Sbírka příkladů z matematické analýzy III

Petr Tomiczek

Obsah

1 Vektorový a afinní prostor

<u>*Příklad 1*</u>: Dokažte, že ve vektorovém prostoru $(V, +, \cdot)$ existuje ke každému $u \in V$ právě jeden inverzní prvek $\widehat{u}$.
Řešení: Nechť $\widehat{u}_1$, $\widehat{u}_2$ jsou dva inverzní prvky k u, pak

$$\widehat{u}_1 = \widehat{u}_1 + o = \widehat{u}_1 + (u + \widehat{u}_2) = (\widehat{u}_1 + u) + \widehat{u}_2 = o + \widehat{u}_2 = \widehat{u}_2\,.$$

Teorie

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, pak

2. ve V existuje právě jeden neutrální (nulový) prvek o.
3. jestliže $u, v, w \in V$ a $u + v = u + w$, pak $v = w$.
4. platí $(-1) \cdot u = (-u)$, tedy opačný prvek dostaneme vynásobením původního prvku číslem -1.
5. jestliže $u + v = w$, pak $u = w + (-v)$.
6. jestliže $a \cdot u = o$, pak $u = o$ nebo $a = 0$.

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor se skalárním součinem $(\cdot, \cdot)$, pak

7. dokažte, že $(u, av + bw) = \bar{a}(u, v) + \bar{b}(u, w)\ \ \forall u, v, w \in V,], \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
8. ukažte, kdy nastane rovnost ve Schwarzově nerovnosti.
9. ověřte vlastnosti normy dané předpisem $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

10. Dokažte, že velikost plochy rovnoběžníka určeného dvěma vektory je rovna velikosti vektorového součinu těchto vektorů.

<u>*Příklad 11*</u>: V $\mathbb{E}_3$ máme dány přímky

$$p_1: \begin{array}{l} x = 2 - 1t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2t \end{array} \qquad p_2: \begin{array}{l} x = 2 + 1s \\ y = -1 + 3s \\ z = -2s \end{array} \quad \text{a bod} \quad A[3, 8, -2],$$

který leží v rovině přímek p_1, p_2. Určete obsah rovnoběžníka daného bodem A a přímkami p_1, p_2.

Řešení: Řešením soustavy

$$\begin{aligned} 2 - 1t + 1s &= 3 \\ -1 + 3t + 3s &= 8 \\ 2t - 2s &= -2 \end{aligned}$$

dostaneme $t = 1$, $s = 2$, tedy vektory $\vec{u} = (-1, 3, 2)$, $\vec{v} = (2, 6, -4)$ tvoří strany hledaného rovnoběžníka. Jeho obsah se rovná $\|\vec{u}\times\vec{v}\,\| = \|(-24, 0, -12)\| = 12\sqrt{5}$.

12. Máme přímky $p_1 : A[1, -3, 2] + t(-1, 2, 1)$, $p_2 : A[1, -3, 2] + s(1, 2, -1)$ a bod $B[1, 1, 2]$. Určete plochu rovnoběžníka určeného přímkami p_1, p_2 a bodem B. $[4\sqrt{2}]$

2 Křivky

<u>*Příklad 13*</u> : Rozhodněte, zda křivka parametrizovaná pomocí vektorové funkce $\vec{r} = (2t^3 + 3t^2 - 12t, t^4 - 4t, 0)$, $t \in [-2, 2]$ je regulární.
Řešení: Pro normu derivace vektorové funkce dostaneme

$$\|\vec{r}\,'\| = \sqrt{(6t^2 + 6t - 12)^2 + (4t^3 - 4)^2} = \sqrt{(t - 1)^2[36(t + 2)^2 + 16(t^2 + t + 1)^2]}\,.$$

Odtud pro $t = 1$ je $\|\vec{r}\,'\| = 0$ a daná křivka tudíž není regulární.

Teorie

<u>*Příklad 14*</u> : Vypočítejte délku křivky $\vec{r}(t) = (t, \arcsin t, \frac{1}{4}\ln\frac{1-t}{1+t})$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$ a najděte tečnu v bodě $B[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{4}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}]$.
Řešení: Pro délku d křivky platí

$$d = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{1 - t^2} + \frac{1}{16}\frac{4}{(1 - t^2)^2}}\; dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2(1 - t^2) + 1}{2(1 - t^2)}\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 3\,.$$

Tečna má tvar: $\vec{y}(\tau) = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{4}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}] + (1, \sqrt{2}, -1)\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$.

15. Popište parametricky úsečku spojující body $A[1, 5, 2]$ a $B[3, 2, 6]$.

16. Rozhodněte, zda obrazem vektorové funkce $\vec{r}\,(t) = (1, t^2, t^2)$, $t \in [-2, 2]$ je regulární jednoduchá křivka.

17. Popište rozdíl mezi křivkami $\vec{r_1}\,(t) = (\cos t\,,\ \sin t\,,\ 0)$ a $\vec{r_2}\,(t) = (\sin t\,,\ \cos t\,,\ 0)$ pro $t \in [0\,, 2\pi]$.

18. Najděte parametrické vyjádření křivky dané rovnicemi $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, $z - 1 = 0$, popište její vlastnosti a nakreslete ji.

19. Najděte parametrické vyjádření křivky dané rovnicemi $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x + y + z - 2 = 0$. Najděte tečnu této křivky, která prochází bodem $B[1, 1, 0]$.

20. Spočítejte délku jednoho závitu šroubovice dané vektorovou funkcí $\vec{r}\,(t) = (\cos t,\ \sin t,\ 2t)$. Pro $t = \pi/2$ určete tečnu k této šroubovici.

3 Křivkové integrály

3.1 Křivkové integrály 1. druhu

<u>*Příklad 21*</u>: Vypočítejte křivkový integrál $\int\limits_{\mathcal{K}} \frac{ds}{x+y}$, kde $\mathcal{K}$ je úsečka AB a $A[0, 2]$, $B[3, 0]$.

Teorie

Řešení: Parametrické vyjádření úsečky AB je: $[x, y] = A + t(B - A)$, po souřadnicích $x = 0 + 3t,\ y = 2 - 2t,\ t \in [0, 1]$. Tudíž

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \frac{ds}{x+y} = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}{3t + 2 - 2t}\, dt = \sqrt{13}\ [\ln|t + 2|\,]_0^1 = \sqrt{13}\ \ln\frac{3}{2}\,.$$

22. Vypočítejte křivkový integrál
$$\int\limits_{\mathcal{K}} f(\vec{r})\ ds\,,$$
kde $f(\vec{r}) = z$, $\mathcal{K}$ je kuželová šroubovice $(t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in [0, 1]$.
$[\frac{1}{3}(\sqrt{3^3} - \sqrt{2^3})]$

23. $f(\vec{r}) = \frac{1}{x-y}$ a $\mathcal{K}$ je úsečka spojující body $A[0, -2, 0]$, $B[4, 0, 0]$.
[Parametrické vyjádření úsečky AB je: $x = 0 + 4t,\ y = -2 + 2t,\ z = 0 + 0t,\ t \in [0, 1]$. Tudíž $\int\limits_{\mathcal{K}} \frac{ds}{x-y} = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{4^2+2^2+0^2}}{4t+2-2t}\, dt = \frac{\sqrt{20}}{2}\ [\ln|1 + t|\,]_0^1 = \sqrt{5}\ \ln 2\,.$]

24. $f(\vec{r}) = x + y$ a $\mathcal{K}$ je obvod trojúhelníka s vrcholy $A[0, 1, 0]$, $B[2, 1, 0]$, $C[0, 3, 0]$.
$[8 + 6\sqrt{2}]$

25. $f(\vec{r}) = x^2$ a $\mathcal{K}$ je graf funkce $y = \ln x$ na intervalu $[1, 2]$.

26. $f(\vec{r}) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $\mathcal{K}$ je dána rovnicí $x^2 + y^2 = 2x$.

3.2 Křivkové integrály 2. druhu

Příklad 27: Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{K}^+} \frac{y^2\,dx - x^2\,dy}{x^2+y^2}\,,$$

Teorie

kde $\mathcal{K}^+$ je orientovaná polovina kružnice ležící v polorovině dané nerovností $x \geq 0$, se středem v počátku, s počátečním bodem $A[0,-\varrho]$ a koncovým bodem $B[0,\varrho]$, $\varrho > 0$. Parametrizací $x(t) = \varrho\cos t$, $y(t) = \varrho\sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dostaneme

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varrho^3\cos^3 t + \varrho^3\sin^3 t}{\varrho^2\cos^2 t + \varrho^2\sin^2 t}\,dt = \varrho\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(1-\sin^2 t)\cos t + (1-\cos^2 t)\sin t]\,dt = \frac{4\varrho}{3}\,.$$

28. Vypočítejte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{v}_1 = (2xy, x^2)$, popřípadě $\vec{v}_2 = (xy, y-x)$ při přemístění hmotného bodu z místa $A[0,0]$ do místa $B[1,1]$ po křivce $\mathcal{K}^+$ dané vztahy: a) $y = x$, b)$y = x^2$, c) $x = y^2$, d) lomená čára ACB s bodem $C[1,0]$, e) kratší oblouk kružnice $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

[ad $\vec{v}_1$: všechny výsledky se rovnají 1]

[ad $\vec{v}_2$: a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{12}$, c) $\frac{17}{30}$, d) $-\frac{1}{2}$, e) $1 - \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}$]

Vypočítejte

29. $\int_{\mathcal{K}^+} (y^2 - z^2)\,dx + 2yz\,dy - x^2\,dz$,

kde $\mathcal{K}^+$ je křivka daná rovnicemi $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \in [0,1]$.

30. $\int_{\mathcal{K}^+} (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$,

kde $\mathcal{K}^+$ je křivka daná grafem funkce $y = x^2$, $x \in [-1,1]$.

31. $\int_{\mathcal{K}^+} (y^2 + z)\,dx + xy\,dy + (x + y + yz)\,dz$,

kde $\mathcal{K}^+$ je křivka daná rovnicemi $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = t$, $t \in [0,\pi]$.

[12]

32. $\int_{\mathcal{K}^+} (2-y)\,dx + x\,dy$,

kde $\mathcal{K}^+$ je křivka daná rovnicemi $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi]$.

[-2π]

3.3 Greenova věta

Příklad 33 : Užitím Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{K}^+} (x+y)\, dx - (x-y)\, dy\,,$$

Teorie

kde $\mathcal{K}^+$ je kladně orientovaná elipsa $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\,.$

Řešení: V Greenově větě $\iint_\Omega \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\, dxdy = \oint_{\partial\Omega^+} f_1\, dx + f_2\, dy$ položíme $f_1 = x + y\,,\ f_2 = -x + y,$ pak $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$ a $\frac{\partial f_2}{\partial x} = -1\,.$ Tedy

$$\int_{\mathcal{K}^+} (x+y)\, dx - (x-y)\, dy = \iint_\Omega (-1-1)\, dxdy\,.$$

Převedeme dvojný integrál přes Ω do zobecněných polárních souřadnic

$$\begin{aligned} x &= 2\,r\cos\varphi, \\ y &= 3\,r\sin\varphi, \qquad r > 0\,,\quad 0 \le \varphi < 2\pi\,. \end{aligned}$$

Pro Jakobián této transformace dostaneme

$$J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\cos\varphi & -2\,r\sin\varphi \\ 3\,\sin\varphi & 3\,r\cos\varphi \end{pmatrix}; \quad |\det J_{\mathbf{f}}| = |6\,r| = 6\,r\,.$$

Tudíž

$$\int_{\mathcal{K}} (x+y)\, dx - (x-y)\, dy = \iint_\Omega -2\, dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -2\cdot 6\,r\, drd\varphi = -12\,\pi\,.$$

4 Operátory skalárních a vektorových polí

Příklad 34 : Vypočítejte gradient funkce $f(x,y,z) = 3x^2y - y^3z^2$ v bodě $A[1,2,1]$.

Řešení: Pro jednotlivé parciální derivace platí $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy\,,$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2z^2\,,$ $\frac{\partial f}{\partial z} = -2y^3z\,.$ Po dosazení bodu A dostaneme $\nabla f(A) = (12, -9, -16)\,.$

Teorie

35. Vypočítejte gradient funkce $f = \ln\|\vec{r}\|$, jestliže $\vec{r} = (x,y,z)\,.$

$[\,\nabla f = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}\,]$

36. Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce f dané implicitně rovnicí $2xz^2 - 3xy - 4x = 7$ v bodě $A[1, -1, 2]$.

$[\, 7(x-1) - 3(y+1) + 8(z-2) = 0 \,]$

37. Vypočítejte divergenci vektorové funkce $\vec{v} = (x^2 z, -2y^2 z^2, xy^2 z)$ v bodě $A[1, -1, 1]$.

$[\, 7 \,]$

38. Nechť $f = 2x^3 y^2 z^4$, vypočítejte $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$ (neboli $\nabla \cdot \nabla f$).

$[\, 12xy^2 z^4 + 4x^3 z^4 + 24x^3 y^2 z^2 \,]$

39. Dokažte, že $\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} \right) = 0$.

$[\, \nabla \cdot (\|\vec{r}\|^{-3} \vec{r}) = (\nabla \cdot \|\vec{r}\|^{-3}) \cdot \vec{r} + (\|\vec{r}\|^{-3}) \nabla \cdot \vec{r} = -3\|\vec{r}\|^{-5}\, \vec{r} \cdot \vec{r} + 3\|\vec{r}\|^{-3} = 0 \,]$

40. Vypočítejte rotaci vektorové funkce $\vec{v} = (xz^3, -2x^2 yz, 2yz^4)$ v bodě $A[1, -1, 1]$.

$[\, (0, 3, 4) \,]$

41. Vypočítejte rotaci vektorové funkce $\vec{v} = \vec{r} f(\|\vec{r}\|)$, kde f je diferencovatelná funkce a $\vec{r} = (x, y, z)$.

$[\, (0, 0, 0) \,]$

5 Plochy

Příklad 42 : Vypočítejte plošný obsah grafu funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ na množině dané nerovností $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le c^2$, $a > 0, b > 0, c > 0$.

Řešení: Pro plošný obsah P grafu funkce f platí

$$P = \iint\limits_{S_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy = \iint\limits_{S_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}\, dxdy\,.$$

Parametrizací elipsy dostaneme $x = a\varrho\cos t$, $y = b\varrho \sin t$, $t \in [0, 2\pi], \varrho \in [0, c]$ a Jakobián zobrazení $\Phi : (\varrho, t) \mapsto (x, y)$ je $|\det J_\Phi| = ab\varrho$. Tedy

$$P = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{c} \sqrt{1 + \varrho^2}\, ab\varrho\, d\varrho\, dt = \frac{2}{3}\pi ab(\sqrt{(1+c)^3} - 1).$$

Teorie

43. Vypočítejte plošný obsah části povrchu koule dané rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, která leží uvnitř válcové plochy $x^2 + y^2 = Rx$, $R > 0$.

$[\, R^2(\pi - 2) \,]$

6 Plošné integrály, Gausova věta, Stokesova věta

6.1 Plošné integrály 1.druhu

Příklad 44 : Vypočítejte plošný integrál 1. druhu $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\ dS$, kde S je povrch koule s poloměrem ϱ a středem v počátku souřadného systému.

Řešení: Přechodem ke sférickým souřadnicím $x = \varrho\cos u\cos v$, $y = \varrho\sin u\cos v$, $z = \varrho\sin v$, $u \in [0, 2\pi)$, $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $dS = \varrho^2\cos v\, dudv$ dostaneme

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\, dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\varrho^2\cos^2 u\cos^2 v + \varrho^2\sin^2 u\cos^2 v}\, \varrho^2\cos v\ dvdu = \pi^2\varrho^3.$$

Teorie

Příklad 45 : Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_S [x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2]\ dS\,,$$

kde S je část kuželové plochy $z^2 = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ ohraničená válcovou plochou $x^2 + y^2 = 4x$.

Řešení: Průmětem plochy S do roviny xy je kruh S_{xy} $((x-2)^2 + y^2 = 4)$. Pro diferenciál plochy dS platí $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dS_{xy} = \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}\, dS_{xy} = \sqrt{2}\, dS_{xy}$. Tedy

$$\iint\limits_S x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2\ dS = \sqrt{2}\iint\limits_{S_{xy}} [x^2y^2 + (x^2+y^2)^2]\ dS_{xy}\,.$$

Přechodem k polárním souřadnicím $x = \varrho\cos t$, $y = \varrho\sin t$ dostaneme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \varrho \leq 4\cos t$ a

$$\sqrt{2}\iint\limits_{S_{xy}} [x^2y^2 + (x^2+y^2)^2]\ dS_{xy} = \sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{4\cos t} (\varrho^4\cos^2 t\sin^2 t + \varrho^4)\ \varrho\ d\varrho dt = \ .$$

$$\sqrt{2}\,\frac{4^6}{6}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t(\cos^2 t\sin^2 t + 1)\ d\varrho dt = \sqrt{2}\,\frac{4^6}{6}\,\frac{87\pi}{256} = \frac{348\,\pi\sqrt{2}}{3}\,.$$

Příklad 46: Vypočítejte integrál

$$I = \iint_S \frac{dS}{\sqrt{\varrho^2 - z^2}}\,,$$

kde S je plášť válce s poloměrem ϱ, s podstavou v rovině xy a výškou k, $0 < k < \varrho$.

Řešení: Přechodem k cylindrickým souřadnicím $\vec{r}: x = \varrho\cos u,\ y = \varrho\sin u,$ $z = v,\ u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, k]$ dostaneme

$$I = \int_0^k\int_0^{2\pi} \frac{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, dudv}{\sqrt{\varrho^2 - v^2}} = \int_0^k\int_0^{2\pi} \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - v^2}}\, dudv = 2\pi\varrho\big[\arcsin\tfrac{v}{\varrho}\big]_0^k = 2\pi\varrho\arcsin\tfrac{k}{\varrho}\,.$$

Příklad 47: Vypočítejte integrál

$$I = \iint_S |y|\, dS\,,$$

kde S je část povrchu paraboloidu $z = x^2 + y^2$, $z \le 9$.

Řešení: Přechodem k polárním souřadnicím naparametrizujeme povrch paraboloidu $\vec{r}: x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^2,\ u \in [0, 3],\ v \in [0, 2\pi]$ dostaneme $dS = \|r_u \times r_v\|\, dudv = \sqrt{1 + 4u^2}\, dudv$ a

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{3} |u\sin v|\sqrt{1 + 4u^2}\, dudv = \frac{1}{3}\,(\sqrt{37^3} - 1).$$

6.2 Plošné integrály 2.druhu

Příklad 48: Vypočítejte integrál

$$\iint_{S^+} x^3\, dydz + y^3\, dxdz + 3z\, dxdy\,,$$

kde S je vnější strana části rotačního paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$, která je omezená rovinou $z = 0$.

Řešení: Úlohu lze rozložit na výpočet tří integrálů přes průměty plochy S do odpovídajících rovin yz, xz a xy.

Při průmětu do roviny yz platí $x = \sqrt{(1-y^2-z)^3}$, pokud vnější normálový vektor $\vec{n}$ má první souřadnici $n_1 > 0$, a zároveň $x = -\sqrt{(1-y^2-z)^3}$, pokud $n_1 < 0$. Tedy

$$\begin{aligned} I_x &= \iint\limits_{S^+} x^3\,dydz = 2\iint\limits_{S_{yz}} \sqrt{(1-y^2-z)^3}\,dydz = 2\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{1-y^2}(1-y^2-z)^{\frac{3}{2}}\,dzdy \\ &= -\tfrac{4}{5}\int\limits_{-1}^{1}[(1-y^2-z)^{\frac{5}{2}}]_0^{1-y^2}\,dy = \tfrac{4}{5}\int\limits_{-1}^{1}(1-y^2)^{\frac{5}{2}}\,dy = \left[\begin{array}{l} y=\sin t \\ dy = \cos t \end{array}\right] \\ &= \tfrac{4}{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t\cos t\,dt = \tfrac{1}{10}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)^3\,dt = \tfrac{1}{10}\left(\pi + \tfrac{3}{2}\pi\right) = \tfrac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

Při průmětu do roviny xz dostaneme stejnou úlohu jako v předchozím kroku (stačí zaměnit proměnné x a y, neboli $I_y = \frac{\pi}{4}$.

Při průmětu do roviny xy budeme integrovat přes průmět S_{xy}, kterým je kruh daný nerovností $x^2+y^2 \le 1$ a přechodem k polárním dostaneme

$$\begin{aligned} I_z &= \iint\limits_{S^+} 3z\,dxdy = 3\iint\limits_{S^+_{xy}} 1-x^2-y^2\,dxdy = \left[\begin{array}{ll} x=\varrho\cos t, & \varrho\in[0,1] \\ y=\varrho\sin t, & t\in[0,2\pi] \end{array}\right] \\ &= 3\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{1}(1-\varrho^2)\,\varrho\,d\varrho dt = \left[\begin{array}{l} u = 1-\varrho^2 \\ du = -2\varrho\,d\varrho \end{array}\right] = -3\pi\int\limits_{1}^{0}u\,du = \tfrac{3\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Zadaný integrál má tedy hodnotu $I = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2} = 2\pi$.

Teorie

Příklad 49: Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{v} = (4x, -2y^2, z^2)$ povrchem válce daného rovnicemi $x^2+y^2=4,\ z=0,\ z=3$.
Řešení: Pro tok T platí

$$T = \iint\limits_{S^+} \vec{v}\,\vec{n}\,dS\,,$$

kde $\vec{n}$ je vnější normálový vektor k povrchu válce. Úlohu lze rozložit na výpočet tří integrálu přes podstavy a plášť válce.

Vnější normálový vektor k podstavě v rovině $z=0$ je $\vec{n} = (0,0,-1)$ a pro první integrál platí

$$I_1 = \iint\limits_{S^+}(4x,-2y^2,z^2)\,(0,0,-1)\,dS = \iint\limits_{S_{xy}} -z^2\,dxdy = 0\,.$$

Vnější normálový vektor k podstavě v rovině $z = 3$ je $\vec{n} = (0,0,1)$ a pro druhý integrál platí

$$I_2 = \iint\limits_{S^+} (4x, -2y^2, z^2)\,(0,0,1)\; dS = \iint\limits_{S_{xy}} z^2\; dxdy = 3^2\pi 2^2 = 36\pi\,.$$

Vnější normálový vektor k plášti válce získáme po parametrizaci $\vec{r}: x = 2\cos u$, $y = 2\sin u$, $z = v$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0,3]$, potom tečné vektory mají tvar $\vec{r}_u = (-2\sin u,\ 2\cos u,\ 0)$, $\vec{r}_v = (0,\ 0,\ 1)$ a normálový vektor $\vec{n} = (\cos u, \sin u, 0)$. Pro třetí integrál tedy platí

$$I_3 = \iint\limits_{S^+} (4x, -2y^2, z^2)\,(\cos u, \sin u, 0)\; dS = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^3 [8\cos^2 u - 8\sin^3 u]\, 2\; dvdu = 48\pi\,.$$

Zadaný integrál má tedy hodnotu $I = 0 + 36\pi + 48\pi = 84\pi$.

<u>*Příklad 50*</u>: Vypočítejte integrál $I = \iint\limits_{S^+} \vec{v}\,\vec{n}\; dS$, jestliže $\vec{v} = (x, y, z)$ a plocha S je parametrizována funkcí $\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, cv)$, $[u,v] \in [a,b] \times [0, 2\pi]$, $0 < a < b$, $c > 0$.

Řešení: Pro výpočet využijeme rovnost $\iint\limits_{S^+} \vec{v}\,\vec{n}\; dS = \iint\limits_{\Omega} \vec{v}\,(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\; du\,dv$. Platí $\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\vec{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, c)$ a $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (c\sin v, -c\cos v, u)$. Tedy

$$I = \int_a^b\!\!\int_0^{2\pi} (u\cos v, u\sin v, cv)\,(c\sin v, -c\cos v, u)\; du\,dv = \int_a^b\!\!\int_0^{2\pi} c\,v\,u\; du\,dv = (b^2 - a^2)c\pi.$$

6.3 Gaussova věta

<u>*Příklad 51*</u>: Pomocí Gaussovy věty vypočítejte integrál

$$I = \iint\limits_{S^+} x^3\; dydz + y^3\; dxdz + z^3\; dxdy\,,$$

kde S je povrch koule o poloměru R se středem v počátku souřadné soustavy.

Řešení: Použijeme Gaussovu větu ve tvaru $\iint\limits_{S^+} \vec{v}\,\vec{n}\, dS = \iiint\limits_{V} \operatorname{div}\vec{v}\; dV$ pro funkci $\vec{v} = (x^3,\ y^3,\ z^3)$. Potom $\operatorname{div}\vec{v} = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ a přechodem ke sférickým

souřadnicím $x=\varrho\cos u\cos v, y=\varrho\sin u\cos v,\ z=\varrho\sin v,\ u\in[0,2\pi),\ v\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $\varrho\in[0,R]\,,\ dV=\varrho^2\cos v\,dudvd\varrho$ dostaneme

$$I=\iiint\limits_V 3(x^2+y^2+z^2)\ dV=3\int\limits_0^R\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\varrho^2\,\varrho^2\cos v\ d\varrho dvdu=\frac{12\pi R^5}{5}\,.$$

Pokud počítáme dvojný integrál druhého druhu přímo, pak opět přechodem ke sférickým souřadnicím (nyní $\varrho=R$) dostaneme

$$\iint\limits_{S^+} x^3\ dydz+y^3\ dxdz+z^3\ dxdy=\iint\limits_{S^+}(x^3,y^3,z^3)\,\vec{n}\ dS=$$

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^3 u\cos^3 v,\sin^3 u\cos^3 v,\sin^3 v)\cdot(\cos u\cos v,\sin u\cos v,\sin v)R^5\cos v\,dvdu=$$

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^4 u\cos^4 v+\sin^4 u\cos^4 v+\sin^4 v)\cdot R^5\cos v\ dvdu=$$

$$R^5\Big(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\Big(\frac{1+\cos 2u}{2}\Big)^2+\Big(\frac{1-\cos 2u}{2}\Big)^2\Big)\cos^5 v\ dvdu+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\sin^4 v\cdot\cos v\ dvdu\Big)=$$

$$R^5\Big(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 v)^2\cos v\ dv\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1+\cos 4u}{4}\Big)\ du+\Big[\frac{t^5}{5}\Big]_{-1}^{1}2\pi\Big)=\frac{12\pi R^5}{5}\,.$$

Teorie

<u>*Příklad 52*</u>: Vypočítejte integrál $I=\iint\limits_{S^+} xz\ dydz+x^2y\ dxdz+y^2z\ dxdy$, kde plocha S je vnější strana povrchu tělesa daného nerovnostmi $x\geq 0,\ y\geq 0,\ 0\leq z\leq x^2+y^2,\ x^2+y^2\leq 4$.

Řešení: Použijeme Gaussovu větu ve tvaru $\iint\limits_S \vec{v}\vec{n}\ dS=\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{v}\ dV$, neboli $\vec{v}=(xz,\ x^2y,\ y^2z)$, $\operatorname{div}\vec{v}=z+x^2+y^2$ a přechod k polárním souřadnicím $x=\varrho\cos t,\ y=\varrho\sin t,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \varrho\in[0,2]$. Tedy

$$I=\iiint\limits_V z+x^2+y^2\ dV=\iint\limits_{S_{xy}}\int\limits_0^{x^2+y^2} z+x^2+y^2\ dzdxdy=\int\limits_0^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}\varrho^4\,\varrho\ dtd\varrho=8\pi\,.$$

<u>Příklad 53</u> : Vypočtěte objem tělesa vymezeného plochou $x = (b+a\cos v)\cos u$, $y = (b + a\cos v)\sin u,\ z = a\sin v,\ \ u \in [0, 2\pi], v \in [0, 2\pi],\ 0 < a \leq b$ a rovinami $x = 0,\ z = 0$.

Řešení: Z Gaussovy věty plyne pro objem tělesa $\operatorname{meas}(V) = \frac{1}{3}\iint\limits_{S^+}(x, y, z)\,\vec{n}\ dS$.

Spočítáme jednotkový vektor vnější normály $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|}$, tedy

$$\vec{n} = \frac{(-(b + a\cos v)\sin u, (b + a\cos v)\cos u, 0) \times a(-\sin v\cos u, -\sin v\sin u, \cos v)}{a\|((b + a\cos v)\cos u\cos v, (b + a\cos v)\sin u\cos v, (b + a\cos v)\sin v)\|}$$
$$= \frac{((b + a\cos v)\cos u\cos v, (b + a\cos v)\sin u\cos v, (b + a\cos v)\sin v)}{(b + a\cos v)} .$$

Zároveň platí $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, dudv$. Po dosazení dostaneme $\operatorname{meas}(V) =$

$$\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \begin{array}{l}((b + a\cos v)\cos u, (b + a\cos v)\sin u, a\sin v)\\ \cdot a((b + a\cos v)\cos u\cos v, (b + a\cos v)\sin u\cos v, (b + a\cos v)\sin v)\end{array}\ dudv =$$

$$\frac{a}{3}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}((b+a\cos v)^2\cos v + (b+a\cos v)\,a\sin^2 v)\, dudv = \frac{a}{3}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(b+a\cos v)(b+a)\, dudv.$$

Tedy $\operatorname{meas}(V) = \frac{4}{3}ab(b + a)\pi^2$.

6.4 Stokesova věta

<u>Příklad 54</u> : Pomocí Stokesovy věty vypočtěte integrál $I = \oint\limits_{\mathcal{K}^+}(y-z, z-x, x-y)\, d\vec{r}$, kde křivka $\mathcal{K}^+$ je dána rovnicemi $x^2 + y^2 = a^2,\ \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1\, , a > 0, b > 0$.

Teorie

<u>Příklad 55</u> : Vypočítejte práci vektorového pole $\vec{v} = (x + y, 2x - z, y + z)$ po uzavřené křivce $\mathcal{K}$, která je tvořena obvodem trojúhelníka $A[2, 0, 0]$, $B[0, 3, 0]$, $C[0, 0, 6]$. Orientace pohybu je dána pořadím vrcholů trojúhelníka.

Řešení: K výpočtu použijeme Stokesovu větu ve tvaru $\oint\limits_{\partial S^+} \vec{v}\,\vec{\tau}\ ds = \iint\limits_{S^+} \operatorname{rot}\vec{v}\,\vec{n}\ dS$.

Platí $\operatorname{rot}\vec{v} = (2, 0, 1)$ a $\vec{n} = \frac{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|} = \frac{6(3,2,1)}{6\sqrt{14}}$. Tedy

$$I = \iint\limits_S (2, 0, 1)\cdot\frac{(3, 2, 1)}{\sqrt{14}}\, dS = \frac{7}{\sqrt{14}}\operatorname{meas}(S) = \frac{7}{\sqrt{14}}\,\frac{\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}{2} = 21\, .$$

7 Nezávislost na cestě

Příklad 56 : Určete číslo a tak, aby integrál $\int\limits_{\mathcal{K}} \frac{dx+ady}{x+3y}$ byl nezávislý na cestě na množině Ω dané nerovností $x+3y>0$.

Řešení: Hledáme funkci $f=f(x,y)$ takovou, aby $\operatorname{grad} f = (\frac{1}{x+3y}, \frac{a}{x+3y})$, neboli $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+3y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{a}{x+3y}$. Po integrování dostaneme $f(x,y) = \ln|x+3y| + C(y)$ a $f(x,y) = \frac{a}{3}\ln|x+3y| + C(x)$. Odtud plyne $a = 3$.

Teorie

Příklad 57 : Najděte vektorové pole, jehož potenciál je $f(x,y) = 5\sqrt{x^2+y^2}$ a vypočítejte práci tohoto pole po křivkách a) z bodu $A[3,4]$ do bodu $B[-2,0]$ b) z bodu $A[3,4]$ do bodu $B[\sqrt{21},2]$.

Řešení: Pro hledané vektorové pole $\vec{v}$ platí $\vec{v} = \operatorname{grad} f = (5\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 5\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ a pro jeho práci W platí $W = f(B) - f(A)$, tedy a) $W = |5\cdot 2 - 5\cdot 5| = 15$, b) $W = |5\cdot 5 - 5\cdot 5| = 0$.

Příklad 58 : Spočítejte křivkový integrál $I = \int\limits_{\mathcal{K}^+} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, po úsečce $\mathcal{K}$ spojující bod $A[0,1]$ a bod $B[2,2]$. Potom ověřte, že integrovaná vektorová funkce je potenciální a na základě této informace opět spočítejte daný integrál.

Řešení: Parametrizujeme úsečku $\mathcal{K}$: $x = 0+2t$, $y = 1+t$, $t\in[0,1]$, potom

$$I = \int\limits_{\mathcal{K}^+} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy = \int\limits_0^1 [(2t+1+t)\cdot 2 + 2t - 1 - t]\,dt = \frac{9}{2}.$$

Aby vektorová funkce $\vec{v} = (x+y, x-y)$ byla potenciální, musí platit $\frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}$, což je splněno $(1 = 1)$. Najdeme tedy potenciál f, pro který platí $f(x,y) = \int x+y\,dx = \frac{x^2}{2} + yx + C(y)$ a zároveň $f(x,y) = \int x-y\,dy = yx - \frac{y^2}{2} + C(x)$. Tudíž $f(x,y) = \frac{x^2+2xy-y^2}{2}$ a pro daný integrál platí

$$I = \int\limits_{\mathcal{K}^+} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy = f(B) - f(A) = \frac{2^2+8-2^2}{2} - \frac{-1^2}{2} = \frac{9}{2}.$$

8 Tenzory

8.1 Sdružené báze

<u>*Příklad 59*</u>: Najděte kontravariantní a kovariantní souřadnice vektoru $\vec{v} = (1, 2)$, jestliže zobrazení $\Phi : \vec{q} \to \vec{r}$ je dáno rovnicemi $\begin{aligned} r^1 &= 2q^1 - q^2 \\ r^2 &= 3q^1 + q^2 \,. \end{aligned}$

Teorie

Řešení: Vektory křivočaré (kontravariantní) báze jsou definované předpisem $\hat{\vec{e}}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$, $i = 1, 2, 3$ a tvoří sloupce Jacobiovy matice $J_\Phi = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, tedy $\hat{\vec{e}}_1 = (2, 3)\,, \hat{\vec{e}}_2 = (-1, 1)\,.$

Vektory sdružené (kovariantní) báze jsou definované předpisem $\hat{\vec{e}}^{\,i} = \nabla q^i$, $i = 1, 2, 3$ a tvoří řádky inverzní Jacobiovy matice $J_{\Phi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, odtud $\hat{\vec{e}}^{\,1} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5})\,, \hat{\vec{e}}^{\,2} = (-\frac{3}{5}, \frac{2}{5})\,.$

Pro kontravariantní souřadnice $\widehat{v}^{\,1}, \widehat{v}^{\,2}$ vektoru $\vec{v}$ platí $\vec{v} = \widehat{v}^{\,1}\hat{\vec{e}}_1 + \widehat{v}^{\,2}\hat{\vec{e}}_2$, neboli $(1, 2) = \widehat{v}^{\,1}(2, 3) + \widehat{v}^{\,2}(-1, 1)$. Odtud dostaneme $\widehat{v}^{\,1} = \frac{3}{5}$, $\widehat{v}^{\,2} = \frac{1}{5}$.
Rychleji můžeme získat kontravariantní souřadnice pomocí vztahu $\widehat{v}^{\,i} = \frac{\partial q^i}{\partial r^j} v^j$, $i = 1, 2$, tedy $\widehat{v}^{\,1} = \frac{1}{5}\,1 + \frac{1}{5}\,2 = \frac{3}{5}$ a $\widehat{v}^{\,2} = -\frac{3}{5}\,1 + \frac{2}{5}\,2 = \frac{1}{5}$.

Pro kovariantní souřadnice $\widehat{v}_1, \widehat{v}_2$ vektoru $\vec{v}$ platí $\vec{v} = \widehat{v}_1\hat{\vec{e}}^{\,1} + \widehat{v}_2\hat{\vec{e}}^{\,2}$, neboli $(1, 2) = \widehat{v}_1(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}) + \widehat{v}_2(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$, tedy $\widehat{v}_1 = 8$, $\widehat{v}_2 = 1$.
Nebo dostaneme kovariantní souřadnice ze vztahu $\widehat{v}_i = \frac{\partial r^j}{\partial q^i} v^j$, $i = 1, 2$, odtud $\widehat{v}_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$ a $\widehat{v}_2 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 1$.

<u>*Příklad 60*</u>: Uvažujte transformaci Φ, vektor $\vec{v}$ z předchozího příkladu. Najděte prvky g_{ij}, g^{ij} fundamentální matice G, k ní inverzní G^{-1} a ověřte pro vektor $\vec{v}$ vlastnost snížení a zvýšení indexu při přechodu od kontravariantních souřadnic ke kovariantním a naopak.

Řešení: Pro prvky fundamentální matice platí $g_{ij} = \hat{\vec{e}}_i\hat{\vec{e}}_j$, pro prvky inverzní matice platí $g^{ij} = \hat{\vec{e}}^{\,i}\hat{\vec{e}}^{\,j}$, tedy
$g_{11} = (2, 3) \cdot (2, 3) = 13$, $g_{12} = (2, 3) \cdot (-1, 1) = 1$, $g_{21} = 1$, $g_{22} = (-1, 1) \cdot (-1, 1) = 2$.
Podobně
$g^{11} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}) \cdot (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}) = \frac{2}{25}$, $g^{12} = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}) \cdot (-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}) = \frac{-1}{25}$, $g^{21} = \frac{1}{25}$, $g^{22} = (-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}) \cdot (-\frac{3}{5}, \frac{2}{5}) = \frac{13}{25}$.

Dále máme ověřit snížení indexu $\widehat{v}_j = g_{ji}\widehat{v}^{\,i}$ a zvýšení indexu $\widehat{v}^{\,i} = g^{ij}\widehat{v}_j$.
Neboli pro snížení indexu $8 = 13 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{1}{5}$, $1 = 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5}$ a pro zvýšení indexu $\frac{3}{5} = \frac{2}{25} \cdot 8 + \frac{-1}{25} \cdot 1$, $\frac{1}{5} = \frac{-1}{25} \cdot 8 + \frac{13}{25} \cdot 1$, vše platí.