) = 0$ jsou splněny.
- Parciální derivace $F_y = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 3x^2y^2 - 3$ je spojitá na \mathbb{R}^2 a platí $F_y(A) = 24 \neq 0$, $F_y(B) = 0$.

Na okolí bodů A tedy existuje jediné, spojitě řešení y rovnice $F(x, y) = 0$; derivace řešení je $y'(3) = -\frac{F_x(A)}{F_y(A)} = -\frac{2xy^3+2}{3x^2y^2-3} \Big|_{([3,-1])} = -\frac{-4}{24} = \frac{1}{6}$.

O řešení rovnice $F(x, y) = 0$ na okolí bodu B nemůžeme na základě věty o implicitní funkci nic říci.

- Vektor normály \vec{n} ke grafu funkce $F(x, y) = x^2y^3 + 2x - 3y$ v bodě grafu $C = [2, 1, F(2, 1)] = [2, 1, 5]$ je $\vec{n} = (F_x(2, 1), F_y(2, 1), -1) = (6, 9, -1)$ a tečná rovina je dána rovnicí $z - 5 = 6(x - 2) + 9(y - 1)$.
- Tečna k hladině funkce F procházející bodem $D = [1, 0]$ je dána rovnicí $0 = F_x(D)(x - 1) + F_y(D)(y - 0) \Rightarrow 0 = 2(x - 1) - 3y$.

Pomocí věty o implicitní funkci zjistěte, jestli existuje jediné, spojitě řešení y rovnice $F(x, y) = 0$ na okolí bodů A, B, C . Případně určete derivaci y' v příslušném bodě.

324. $F(x, y) = -\frac{2}{3}x^2 + y^2 - xy - 2x - 3y$, $A = [0, 3]$, $B = [1, -1]$, $C = [-3, 0]$.
[$A : y'(0) = \frac{5}{3}$, $B : \text{Neex.}$, $C : \text{Neex.}$]

325. $F(x, y) = x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13$, $A = [-1, -2]$, $B = [1, -1]$, $C = [1, 0]$.
 $[A : Neex, B : y'(0) = 0, C : Neex.]$

326. Určete parciální derivace prvního řádu funkce $z = z(x, y)$ implicitně definované rovnicí $z^3 - 3xyz - 8 = 0$ v bodě $A = [0, 3]$. $[A : z_x = \frac{3}{2}, z_y = 0,]$

327. Ke grafu funkce f najděte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou ρ .
 $f(x, y) = x^2 + y^2 - x$, $\rho : 3x + 2y - z = 0$.
 $[3(x - 2) + 2(y - 1) - (z - 3) = 0]$

328. K nulové hladině funkce f najděte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou ρ .
 $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, $\rho : x + 4y + 6z = 0$.
 $[(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 2) = 0, (x + 1) + 4(y + 2) + 6(z + 2) = 0]$

webMathematica

17 Extrémy funkcí více proměnných

17.1 Optimalizační úlohy bez vazeb

Příklad 329: Najdeme extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.
 Stacionární bod vypočteme ze soustavy

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ -x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow [x_0, y_0] = [1, 0].$$

Hessova matice funkce f má tvar $\mathbb{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Potom

Stac. bod	\mathbb{H}	Hlavní minory \mathbb{H}	vlastní čísla \mathbb{H}	Typ bodu
[1, 0]	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$M_1 = 2 > 0$ $M_2 = 5 > 0$	$\lambda_1 = 1 > 0$ $\lambda_2 = 3 > 0$	bod minima

Příklad 330: Najdeme extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2$.
 Stacionární bod vypočteme ze soustavy

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0) \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 6x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow [x_0, y_0] = [0, 0].$$

Hessova matice funkce f má tvar $\mathbb{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Potom

Stac. bod	\mathbb{H}	Hlavní minory \mathbb{H}	vlastní čísla \mathbb{H}	Typ bodu
[0, 0]	$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	$M_1 = 2 > 0$ $M_2 = -28 < 0$	$\lambda_1 = 3 + \sqrt{37} > 0$ $\lambda_2 = 3 - \sqrt{37} < 0$	sedlový bod

Najděte lokální extrémy funkce f

331. $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ [[1, 1], [-1, -1] min, [0, 0] sedlo]

332. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$ [[1, 2] min]

333. $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ [[-1, -2, 3] min]

334. $f(x, y) = xy + z(a - x - 2y - 3z)$ [[$\frac{a}{5}, \frac{a}{10}, \frac{a}{10}$] sedlo]

335. $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ [[0, ±1], [±1, 0] sedla, [$\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}$],
 $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ min, [$-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}$], [$\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}$] max]

17.2 Optimalizační úlohy s vazbami

Teorie

Příklad 336: Stanovte extrém funkce $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ na přípustné množině V určené podmínkou $h(x, y) = x + y = 0$.

Vázané extrémy budeme nejdříve hledat pomocí Lagrangeovy funkce

$$L(x, y, \lambda) = x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 + \lambda(x + y).$$

Najdeme její stacionární body

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 3x^2 + y^2 + 10x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2xy + 2y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 0, y_1 = 0, \lambda_1 = 0 \\ x_2 &= -2, y_2 = 2, \lambda_2 = 4 \end{aligned}$$

Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce je

$$d^2L = d^2f + \lambda d^2h = (6x + 10) dx^2 + 4y dx dy + (2x + 2) dy^2$$

a po dosazení vazební podmínky

$$dh = dx + dy = 0$$

dostaneme

$$d^2L = (8x - 4y + 12) dx^2.$$

V bodě $[0, 0, 0]$ je $d^2L = 12 dx^2 > 0$, tedy bod $[0, 0]$ je bodem minima funkce f vzhledem k množině V ,

v bodě $[-2, 2, 4]$ je $d^2L = -12 dx^2 < 0$, tedy bod $[-2, 2]$ je bodem maxima funkce f vzhledem k množině V .

Tento příklad lze také řešit přechodem k jedné proměnné.

Z vazby $x + y = 0$ plyne $y = -x$ a po dosazení do původní funkce dostaneme

$$f(x, y) = f(x) = x^3 + x^3 + 5x^2 + x^2 = 2x^3 + 6x^2.$$

Pro tuto funkci je $f'(x) = 6x^2 + 12x$ a stacionární body jsou $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Druhá derivace má tvar $f''(x) = 12x + 12$ a $f''(0) = 12 > 0 \Rightarrow$ v bodě $[0, 0]$ je minimum funkce f vzhledem k množině V , podobně $f''(-2) = -12 < 0 \Rightarrow$ v bodě $[-2, 2]$ je maximum funkce f vzhledem k množině V .

Nyní budeme hledat extrém stejné funkce $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ na přípustné množině \widehat{V} určené podmínkou $g(x, y) = x + y \leq 0$. Kromě extrému na

hranici množiny $\partial\widehat{V}$ ($\partial\widehat{V} = V$), teď hledáme i extrémy uvnitř množiny V (zde $g(x, y) < 0$). Tedy $\text{grad } f = \vec{0}$, neboli

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} x_1 = 0, y_1 = 0, & x_4 = -1, y_4 = -\sqrt{7}, \\ x_3 = -\frac{10}{3}, y_3 = 0, & x_5 = -1, y_5 = \sqrt{7}. \end{array}$$

Pouze body $[0, 0]$, $[-\frac{10}{3}, 0]$, $[-1, -\sqrt{7}]$ patří do množiny \widehat{V} a pro druhý diferenciál funkce f v těchto bodech platí

$$d^2f([0, 0]; \vec{h}) = (6x + 10) dx^2 + 4y dx dy + (2x + 2) dy^2|_{[0,0]} = 12 dy^2 > 0,$$

$$d^2f([-\frac{10}{3}, 0]; \vec{h}) = -\frac{44}{3} dx^2 < 0, \quad d^2f([-1, -\sqrt{7}]; \vec{h}) = 4 dx^2 - 4\sqrt{7} dx dy.$$

Bod $[0, 0]$ je bodem minima funkce f vzhledem k \mathbb{R}^2 , tedy i vzhledem k množině \widehat{V} , podobně bod $[-\frac{10}{3}, 0]$ je bodem maxima funkce f vzhledem k množině \widehat{V} .

V bodě $[-1, -\sqrt{7}]$ ve směru $(dx, dy) = (1, 0)$ je $d^2f = 4 > 0$ a funkce f má v tomto směru minimum, ale ve směru $(dx, dy) = (1, 1)$ je $d^2f = 4 - 4\sqrt{7} < 0$ a f má v tomto směru maximum. Bod $[-1, -\sqrt{7}]$ je tedy sedlovým bodem funkce f .

Zbývá rozhodnout bod $[-2, 2] \in \partial\widehat{V}$, pro který je $\lambda = 4 > 0 \Rightarrow \text{grad } f(-2, 2) = -4 \text{grad } g(-2, 2)$, (gradient funkce f směřuje do množiny \widehat{V}) a funkce f může nabývat pouze minima vzhledem k \widehat{V} , ale vzhledem k hranici $\partial\widehat{V}$ nabývá maxima. Proto v bodě $[-2, 2]$ není extrém funkce f vzhledem k množině \widehat{V} .

Příklad 337: Stanovte extrém funkce $f(x, y, z) = xy + yz$ na přípustné množině V určené podmínkami $h_1(x, y, z) = y + z - 2 = 0$, $h_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Vázané extrémy budeme hledat pomocí Lagrangeovy funkce

$$L(x, y, \lambda) = xy + yz + \lambda_1(y + z - 2) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 2).$$

Najdeme její stacionární body

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda_2 x = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-y}{2x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x + z + 2\lambda_2 y + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = y + \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x + z + 2\left(\frac{-y}{2x}\right)y - y = 0 \\ x^2 + zx - y^2 - yx = 0 \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = z + y - 2 = 0 \Rightarrow z = 2 - y \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x^2 + y^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 - y^2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 + (2 - y)x - y^2 - yx = 0 \\ 2 - y^2 + (2 - y)x - y^2 - yx = 0 \end{array}$$

Odtud $2(1 - y^2) + (2 - 2y)x = 0 \Rightarrow (1 - y)(1 + y + x) = 0$ a protože $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, tak jediný stacionární bod je $B = [1, 1, 1]$ a $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce je

$$d^2L = 2\lambda_2 dx^2 + 2 dx dy + 2\lambda_2 dy^2 + 2 dy dz$$

a po dosazení vazebních podmínek v bodě $B = [1, 1, 1]$

$$dh_1 = dz + dy = 0 \Rightarrow dz = -dy, \quad dh_2 = 2x dx + 2y dy = 0 \Rightarrow dx = -dy$$

dostaneme pro $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$$d^2L = (-4 - 2 - 4 - 2) dy^2 < 0 \quad \text{pro} \quad dx = dz = -dy \neq 0.$$

Tedy bod $[1, 1, 1]$ je bodem maxima funkce f vzhledem k množině V .

Najděte lokální extrémů funkce f vzhledem k množině V

338. $f(x, y) = 2x^2 + xy$, $V : 3x + 2y - 2 = 0$, $[-1, \frac{5}{2}]$ min

339. $f(x, y) = 2x^2 + xy$, $V : -3x - 2y + 2 \leq 0$,
[nemá extrém vzhledem k V]

340. $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$, $V : 4x^2 + y^2 = 25$,
 $[\frac{3}{2}, 4], [-\frac{3}{2}, -4]$ max, $[2, -3], [-2, 3]$ min

341. $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$, $V : 4x^2 + y^2 \leq 25$,
 $[\frac{3}{2}, 4], [-\frac{3}{2}, -4]$ max, $[2, -3], [-2, 3]$ min

342. $f(x, y) = x - 2y + 2z$, $V : x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
 $[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ max, $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$ min

Najděte min. a max. hodnoty funkce f vzhledem k množině V

343. $f(x, y) = x + y + z$, $V : x^2 + y^2 \leq z \leq 1$, $[-\frac{1}{2}]$ min, $1 + \sqrt{2}$ max

344. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$, [0 min, 300 max]

webMathematica

18 Vícenásobné integrály

Teorie

18.1 Dvojné integrály

Příklad 345: Máme množinu $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, 4y \geq x, y \leq 3\}$.
Vypočtěte

$$I = \iint_M \frac{y^2}{x^2} dx dy.$$

Průsečík funkcí $y = \frac{x}{4}$, $y = \frac{1}{x}$ je bod $[2, \frac{1}{2}]$, tedy $\frac{1}{2} \leq y \leq 3$ a pro x platí $4y \geq x \geq \frac{1}{y}$.
Tudíž

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^3 \int_{\frac{1}{y}}^{4y} \frac{y^2}{x^2} dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^3 \left[-\frac{y^2}{x} \right]_{\frac{1}{y}}^{4y} dy = \int_{\frac{1}{2}}^3 \left[-\frac{y}{4} + y^3 \right] dy = \left[-\frac{y^2}{8} + \frac{y^4}{4} \right]_{\frac{1}{2}}^3 = \frac{1225}{64}.$$

$$346. \iint_{y^2 \leq x \leq y+2} y e^x dx dy \quad \left[\frac{1}{2}e^4 + \frac{5}{2}e \right]$$

$$347. \iint_{x^2 \leq y \leq \sqrt{16-x^2}} \frac{x}{(1+y)^2} dx dy \quad [0]$$

$$348. \iint_{1 \leq x^2 \leq y^2 \leq 4} |x y| dx dy \quad \left[\frac{15}{2} \right]$$

$$349. \iint_M \frac{1}{x+y+1} dx dy, \quad \text{kde } M \text{ je trojúhelník s vrcholy } [1, 2], [5, 2], [4, 4] \\ \left[\frac{72}{5} \ln 9 + 8 \ln 16 \right]$$

$$350. \iint_M |x| dx dy, \quad \text{kde } M \text{ je dána nerovnostmi } x^2 \leq y, 4x^2 + y^2 \leq 12 \\ [36\sqrt{3} - 14]$$

$$351. \iint_M [2x + y - 1] dx dy, \quad \text{kde } M \text{ je dána nerovnostmi } 2x \geq y \geq x, x \leq 1 \\ \left[\frac{2}{3} \right]$$

$$352. \iint_M \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy, \\ \text{kde } M \text{ je dána nerovnostmi } x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \quad \left[\frac{\pi}{6} \right]$$

18.2 Trojné integrály

Příklad 353: Máme množinu $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Vypočítejte objem tělesa M , tj. integrál

$$I = \iiint_M 1 \, dx dy dz.$$

Přechodem k cylindrickým souřadnicím $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$ dostaneme $r^2 \leq 1, z^2 \leq 4 - r^2, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $dx dy = r dr d\varphi$, tedy

$$\begin{aligned} I &= \iiint_M 1 \, dz dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\sqrt{4-r^2} \, r \, dr d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_4^3 -\sqrt{u} \, du d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_3^4 d\varphi = \frac{4}{3} \pi (8 - \sqrt{27}). \end{aligned}$$

354. $\iiint_V 1 \, dx dy dz$,
kde V je dána nerovnostmi $x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ [$\pi \frac{4}{3}$]

355. $\iiint_V \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2} \, dx dy dz$,
kde V je dána nerovnostmi $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2, 0 \leq x, 0 \leq y$ [$-\frac{1}{60} + \frac{1}{16} \ln 5$]

356. $\iiint_V x^2 y z^3 \, dx dy dz$,
kde V je dána nerovnostmi $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy$ [$\frac{1}{312}$]

357. $\iiint_V \frac{x+y}{4+z} \, dx dy dz$,
kde V je dána nerovnostmi $x + y \leq 3, 0 \leq y, 0 \leq x, 0 \leq z \leq 4$ [$9 \ln 2$]

358. $\iiint_V \frac{xy}{(4+z)^2} \, dx dy dz$,
kde V je dána nerovnostmi $x^2 + y^2 \leq 4z \leq 16$ [0]

359. $\iiint_V x^2 y z \, dx dy dz$,
kde V je dána nerovnostmi $4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0$ [$-\frac{1}{2^3} \frac{1}{105}$]

webMathematica