

# Sbírka příkladů z matematické analýzy III

Petr Tomiczek

# Obsah

<b>1</b>	<b>Vektorový a afinní prostor</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Křivky</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Křivkové integrály</b>	<b>5</b>
3.1	Křivkové integrály 1. druhu . . . . .	5
3.2	Křivkové integrály 2. druhu . . . . .	6
3.3	Greenova věta . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Operátory skalárních a vektorových polí</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>Plochy</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Plošné integrály, Gaussova věta, Stokesova věta</b>	<b>9</b>
6.1	Plošné integrály 1.druhu . . . . .	9
6.2	Plošné integrály 2.druhu . . . . .	11
6.3	Gaussova věta . . . . .	13
6.4	Stokesova věta . . . . .	14
<b>7</b>	<b>Nezávislost na cestě</b>	<b>15</b>
<b>8</b>	<b>Tenzory</b>	<b>17</b>
8.1	Sdružené báze . . . . .	17

# 1 Vektorový a afinní prostor

Příklad 1: Dokažte, že ve vektorovém prostoru  $(V, +, \cdot)$  existuje ke každému  $u \in V$  právě jeden inverzní prvek  $\hat{u}$ .

Řešení: Nechť  $\hat{u}_1, \hat{u}_2$  jsou dva inverzní prvky k  $u$ , pak

$$\hat{u}_1 = \hat{u}_1 + o = \hat{u}_1 + (u + \hat{u}_2) = (\hat{u}_1 + u) + \hat{u}_2 = o + \hat{u}_2 = \hat{u}_2.$$

Teorie

Nechť  $(V, +, \cdot)$  je vektorový prostor, pak

2. ve  $V$  existuje právě jeden neutrální (nulový) prvek  $o$ .
3. jestliže  $u, v, w \in V$  a  $u + v = u + w$ , pak  $v = w$ .
4. platí  $(-1) \cdot u = (-u)$ , tedy opačný prvek dostaneme vynásobením původního prvku číslem  $-1$ .
5. jestliže  $u + v = w$ , pak  $u = w + (-v)$ .
6. jestliže  $a \cdot u = o$ , pak  $u = o$  nebo  $a = 0$ .

Nechť  $(V, +, \cdot)$  je vektorový prostor se skalárním součinem  $(\cdot, \cdot)$ , pak

7. dokažte, že  $(u, av + bw) = \bar{a}(u, v) + \bar{b}(u, w) \quad \forall u, v, w \in V, \forall a, b \in \mathbb{R}$ .
8. ukažte, kdy nastane rovnost ve Schwarzově nerovnosti.
9. ověřte vlastnosti normy dané předpisem  $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ .
10. Dokažte, že velikost plochy rovnoběžníka určeného dvěma vektory je rovna velikosti vektorového součinu těchto vektorů.

Příklad 11: V  $\mathbb{E}_3$  máme dány přímky

$$\begin{array}{ll} p_1 : x = 2 - 1t & p_2 : x = 2 + 1s \\ y = -1 + 3t & y = -1 + 3s \\ z = 2t & z = -2s \end{array} \quad \text{a bod } A[3, 8, -2],$$

který leží v rovině přímek  $p_1, p_2$ . Určete obsah rovnoběžníka daného bodem  $A$  a přímkami  $p_1, p_2$ .

*Řešení:* Řešením soustavy

$$\begin{aligned}2 - 1t + 1s &= 3 \\ -1 + 3t + 3s &= 8 \\ 2t - 2s &= -2\end{aligned}$$

dostaneme  $t = 1$ ,  $s = 2$ , tedy vektory  $\vec{u} = (-1, 3, 2)$ ,  $\vec{v} = (2, 6, -4)$  tvoří strany hledaného rovnoběžníka. Jeho obsah se rovná  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|(-24, 0, -12)\| = 12\sqrt{5}$ .

12. Máme přímky  $p_1 : A[1, -3, 2] + t(-1, 2, 1)$ ,  $p_2 : A[1, -3, 2] + s(1, 2, -1)$  a bod  $B[1, 1, 2]$ . Určete plochu rovnoběžníka určeného přímkami  $p_1, p_2$  a bodem  $B$ . [4\sqrt{2}]

## 2 Křivky

Příklad 13: Rozhodněte, zda křivka parametrizovaná pomocí vektorové funkce  $\vec{r} = (2t^3 + 3t^2 - 12t, t^4 - 4t, 0)$ ,  $t \in [-2, 2]$  je regulární.

*Řešení:* Pro normu derivace vektorové funkce dostaneme

$$\|\vec{r}'\| = \sqrt{(6t^2 + 6t - 12)^2 + (4t^3 - 4)^2} = \sqrt{(t-1)^2[36(t+2)^2 + 16(t^2+t+1)^2]}.$$

Odtud pro  $t = 1$  je  $\|\vec{r}'\| = 0$  a daná křivka tudíž není regulární.

Teorie

Příklad 14: Vypočítejte délku křivky  $\vec{r}(t) = (t, \arcsin t, \frac{1}{4} \ln \frac{1-t}{1+t})$ ,  $t \in [0, \frac{1}{2}]$  a najděte tečnu v bodě  $B[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{4} \ln \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}]$ .

*Řešení:* Pro délku  $d$  křivky platí

$$d = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{16} \frac{4}{(1-t^2)^2}} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2(1-t^2) + 1}{2(1-t^2)} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln 3.$$

Tečna má tvar:  $\vec{y}(\tau) = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{4} \ln \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}] + (1, \sqrt{2}, -1)\tau$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ .

15. Popište parametricky úsečku spojující body  $A[1, 5, 2]$  a  $B[3, 2, 6]$ .
16. Rozhodněte, zda obrazem vektorové funkce  $\vec{r}(t) = (1, t^2, t^2)$ ,  $t \in [-2, 2]$  je regulární jednoduchá křivka.
17. Popište rozdíl mezi křivkami  $\vec{r}_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$  a  $\vec{r}_2(t) = (\sin t, \cos t, 0)$  pro  $t \in [0, 2\pi]$ .

18. Najděte parametrické vyjádření křivky dané rovnicemi  $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ ,  $z - 1 = 0$ , popište její vlastnosti a nakreslete ji.
19. Najděte parametrické vyjádření křivky dané rovnicemi  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ ,  $x + y + z - 2 = 0$ . Najděte tečnu této křivky, která prochází bodem  $B[1, 1, 0]$ .
20. Spočítejte délku jednoho závitu šroubovice dané vektorovou funkcí  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$ . Pro  $t = \pi/2$  určete tečnu k této šroubovici.

### 3 Křivkové integrály

#### 3.1 Křivkové integrály 1. druhu

Příklad 21: Vypočítejte křivkový integrál  $\int_{\mathcal{K}} \frac{ds}{x+y}$ , kde  $\mathcal{K}$  je úsečka  $AB$

a  $A[0, 2]$ ,  $B[3, 0]$ .

Teorie

*Řešení:* Parametrické vyjádření úsečky  $AB$  je:  $[x, y] = A + t(B - A)$ , po souřadnicích  $x = 0 + 3t$ ,  $y = 2 - 2t$ ,  $t \in [0, 1]$ . Tudíž

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{ds}{x+y} = \int_0^1 \frac{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}{3t + 2 - 2t} dt = \sqrt{13} [\ln |t + 2|]_0^1 = \sqrt{13} \ln \frac{3}{2}.$$

22. Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{K}} f(\vec{r}) ds,$$

kde  $f(\vec{r}) = z$ ,  $\mathcal{K}$  je kuželová šroubovice  $(t \cos t, t \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .  
 $[\frac{1}{3}(\sqrt{3^3} - \sqrt{2^3})]$

23.  $f(\vec{r}) = \frac{1}{x-y}$  a  $\mathcal{K}$  je úsečka spojující body  $A[0, -2, 0]$ ,  $B[4, 0, 0]$ .

[Parametrické

vyjádření úsečky  $AB$  je:  $x = 0 + 4t$ ,  $y = -2 + 2t$ ,  $z = 0 + 0t$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Tudíž  $\int_{\mathcal{K}} \frac{ds}{x-y} = \int_0^1 \frac{\sqrt{4^2 + 2^2 + 0^2}}{4t + 2 - 2t} dt = \frac{\sqrt{20}}{2} [\ln |1 + t|]_0^1 = \sqrt{5} \ln 2.$

24.  $f(\vec{r}) = x + y$  a  $\mathcal{K}$  je obvod trojúhelníka s vrcholy  $A[0, 1, 0]$ ,  $B[2, 1, 0]$ ,  $C[0, 3, 0]$ .  
 $[8 + 6\sqrt{2}]$

25.  $f(\vec{r}) = x^2$  a  $\mathcal{K}$  je graf funkce  $y = \ln x$  na intervalu  $[1, 2]$ .

26.  $f(\vec{r}) = \sqrt{x^2 + y^2}$  a  $\mathcal{K}$  je dána rovnicí  $x^2 + y^2 = 2x$ .

### 3.2 Křivkové integrály 2. druhu

Příklad 27: Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{K}^+} \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2},$$

Teorie

kde  $\mathcal{K}^+$  je orientovaná polovina kružnice ležící v polorovině dané nerovností  $x \geq 0$ , se středem v počátku, s počátečním bodem  $A[0, -\varrho]$  a koncovým bodem  $B[0, \varrho]$ ,  $\varrho > 0$ . Parametrizací  $x(t) = \varrho \cos t$ ,  $y(t) = \varrho \sin t$ ,  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  dostaneme

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varrho^3 \cos^3 t + \varrho^3 \sin^3 t}{\varrho^2 \cos^2 t + \varrho^2 \sin^2 t} dt = \varrho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(1 - \sin^2 t) \cos t + (1 - \cos^2 t) \sin t] dt = \frac{4\varrho}{3}.$$

28. Vypočítejte práci, která se vykoná v silovém poli  $\vec{v}_1 = (2xy, x^2)$ , popřípadě  $\vec{v}_2 = (xy, y - x)$  při přemístění hmotného bodu z místa  $A[0, 0]$  do místa  $B[1, 1]$  po křivce  $\mathcal{K}^+$  dané vztahy: a)  $y = x$ , b)  $y = x^2$ , c)  $x = y^2$ , d) lomená čára  $ACB$  s bodem  $C[1, 0]$ , e) kratší oblouk kružnice  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ .

[ad  $\vec{v}_1$  : všechny výsledky se rovnají 1]  
 [ad  $\vec{v}_2$  : a)  $\frac{1}{3}$ , b)  $\frac{1}{12}$ , c)  $\frac{17}{30}$ , d)  $-\frac{1}{2}$ , e)  $1 - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}$ ]

Vypočítejte

29.  $\int_{\mathcal{K}^+} (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz,$

kde  $\mathcal{K}^+$  je křivka daná rovnicemi  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$ ,  $t \in [0, 1]$ .

30.  $\int_{\mathcal{K}^+} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy,$

kde  $\mathcal{K}^+$  je křivka daná grafem funkce  $y = x^2$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

31.  $\int_{\mathcal{K}^+} (y^2 + z) dx + xy dy + (x + y + yz) dz,$

kde  $\mathcal{K}^+$  je křivka daná rovnicemi  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ ,  $z = t$ ,  $t \in [0, \pi]$ .

[12]

32.  $\int_{\mathcal{K}^+} (2 - y) dx + x dy,$

kde  $\mathcal{K}^+$  je křivka daná rovnicemi  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ ,  $z = 0$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

[-2\pi]

### 3.3 Greenova věta

Příklad 33: Užitím Greenovy věty vypočtete křivkový integrál

$$\oint_{\mathcal{K}^+} (x + y) dx - (x - y) dy,$$

kde  $\mathcal{K}^+$  je kladně orientovaná elipsa  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

Teorie

*Řešení*: V Greenově větě  $\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial\Omega^+} f_1 dx + f_2 dy$  položíme

$f_1 = x + y$ ,  $f_2 = -x + y$ , pak  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$  a  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = -1$ . Tedy

$$\int_{\mathcal{K}^+} (x + y) dx - (x - y) dy = \iint_{\Omega} (-1 - 1) dx dy.$$

Převědeme dvojný integrál přes  $\Omega$  do zobecněných polárních souřadnic

$$\begin{aligned} x &= 2r \cos \varphi, \\ y &= 3r \sin \varphi, \quad r > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

Pro Jakobián této transformace dostaneme

$$J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi & -2r \sin \varphi \\ 3 \sin \varphi & 3r \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad |\det J_{\mathbf{f}}| = |6r| = 6r.$$

Tudíž

$$\int_{\mathcal{K}} (x + y) dx - (x - y) dy = \iint_{\Omega} -2 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -2 \cdot 6r dr d\varphi = -12\pi.$$

Příklad 34: Ověřte Greenovu větu při výpočtu integrálu  $\oint_{\partial\Omega^+} x dx + \sqrt{x} dy$ , kde

$$\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2y \leq 2\sqrt{x}\}.$$

*Řešení*: V Greenově větě  $\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial\Omega^+} f_1 dx + f_2 dy$  položíme

$f_1 = x$ ,  $f_2 = \sqrt{x}$ , pak  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$  a  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Pro  $x = 2\sqrt{x} \Rightarrow x = 0, x = 4$ , tedy

$$\int_{\partial\Omega^+} x dx + \sqrt{x} dy = \int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dy dx = \int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \left( \sqrt{x} - \frac{x}{2} \right) dx = 2 - \frac{1}{6} [x^{\frac{3}{2}}]_0^4 = \frac{2}{3}.$$

Křivkový integrál rozdělíme na dva  $x \in [0, 4], y = \frac{x}{2}$ ;  $x \in [4, 0], y = \sqrt{x}$ .

$$\oint_{\partial\Omega^+} x dx + \sqrt{x} dy = \int_0^4 x dx + \sqrt{x} \frac{1}{2} dx + \int_4^0 x dx + \sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 [\sqrt{x} - 1] dx = \frac{2}{3}.$$

## 4 Operátory skalárních a vektorových polí

Příklad 35: Vypočítejte gradient funkce  $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$  v bodě  $A[1, 2, 1]$ .

Řešení: Pro jednotlivé parciální derivace platí  $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2z^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = -2y^3z$ . Po dosazení bodu  $A$  dostaneme  $\nabla f(A) = (12, -9, -16)$ .

Teorie

36. Vypočítejte gradient funkce  $f = \ln \|\vec{r}\|$ , jestliže  $\vec{r} = (x, y, z)$ .

$$[\nabla f = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^2}]$$

37. Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce  $f$  dané implicitně rovnicí  $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$  v bodě  $A[1, -1, 2]$ .

$$[7(x - 1) - 3(y + 1) + 8(z - 2) = 0]$$

38. Vypočítejte divergenci vektorové funkce  $\vec{v} = (x^2z, -2y^2z^2, xy^2z)$  v bodě  $A[1, -1, 1]$ .

$$[7]$$

39. Necht'  $f = 2x^3y^2z^4$ , vypočítejte  $\text{div grad } f$  (neboli  $\nabla \cdot \nabla f$ ).

$$[12xy^2z^4 + 4x^3z^4 + 24x^3y^2z^2]$$

40. Dokažte, že  $\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}\right) = 0$ .

$$[\nabla \cdot (\|\vec{r}\|^{-3}\vec{r}) = (\nabla \cdot \|\vec{r}\|^{-3}) \cdot \vec{r} + (\|\vec{r}\|^{-3}) \nabla \cdot \vec{r} = -3\|\vec{r}\|^{-5} \vec{r} \cdot \vec{r} + 3\|\vec{r}\|^{-3} = 0]$$

41. Vypočítejte rotaci vektorové funkce  $\vec{v} = (xz^3, -2x^2yz, 2yz^4)$  v bodě  $A[1, -1, 1]$ .

$$[(0, 3, 4)]$$

42. Vypočítejte rotaci vektorové funkce  $\vec{v} = \vec{r}f(\|\vec{r}\|)$ , kde  $f$  je diferencovatelná funkce a  $\vec{r} = (x, y, z)$ .

$$[(0, 0, 0)]$$

## 5 Plochy

Příklad 43: Vypočítejte plošný obsah grafu funkce  $f(x, y) = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$  na množině dané nerovností  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq c^2$ ,  $a > 0, b > 0, c > 0$ .

Řešení: Pro plošný obsah  $P$  grafu funkce  $f$  platí

$$P = \iint_{S_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_{S_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} dx dy.$$

Parametrizací elipsy dostaneme  $x = a\rho \cos t$ ,  $y = b\rho \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $\rho \in [0, c]$  a Jakobián zobrazení  $\Phi : (\rho, t) \mapsto (x, y)$  je  $|\det J_\Phi| = ab\rho$ . Tedy

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^c \sqrt{1 + \rho^2} ab\rho d\rho dt = \frac{2}{3}\pi ab(\sqrt{(1+c)^3} - 1).$$

Teorie

44. Vypočítejte plošný obsah části povrchu koule dané rovnicí  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , která leží uvnitř válcové plochy  $x^2 + y^2 = Rx$ ,  $R > 0$ .

$[R^2(\pi - 2)]$

## 6 Plošné integrály, Gausova věta, Stokesova věta

### 6.1 Plošné integrály 1.druhu

Příklad 45: Vypočítejte plošný integrál 1. druhu  $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$ , kde  $S$  je povrch koule s poloměrem  $\rho$  a středem v počátku souřadnicového systému.

*Řešení*: Přejdem ke sférickým souřadnicím  $x = \rho \cos u \cos v$ ,  $y = \rho \sin u \cos v$ ,  $z = \rho \sin v$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $dS = \rho^2 \cos v du dv$  dostaneme

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\rho^2 \cos^2 u \cos^2 v + \rho^2 \sin^2 u \cos^2 v} \rho^2 \cos v dv du = \pi^2 \rho^3.$$

Teorie

Příklad 46: Vypočítejte integrál

$$\iint_S [x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2] dS,$$

kde  $S$  je část kuželové plochy  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \geq 0$  ohraničená válcovou plochou  $x^2 + y^2 = 4x$ .

*Řešení*: Průmětem plochy  $S$  do roviny  $xy$  je kruh  $S_{xy}$  ( $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ). Pro diferenciál plochy  $dS$  platí  $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dS_{xy} = \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} dS_{xy} = \sqrt{2} dS_{xy}$ .

Tedy

$$\iint_S x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2 dS = \sqrt{2} \iint_{S_{xy}} [x^2 y^2 + (x^2 + y^2)^2] dS_{xy}.$$

Přechodem k polárním souřadnicím  $x = \rho \cos t$ ,  $y = \rho \sin t$  dostaneme  $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $0 \leq \rho \leq 4 \cos t$  a

$$\sqrt{2} \iint_{S_{xy}} [x^2 y^2 + (x^2 + y^2)^2] dS_{xy} = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4 \cos t} (\rho^4 \cos^2 t \sin^2 t + \rho^4) \rho d\rho dt = .$$

$$\sqrt{2} \frac{4^6}{6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t (\cos^2 t \sin^2 t + 1) d\rho dt = \sqrt{2} \frac{4^6}{6} \frac{87\pi}{256} = \frac{348 \pi \sqrt{2}}{3} .$$

Příklad 47: Vypočítejte integrál

$$I = \iint_S \frac{dS}{\sqrt{\rho^2 - z^2}},$$

kde  $S$  je plášť válce s poloměrem  $\rho$ , s podstavou v rovině  $xy$  a výškou  $k$ ,  $0 < k < \rho$ .

*Řešení:* Přechodem k cylindrickým souřadnicím  $\vec{r} : x = \rho \cos u$ ,  $y = \rho \sin u$ ,  $z = v$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $v \in [0, k]$  dostaneme

$$I = \int_0^k \int_0^{2\pi} \frac{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dudv}{\sqrt{\rho^2 - v^2}} = \int_0^k \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - v^2}} dudv = 2\pi \rho [\arcsin \frac{v}{\rho}]_0^k = 2\pi \rho \arcsin \frac{k}{\rho} .$$

Příklad 48: Vypočítejte integrál

$$I = \iint_S |y| dS,$$

kde  $S$  je část povrchu paraboloidu  $z = x^2 + y^2$ ,  $z \leq 9$ .

*Řešení:* Přechodem k polárním souřadnicím naparametrizujeme povrch paraboloidu  $\vec{r} : x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u^2$ ,  $u \in [0, 3]$ ,  $v \in [0, 2\pi]$  dostaneme  $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| dudv = \sqrt{1 + 4u^2} dudv$  a

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^3 |u \sin v| \sqrt{1 + 4u^2} dudv = \frac{1}{3} (\sqrt{37^3} - 1).$$

## 6.2 Plošné integrály 2.druhu

Příklad 49: Vypočítejte integrál

$$\iint_{S^+} x^3 dydz + y^3 dx dz + 3z dx dy,$$

kde  $S$  je vnější strana části rotačního paraboloidu  $z = 1 - x^2 - y^2$ , která je omezená rovinou  $z = 0$ .

*Řešení:* Úlohu lze rozložit na výpočet tří integrálů přes průměty plochy  $S$  do odpovídajících rovin  $yz$ ,  $xz$  a  $xy$ .

Při průmětu do roviny  $yz$  platí  $x = \sqrt{(1 - y^2 - z)^3}$ , pokud vnější normálový vektor  $\vec{n}$  má první souřadnici  $n_1 > 0$ , a zároveň  $x = -\sqrt{(1 - y^2 - z)^3}$ , pokud  $n_1 < 0$ . Tedy

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{S^+} x^3 dydz = 2 \iint_{S_{yz}^+} \sqrt{(1 - y^2 - z)^3} dydz = 2 \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} (1 - y^2 - z)^{\frac{3}{2}} dz dy \\ &= -\frac{4}{5} \int_{-1}^1 [(1 - y^2 - z)^{\frac{5}{2}}]_0^{1-y^2} dy = \frac{4}{5} \int_{-1}^1 (1 - y^2)^{\frac{5}{2}} dy = \left[ \begin{array}{l} y = \sin t \\ dy = \cos t \end{array} \right] \\ &= \frac{4}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \cos t dt = \frac{1}{10} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)^3 dt = \frac{1}{10} (\pi + \frac{3}{2}\pi) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Při průmětu do roviny  $xz$  dostaneme stejnou úlohu jako v předchozím kroku (stačí zaměnit proměnné  $x$  a  $y$ , neboli  $I_y = \frac{\pi}{4}$ ).

Při průmětu do roviny  $xy$  budeme integrovat přes průmět  $S_{xy}$ , kterým je kruh daný nerovností  $x^2 + y^2 \leq 1$  a přechodem k polárním dostaneme

$$\begin{aligned} I_z &= \iint_{S^+} 3z dx dy = 3 \iint_{S_{xy}^+} 1 - x^2 - y^2 dx dy = \left[ \begin{array}{l} x = \varrho \cos t, \quad \varrho \in [0, 1] \\ y = \varrho \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \end{array} \right] \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \varrho^2) \varrho d\varrho dt = \left[ \begin{array}{l} u = 1 - \varrho^2 \\ du = -2\varrho d\varrho \end{array} \right] = -3\pi \int_1^0 u du = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Zadaný integrál má tedy hodnotu  $I = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi$ .

Teorie

Příklad 50: Vypočítejte tok vektorového pole  $\vec{v} = (4x, -2y^2, z^2)$  povrchem válce daného rovnicemi  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = 0$ ,  $z = 3$ .

*Řešení:* Pro tok  $T$  platí

$$T = \iint_{S^+} \vec{v} \vec{n} \, dS,$$

kde  $\vec{n}$  je vnější normálový vektor k povrchu válce. Úlohu lze rozložit na výpočet tří integrálů přes podstavy a plášť válce.

Vnější normálový vektor k podstavě v rovině  $z = 0$  je  $\vec{n} = (0, 0, -1)$  a pro první integrál platí

$$I_1 = \iint_{S^+} (4x, -2y^2, z^2) (0, 0, -1) \, dS = \iint_{S_{xy}} -z^2 \, dxdy = 0.$$

Vnější normálový vektor k podstavě v rovině  $z = 3$  je  $\vec{n} = (0, 0, 1)$  a pro druhý integrál platí

$$I_2 = \iint_{S^+} (4x, -2y^2, z^2) (0, 0, 1) \, dS = \iint_{S_{xy}} z^2 \, dxdy = 3^2 \pi 2^2 = 36\pi.$$

Vnější normálový vektor k plášti válce získáme po parametrizaci  $\vec{r} : x = 2 \cos u, y = 2 \sin u, z = v, u \in [0, 2\pi], v \in [0, 3]$ , potom tečné vektory mají tvar  $\vec{r}_u = (-2 \sin u, 2 \cos u, 0), \vec{r}_v = (0, 0, 1)$  a normálový vektor  $\vec{n} = (\cos u, \sin u, 0)$ . Pro třetí integrál tedy platí

$$I_3 = \iint_{S^+} (4x, -2y^2, z^2) (\cos u, \sin u, 0) \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^3 [8 \cos^2 u - 8 \sin^3 u] 2 \, dvdu = 48\pi.$$

Zadaný integrál má tedy hodnotu  $I = 0 + 36\pi + 48\pi = 84\pi$ .

Příklad 51: Vypočítejte integrál  $I = \iint_{S^+} \vec{v} \vec{n} \, dS$ , jestliže  $\vec{v} = (x, y, z)$  a plocha  $S$  je parametrizována funkcí  $\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, cv), [u, v] \in [a, b] \times [0, 2\pi], 0 < a < b, c > 0$ .

*Řešení:* Pro výpočet využijeme rovnost  $\iint_{S^+} \vec{v} \vec{n} \, dS = \iint_{\Omega} \vec{v} (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, du \, dv$ . Platí  $\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \vec{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, c)$  a  $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (c \sin v, -c \cos v, u)$ . Tedy

$$I = \int_a^b \int_0^{2\pi} (u \cos v, u \sin v, cv) (c \sin v, -c \cos v, u) \, du \, dv = \int_a^b \int_0^{2\pi} cvu \, du \, dv = (b^2 - a^2) c \pi^2.$$

### 6.3 Gaussova věta

Příklad 52: Pomocí Gaussovy věty vypočítejte integrál

$$I = \iint_{S^+} x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy,$$

kde  $S$  je povrch koule o poloměru  $R$  se středem v počátku souřadnicové soustavy.

*Řešení:* Použijeme Gaussovu větu ve tvaru  $\iint_{S^+} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} dV$  pro funkci  $\vec{v} = (x^3, y^3, z^3)$ . Potom  $\operatorname{div} \vec{v} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$  a přechodem ke sférickým souřadnicím  $x = \rho \cos u \cos v$ ,  $y = \rho \sin u \cos v$ ,  $z = \rho \sin v$ ,  $u \in [0, 2\pi)$ ,  $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,  $\rho \in [0, R]$ ,  $dV = \rho^2 \cos v du dv d\rho$  dostaneme

$$I = \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dV = 3 \int_0^R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \rho^2 \rho^2 \cos v d\rho dv du = \frac{12\pi R^5}{5}.$$

Pokud počítáme dvojný integrál druhého druhu přímo, pak opět přechodem ke sférickým souřadnicím (nyní  $\rho = R$ ) dostaneme

$$\begin{aligned} \iint_{S^+} x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy &= \iint_{S^+} (x^3, y^3, z^3) \cdot \vec{n} dS = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\cos^3 u \cos^3 v, \sin^3 u \cos^3 v, \sin^3 v) \cdot (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v) R^5 \cos v dv du = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\cos^4 u \cos^4 v + \sin^4 u \cos^4 v + \sin^4 v) \cdot R^5 \cos v dv du = \\ &= R^5 \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left( \left( \frac{1 + \cos 2u}{2} \right)^2 + \left( \frac{1 - \cos 2u}{2} \right)^2 \right) \cos^5 v dv du + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin^4 v \cdot \cos v dv du \right) = \\ &= R^5 \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 v)^2 \cos v dv \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1 + \cos 4u}{4} \right) du + \left[ \frac{t^5}{5} \right]_{-1}^1 2\pi \right) = \frac{12\pi R^5}{5}. \end{aligned}$$

Příklad 53: Vypočítejte integrál  $I = \iint_{S^+} xz \, dydz + x^2y \, dx dz + y^2z \, dx dy$ , kde plocha  $S$  je vnější strana povrchu tělesa daného nerovnostmi  $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4$ .

Řešení: Použijeme Gaussovu větu ve tvaru  $\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, dV$ , neboli  $\vec{v} = (xz, x^2y, y^2z)$ ,  $\operatorname{div} \vec{v} = z + x^2 + y^2$  a přechod k polárním souřadnicím  $x = \varrho \cos t, y = \varrho \sin t, t \in [0, \frac{\pi}{2}], \varrho \in [0, 2]$ . Tedy

$$I = \iiint_V z + x^2 + y^2 \, dV = \iint_{S_{xy}} \int_0^{x^2+y^2} z + x^2 + y^2 \, dz dx dy = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} \varrho^4 \, dt d\varrho = 8\pi.$$

Příklad 54: Vypočtete objem tělesa vymezeného plochou  $x = (b+a \cos v) \cos u, y = (b+a \cos v) \sin u, z = a \sin v, u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi], 0 < a \leq b$  a rovinami  $x = 0, z = 0$ .

Řešení: Z Gaussovy věty plyne pro objem tělesa  $\operatorname{meas}(V) = \frac{1}{3} \iint_{S^+} (x, y, z) \cdot \vec{n} \, dS$ .

Spočítáme jednotkový vektor vnější normály  $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ , tedy

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{(-(b+a \cos v) \sin u, (b+a \cos v) \cos u, 0) \times a(-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, \cos v)}{a \|((b+a \cos v) \cos u \cos v, (b+a \cos v) \sin u \cos v, (b+a \cos v) \sin v)\|} \\ &= \frac{((b+a \cos v) \cos u \cos v, (b+a \cos v) \sin u \cos v, (b+a \cos v) \sin v)}{(b+a \cos v)}. \end{aligned}$$

Zároveň platí  $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du dv$ . Po dosazení dostaneme  $\operatorname{meas}(V) =$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ((b+a \cos v) \cos u, (b+a \cos v) \sin u, a \sin v) \cdot a((b+a \cos v) \cos u \cos v, (b+a \cos v) \sin u \cos v, (b+a \cos v) \sin v) \, du dv = \\ &\frac{a}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} ((b+a \cos v)^2 \cos v + (b+a \cos v) a \sin^2 v) \, du dv = \frac{a}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (b+a \cos v)(b+a) \, du dv. \end{aligned}$$

Tedy  $\operatorname{meas}(V) = \frac{4}{3} ab(b+a)\pi^2$ .

## 6.4 Stokesova věta

Příklad 55: Pomocí Stokesovy věty vypočtete integrál  $I = \oint_{\mathcal{K}^+} (y-z, z-x, x-y) \, d\vec{r}$ , kde křivka  $\mathcal{K}^+$  je dána rovnicemi  $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1, a > 0, b > 0$ .

Příklad 56: Vypočítejte práci vektorového pole  $\vec{v} = (x + y, 2x - z, y + z)$  po uzavřené křivce  $\mathcal{K}$ , která je tvořena obvodem trojúhelníka  $A[2, 0, 0]$ ,  $B[0, 3, 0]$ ,  $C[0, 0, 6]$ . Orientace pohybu je dána pořadím vrcholů trojúhelníka.

Řešení: K výpočtu použijeme Stokesovu větu ve tvaru  $\oint_{\partial S^+} \vec{v} \cdot \vec{\tau} \, ds = \iint_{S^+} \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$ .

Platí  $\text{rot } \vec{v} = (2, 0, 1)$  a  $\vec{n} = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|} = \frac{6(3, 2, 1)}{6\sqrt{14}}$ . Tedy

$$I = \iint_S (2, 0, 1) \cdot \frac{(3, 2, 1)}{\sqrt{14}} \, dS = \frac{7}{\sqrt{14}} \text{meas}(S) = \frac{7}{\sqrt{14}} \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = 21.$$

## 7 Nezávislost na cestě

Příklad 57: Určete číslo  $a$  tak, aby integrál  $\int_{\mathcal{K}} \frac{dx+ady}{x+3y}$  byl nezávislý na cestě na množině  $\Omega$  dané nerovností  $x + 3y > 0$ .

Řešení: Hledáme funkci  $f = f(x, y)$  takovou, aby  $\text{grad } f = (\frac{1}{x+3y}, \frac{a}{x+3y})$ , neboli  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+3y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{a}{x+3y}$ . Po integrování dostaneme  $f(x, y) = \ln|x + 3y| + C(y)$  a  $f(x, y) = \frac{a}{3} \ln|x + 3y| + C(x)$ . Odtud plyne  $a = 3$ .

Příklad 58: Najděte vektorové pole, jehož potenciál je  $f(x, y) = 5\sqrt{x^2 + y^2}$  a vypočítejte práci tohoto pole po křivkách a) z bodu  $A[3, 4]$  do bodu  $B[-2, 0]$  b) z bodu  $A[3, 4]$  do bodu  $B[\sqrt{21}, 2]$ .

Řešení: Pro hledané vektorové pole  $\vec{v}$  platí  $\vec{v} = \text{grad } f = (5 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 5 \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$  a pro jeho práci  $W$  platí  $W = f(B) - f(A)$ , tedy a)  $W = |5 \cdot 2 - 5 \cdot 5| = 15$ , b)  $W = |5 \cdot 5 - 5 \cdot 5| = 0$ .

Příklad 59: Spočítejte křivkový integrál  $I = \int_{\mathcal{K}^+} (x+y) \, dx + (x-y) \, dy$ , po úsečce  $\mathcal{K}$  spojující bod  $A[0, 1]$  a bod  $B[2, 2]$ . Potom ověřte, že integrovaná vektorová funkce je potenciální a na základě této informace opět spočítejte daný integrál.

*Řešení:* Parametrizujeme úsečku  $\mathcal{K}$ :  $x = 0 + 2t$ ,  $y = 1 + t$ ,  $t \in [0, 1]$ , potom

$$I = \int_{\mathcal{K}^+} (x + y) dx + (x - y) dy = \int_0^1 [(2t + 1 + t) \cdot 2 + 2t - 1 - t] dt = \frac{9}{2}.$$

Aby vektorová funkce  $\vec{v} = (x + y, x - y)$  byla potenciální, musí platit  $\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$ , což je splněno ( $1 = 1$ ). Najdeme tedy potenciál  $f$ , pro který platí  $f(x, y) = \int x + y dx = \frac{x^2}{2} + yx + C(y)$  a zároveň  $f(x, y) = \int x - y dy = yx - \frac{y^2}{2} + C(x)$ . Tudíž  $f(x, y) = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2}$  a pro daný integrál platí

$$I = \int_{\mathcal{K}^+} (x + y) dx + (x - y) dy = f(B) - f(A) = \frac{2^2 + 8 - 2^2}{2} - \frac{-1^2}{2} = \frac{9}{2}.$$

## 8 Tenzory

### 8.1 Sdružené báze

Příklad 60: Najděte kontravariantní a kovariantní souřadnice vektoru  $\vec{v} = (1, 2)$ , jestliže zobrazení  $\Phi: \vec{q} \rightarrow \vec{r}$  je dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} r^1 &= 2q^1 - q^2 \\ r^2 &= 3q^1 + q^2. \end{aligned}$$

Teorie

*Řešení:* Vektory křivočaré (kontravariantní) báze jsou definované předpisem  $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$ ,  $i = 1, 2, 3$  a tvoří sloupce Jacobiovy matice  $J_\Phi = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ , tedy  $\vec{e}_1 = (2, 3)$ ,  $\vec{e}_2 = (-1, 1)$ .

Vektory sdružené (kovariantní) báze jsou definované předpisem  $\vec{e}^i = \nabla q^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  a tvoří řádky inverzní Jacobiovy matice  $J_{\Phi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ , odtud  $\vec{e}^1 = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ ,  $\vec{e}^2 = (-\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ .

Pro kontravariantní souřadnice  $\hat{v}^1, \hat{v}^2$  vektoru  $\vec{v}$  platí  $\vec{v} = \hat{v}^1 \vec{e}_1 + \hat{v}^2 \vec{e}_2$ , neboli  $(1, 2) = \hat{v}^1(2, 3) + \hat{v}^2(-1, 1)$ . Odtud dostaneme  $\hat{v}^1 = \frac{3}{5}$ ,  $\hat{v}^2 = \frac{1}{5}$ .

Rychleji můžeme získat kontravariantní souřadnice pomocí vztahu  $\hat{v}^i = \frac{\partial q^i}{\partial r^j} v^j$ ,  $i = 1, 2$ , tedy  $\hat{v}^1 = \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{3}{5}$  a  $\hat{v}^2 = -\frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{1}{5}$ .

Pro kovariantní souřadnice  $\hat{v}_1, \hat{v}_2$  vektoru  $\vec{v}$  platí  $\vec{v} = \hat{v}_1 \vec{e}^1 + \hat{v}_2 \vec{e}^2$ , neboli  $(1, 2) = \hat{v}_1(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}) + \hat{v}_2(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ , tedy  $\hat{v}_1 = 8$ ,  $\hat{v}_2 = 1$ .

Nebo dostaneme kovariantní souřadnice ze vztahu  $\hat{v}_i = \frac{\partial r^j}{\partial q^i} v^j$ ,  $i = 1, 2$ , odtud  $\hat{v}_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$  a  $\hat{v}_2 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 1$ .

Příklad 61: Uvažujte transformaci  $\Phi$ , vektor  $\vec{v}$  z předchozího příkladu. Najděte prvky  $g_{ij}, g^{ij}$  fundamentální matice  $G$ , k ní inverzní  $G^{-1}$  a ověřte pro vektor  $\vec{v}$  vlastnost snížení a zvýšení indexu při přechodu od kontravariantních souřadnic ke kovariantním a naopak.

*Řešení:* Pro prvky fundamentální matice platí  $g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ , pro prvky inverzní matice platí  $g^{ij} = \vec{e}^i \vec{e}^j$ , tedy

$$g_{11} = (2, 3) \cdot (2, 3) = 13, \quad g_{12} = (2, 3) \cdot (-1, 1) = 1, \quad g_{21} = 1, \quad g_{22} = (-1, 1) \cdot (-1, 1) = 2.$$

Podobně

$$g^{11} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}) \cdot (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}) = \frac{2}{25}, \quad g^{12} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}) \cdot (-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}) = \frac{-1}{25}, \quad g^{21} = \frac{1}{25}, \quad g^{22} = (-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}) \cdot (-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}) = \frac{13}{25}.$$

Dále máme ověřit snížení indexu  $\hat{v}_j = g_{ji} \hat{v}^i$  a zvýšení indexu  $\hat{v}^i = g^{ij} \hat{v}_j$ . Neboli pro snížení indexu  $8 = 13 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5}$ ,  $1 = 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5}$  a pro zvýšení indexu  $\frac{3}{5} = \frac{2}{25} \cdot 8 + \frac{-1}{25} \cdot 1$ ,  $\frac{1}{5} = \frac{-1}{25} \cdot 8 + \frac{13}{25} \cdot 1$ , vše platí.