Sbírka příkladů k semináři diferenciálních rovnic

Petr Tomiczek

Obsah

10 Diferenciální rovnice 1. řádu

10.1 Separace proměnných

<u>*Příklad 1*</u> : Najděte obecné řešení (obecný integrál) diferenciální rovnice

$$y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y\,.$$

Teorie

Separací proměnných převedeme rovnici na tvar

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \;\Rightarrow\; \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

a substitucemi $u = \sin y$, $v = \cos x$ dostaneme po integrování

$$\ln|u| = -\ln|v| + \ln C\,, \qquad \text{neboli} \qquad \sin y = \frac{C}{\cos x} \qquad \text{(obecný integrál).}$$

2. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ $\quad\big[1 + y^2 = C(1 - x^2)\big]$
3. $xyy' = 1 - x^2$ $\quad\big[x^2 + y^2 = \ln Cx^2\big]$
4. $y' \operatorname{tg} x - y = a$ $\quad[y = C\sin x - a]$
5. $xydx + (x + 1)dy = 0$ $\quad[y = C(x + 1)e^{-x}]$
6. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$ $\quad\Big[\ln|x| = C + \sqrt{y^2 + 1}; x = 0\Big]$
7. $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$ $\quad\big[1 + e^y = C(1 + x^2)\big]$
8. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0\,,\; y(0) = 1$ $\quad\big[y\{\ln(1 - x^2) + 1\} = 1\big]$
9. $y' \sin x = y \ln y\,,\; y(\frac{\pi}{2}) = e$ $\quad\big[y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\big]$
10. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx\,,\; y(0) = \frac{\pi}{4}$ $\quad\big[\cos x = \sqrt{2}\cos y\big]$
11. $y' \operatorname{cotg} x + y = 2\,,\; y(\frac{\pi}{3}) = 0$ $\quad[y = 2 - 4\cos x]$

Řešení pomocí WolframAlpha

10.2 Rovnice umožnující přechod k separaci proměnných.

Příklad 12 : Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2(x+y)}\,.$$

Teorie

Substitucí $x + y = u\,,\ 1 + y' = u'$ převedeme rovnici na tvar

$$u' - 1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2u} \ \Rightarrow\ \frac{du}{dx} = \frac{1-u}{2u}\,.$$

Separaci proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{2u}{1-u}\,du = \int 1\,dx\,, \qquad \text{neboli} \qquad -2u - 2\ln|1-u| = x - C$$

a přejdeme k původním proměnným $\ 3x + 2y + 2\ln|1-x-y| = C\,.$

Příklad 13 : Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(x+y+2)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0\,.$$

Substitucí $x + y = u\,,\ dx + dy = du$ převedeme rovnici na tvar

$$(u+2)\,dx + (2u-1)(du-dx) = 0 \ \Rightarrow\ (3-u)\,dx + (2u-1)\,du = 0\,.$$

Separaci proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{2u-1}{3-u}\,du + \int 1\,dx = -C\,, \qquad \text{neboli} \qquad -2u - 5\ln|u-3| + x = -C$$

a přejdeme k původním proměnným $\ x + 2y + 5\ln|x+y-3| = C\,.$

14. $y' - y = 2x - 3$ $\qquad [2x + y - 1 = Ce^x]$

15. $y' = \sin(x-y)$ $\qquad \left[x + C = \frac{1+\sin(x-y)}{\cos(x-y)}\right]$

16. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$ $\qquad \left[\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x + C\right]$

17. $y' = \cos(x-y-1)$ $\qquad \left[y = x - 1 - 2\,\mathrm{arcotg}(\frac{1}{C-x}) + 2k\pi; k \in Z\right]$

18. $y'\sqrt{1+x+y} = x + y - 1$ $\qquad \left[x + C = 2u + \frac{2}{3}\ln|u-1| - \frac{8}{3}\ln(u+2)\right]$
$\left[u = \sqrt{1+x+y}\right]$

WolframAlpha

Příklad 19 : Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{x^2 + 2xy}{xy}\,.$$

Teorie

Substitucí $y = ux$, $y' = u'x + u$ převedeme rovnici na tvar

$$u'x + u = -\frac{x^2 + 2xux}{xux} \;\Rightarrow\; \frac{u\,du}{(u+1)^2} = -\frac{dx}{x}\,.$$

Integrováním dostaneme

$$\int \frac{u+1-1}{(u+1)^2}\,du = \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = -\ln|x| + C$$

a přejdeme k původním proměnným

$$\ln|\frac{y}{x} + 1| + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} = -\ln|x| + C \;\Rightarrow\; \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C\,.$$

20. $y' = \frac{x+y}{x-y}$ $\left[\operatorname{arcotg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}\right]$

21. $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ $\left[x^2 + y^2 = Cy\right]$

22. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$ $\left[x^2 = C^2 + 2Cy)\right]$

23. $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$ $\left[(x+y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}\right]$

24. $(x^2+y^2)y' = 2xy$ $\left[y^2 - x^2 = Cy\,,\ y = 0\right]$

25. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$ $\left[\ln Cx = \operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x})\right]$ $\left[y = xe^{2k\pi}, k \in Z\right]$

26. $y + \sqrt{x^2+y^2} - xy' = 0\,,\ y(1) = 0$ $\left[y = \frac{x^2-1}{2}\right]$

27. $(xy' - y)\operatorname{arcotg}\frac{y}{x} = x\,,\ y(1) = 0$ $\left[\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arcotg}\frac{y}{x}}\right]$

28. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0\,,\ y(0) = 1$ $\left[y^3 = y^2 - x^2\right]$

29. $y' = \frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}\,,\ y(1) = 1$ $\left[y = -x\right]$

WolframAlpha

10.3 Variace konstant

Příklad 30 : Metodou variace konstanty řešte diferenciální rovnici

$$y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x \,.$$

Teorie

Nejdříve vyřešíme homogenní rovnici metodou separace proměnných

$$y' \cos^2 x + y = 0 \;\Rightarrow\; \ln y + \operatorname{tg} x = \ln C \;\Rightarrow\; y = Ce^{-tgx} \,.$$

Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y = C(x)e^{-tgx}$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(C'(x)e^{-tgx} + C(x)e^{-tgx}\frac{1}{\cos^2 x}) \cos^2 x + C(x)e^{-tgx} = \operatorname{tg} x \,.$$

tedy

$$C'(x)e^{-tgx} \cos^2 x = \operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; C(x) = e^{tgx}(tgx - 1) + K \,.$$

Obecné řešení rovnice má tvar $y = Ce^{-tgx} + \operatorname{tg} x = 1$.

31. $xy' - 2y = 2x^4$ $\quad\left[y = Cx^2 + x^4\right]$

32. $xy' + y + 1 = 0$ $\quad\left[y = \frac{C}{x} - 1\right]$

33. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$ $\quad\left[xy = (x^3 + C)e^{-x}\right]$

34. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$ $\quad[y = e^x(\ln|x| + C)]$

35. $y = x(y' - x\cos x)$ $\quad[y = x(C + \sin x)]$

36. $(xy' - 1)\ln x = 2y$ $\quad\left[y = C\ln^2 x - \ln x\right]$

37. $y \sin x + y' \cos x = 1$ $\quad[y = \sin x + C\cos x]$

38. $(2e^y - x)y' = 1$ $\quad\left[x = e^y + Ce^{-y}\right]$

39. $y' = \frac{y}{3x - y^2}$ $\quad\left[x = Cy^3 + y^2\right]$

40. $y' = \frac{1}{x\sin y + 2\sin 2y}$ $\quad\left[x = 8\sin^2\frac{y}{2} + Ce^{-\cos y}\right]$

41. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^{-3}}\,,\; y(1) = 1$ $\quad\left[y = -\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}\right]$

42. $y' - 2xy = 1\,,\; y(0) = 0$ $\quad\left[y = e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt\right]$

43. $2\sqrt{x}y' - y = -\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}\,,\; y$ je omezená pro $\to \infty$ $\quad[y = \cos\sqrt{x}]$

44. $2x^2y' - xy = 2x\cos x - 3\sin x\,,\; y \to 0$ pro $x \to \infty$ $\quad\left[y = \frac{\sin x}{x}\right]$

45. $(1+x^2)\ln(1+x^2)y' - 2xy = \ln(1+x^2) - 2x\operatorname{arcotg} x$ $\quad[y = \operatorname{arcotg} x]$
$\left[y \to -\frac{\pi}{2}\right.$ pro $\left.x \to -\infty\right]$

WolframAlpha

10.4 Bernoulliova rovnice

Příklad 46: Převodem na lineární diferenciální rovnici vyřešte

$$x\,y' - y = x^2\,y^{-1}\,.$$

Teorie

Substitucí $z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$ dostaneme

$$xy'y - y^2 = x^2 \quad\Rightarrow\quad xz' - 2z = 2x^2\,.$$

Vyřešíme lineární rovnici

1. hom. rovnice	2. part. řešení
$xz' - 2z = 0$	$x\,C'\,x^2 = 2x^2$
$z_h = C\,x^2$	$C = \ln\|x\|^2$
	$z_p = \ln x^2 \cdot x^2$

3. obecné řešení

$$z = C\,x^2 + \ln(x^2)\,x^2 \;\Rightarrow\qquad y^2 = C\,x^2 + \ln(x^2)\,x^2\,.$$

47. $y' + 2y = y^2 e^x$ $\quad\left[y(e^x + Ce^{2x}) = 1, y = 0\right]$
48. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$ $\quad\left[y = x^4 \ln^2 Cx, y = 0\right]$
49. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$ $\quad\left[y^{-2} = x^4(2e^x + C), y = 0\right]$
50. $(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2$ $\quad\left[\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(C - \frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))\right]$

WolframAlpha

11 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

11.1 Systémy funkcí

Příklad 51 : Máme rozhodnout o lineární závislosti nebo nezávislosti funkcí $1, x, x^2$ na intervalu $I = (-\infty, \infty)$.

Teorie

Budeme zkoumat, kdy $\forall\, x \in I$ nastane rovnost

$$c_1\, 1 + c_2\, x + c_3\, x^2 = 0\,.$$

Postupně pro $x = 0$ dostaneme $c_1 = 0$, pak pro $x = 1$ a $x = -1$ dostaneme $c_2 + c_3 = 0$ a $-c_2 + c_3 = 0$. Odtud plyne $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Podle definice jsou funkce $1, x, x^2$ lineárně nezávislé. Wronskián daných funkcí je

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0\,.$$

Tedy i podle věty 10.4 jsou funkce $1, x, x^2$ lineárně nezávislé.

Rozhodněte o lineární závislosti nebo nezávislosti následujících funkcí

52. $1, 2, x, x^2$ [závislé]

53. e^x, xe^x, x^2e^x [nezávislé]

54. $5, \cos^2 x, \sin^2 x$ [závislé]

55. $\cos x, \cos(x+1), \cos(x-2)$ [závislé]

56. $1, \arcsin x, \arccos x$ [závislé]

57. $\cos x, \sin x, \cos 2x$ [nezávislé]

Najděte Wronskián funkcí

58. $1, x$ $[1]$

59. e^{-x}, xe^{-x} $\left[e^{-2x}\right]$

60. $2, \cos x, \cos 2x$ $\left[-8\sin^3 x\right]$

61. $4, \sin^2 x, \cos 2x$ $[0]$

62. $e^{-3x}\sin 2x, e^{-3x}\cos 2x$ $\left[-2e^{-6x}\right]$

WolframAlpha

11.2 Eulerova rovnice

Řešení Eulerovy rovnice $x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x\, y' + a_0 y = 0$, kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$, (popř. $x^\lambda \ln x, \ldots, x^\lambda \ln^{k-1} x$) $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorie

Příklad 63: Dosazením funkce $y(x) = x^\lambda$ do rovnice

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$$

dostaneme $x^2 \lambda(\lambda - 1) x^{\lambda-2} - 4x\lambda x^{\lambda-1} + 6x^\lambda = 0$, tedy

$$(\lambda^2 - 5\lambda + 6)\, x^\lambda = 0\,.$$

Tato rovnost je splněna (při $x \neq 0$) pro kořeny $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, uvedeného polynomu. Funkce $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ tvoří fundamentální systém dané rovnice a její obecné řešení má tvar

$$y = C_1\, x^2 + C_2\, x^3\,.$$

Příklad 64: Podobně při řešení rovnice $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ dostaneme $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ a fundamentální systém rovnice je tvořen funkcemi $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 \ln x$. Obecné řešení má tedy tvar $y = C_1\, x^2 + C_2\, x^2 \ln x$.

Příklad 65: Řešení rovnice $x^2 y'' + 3xy' + 2y = 0$ hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$. Po dosazení do rovnice dostaneme $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$. Do fundamentálního systému tedy patří funkce $y_1(x) = x^{-1+i}$, $y_2(x) = x^{-1-i}$ nebo $y_1(x) = x^{-1} \cos(\ln x)$, $y_2(x) = x^{-1} \sin(\ln x)$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = \frac{C_1}{x} \cos(\ln x) + \frac{C_2}{x} \sin(\ln x)\,.$$

66. $x^2 y'' - 3xy' - y = 0$ $\quad\left[y = C_1 x^{2+\sqrt{5}} + C_2 x^{2-\sqrt{5}}\right]$

67. $x^3 y''' + x^2 y'' = 0$ $\quad[y = C_1 + C_2 x + C_3 x \ln x]$

68. $x^2 y'' + 5xy' + 3y = 0$ $\quad\left[y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-3}\right]$

69. $x^2 y'' + 7xy' + 8y = 0$ $\quad\left[y = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-4}\right]$

70. $x^3 y''' - 6y = 0$ $\quad\left[y = C_1 x^3 + C_2 \cos(\sqrt{2} \ln x) + C_3 \sin(\sqrt{2} \ln x)\right]$

71. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$ $\quad[y = x]$

WolframAlpha

11.3 Rovnice s konstantními koeficienty

Příklad 72: Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$y'' - y' - 12y = 0$$

hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ (popř. $x\mathrm{e}^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$), kde číselný parametr λ je kořenem **charakteristické rovnice (charakteristického polynomu)**

$$\lambda^2 - \lambda + 12 = 0.$$

Tedy $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$, fundamentální systém rovnice je tvořen funkcemi e^{-4x}, e^{3x} a obecné řešení rovnice má tvar

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2\mathrm{e}^{3x}.$$

Teorie

Příklad 73: Rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$. Fundamentální systém rovnice je nyní tvořen funkcemi $y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Příklad 74: K rovnici $y'' + 4y = 0$ přísluší charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4 = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Fundamentální systém je tvořen funkcemi $y_1(x) = \mathrm{e}^{2ix}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-2ix}$ nebo $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$. Obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

75. $y''' - y'' - y' + y = 0;\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3$ $\quad [y = e^x(1+x)]$
76. $y'' - 4y' + 3y = 0;\ \ y(0) = 6,\ y'(0) = 10$ $\quad \left[y = 4e^x + 2e^{3x}\right]$
77. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ $\quad \left[y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}\right]$
78. $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$ $\quad \left[y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6x)\right]$
79. $4y'' - 8y' + 5y = 0$ $\quad \left[y = e^x(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2})\right]$
80. $y''' - 8y = 0$ $\quad \left[y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x + C_3\sin\sqrt{3}x\right]$
81. $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$ $\quad \left[y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + (C_3\cos 2x + C_4\sin 2x)e^{-x}\right]$
82. $y'' - 2y' + 2y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1$ $\quad [y = e^x\sin x]$
83. $y'' - 2y' + 3y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 3$ $\quad \left[y = e^x(\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x)\right]$

WolframAlpha

11.4 Metoda snižování řádu

Pokud známe jedno řešení $y_1(x)$ homogenní rovnice, pak další partikulární řešení hledáme ve tvaru $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$.

Teorie

Příklad 84 : Rovnice $(\sin x - \cos x)\, y'' - 2\sin x\, y' + (\cos x + \sin x)\, y = 0$ má jedno řešení $y_1 = \mathrm{e}^x$. Pro druhé řešení $y(x) = \mathrm{e}^x z(x)$, platí $y' = \mathrm{e}^x(z + z')$, $y'' = \mathrm{e}^x(z + 2z' + z'')$ a po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(\sin x - \cos x)\, \mathrm{e}^x(z + 2z' + z'') - 2\sin x\, \mathrm{e}^x(z + z') + (\cos x + \sin x)\, \mathrm{e}^x z = 0 \;\Rightarrow$$

$$(\sin x - \cos x)\,(2z' + z'') - 2\sin x\, z' = 0 \;\Rightarrow (u = z')$$

$$(\sin x - \cos x)\, u' - \cos x\, 2u = 0 \Rightarrow (\sin x - \cos x)\, du = \cos x\, 2u\, dx \;\Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{2u}\, du = \int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\, dx\,; \qquad \text{vypočteme integrál vpravo}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{\sin x - \cos x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x + \cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}\, dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{c} v = \sin x - \cos x \\ dv = (\cos x + \sin x)\, dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int -1\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\, dv = -\frac{x}{2} + \ln|\sin x - \cos x| + C\,;$$

tedy $\quad \dfrac{1}{2}\ln u = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln|\sin x - \cos x| + \hat{C} \;\Rightarrow\; u = C\mathrm{e}^{-x}(\sin x - \cos x)\ (= z') \;\Rightarrow$
$z = C\mathrm{e}^{-x}(-\sin x) \;\Rightarrow y = \mathrm{e}^x C\mathrm{e}^{-x}(-\sin x) = -C\sin x$ a obecné řešení má tvar

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\sin x\,.$$

Nalezněte obecné řešení následujících rovnic, jestliže znáte partikulární řešení

85. $(1 - x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4}y = 0\,;\quad y_1 = \sqrt{1 + x}$ $\quad \left[y = C_1\sqrt{1 + x} + C_2\sqrt{1 - x}\right]$

86. $x^2(x + 1)y'' - 2y = 0\,;\quad y_1 = \frac{1+x}{x}$ $\quad \left[y = C_1(\frac{1+x}{x}) + C_2(\frac{x^2+x-1}{x} - \frac{2(x+1)\ln|x+1|}{x})\right]$

87. $xy'' + 2y' - xy = 0\,;\quad y_1 = \frac{e^x}{x}$ $\quad [xy = C_1e^{-x} + C_2e^x]$

88. $y'' - 2(1 + \mathrm{tg}^2\, x)y = 0\,;\quad y_1 = \mathrm{tg}\, x$ $\quad [y = C_1\,\mathrm{tg}\, x + C_2(1 + x\,\mathrm{tg}\, x)]$

89. $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0\,;\quad y_1 = e^x - 1$ $\quad \left[y = C_1(e^x - 1) + \frac{C_2}{e^x+1}\right]$

90. $x^2(2x - 1)y''' + (4x - 3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$ $\left[y = C_1x + \frac{C_2}{x} + C_3(x\ln|x| + 1)\right]$
$\left[y_1 = x, y_2 = \frac{1}{x}\right]$

91. $(x^2 - 2x + 3)y''' - (x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ $\left[y = C_1x + C_2e^x + C_3(x^2 - 1)\right]$
$[y_1 = x, y_2 = e^x]$

WolframAlpha

11.5 Nehomogenní rovnice

Teorie

Příklad 92 : Metodou variace konstant vyřešíme rovnici

$$y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}\,.$$

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice $y'' + 9y = 0$ (viz metoda charakteristické rovnice, příklad (72))
$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow y_h(x) = C_1\,\cos 3x + C_2\,\sin 3x\,.$$
2. Partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru
$$y_p(x) = C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x\,.$$
Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ splňují soustavu algebraických rovnic:
$$\begin{aligned} C_1'\cos 3x + C_2'\sin 3x &= 0 &\Rightarrow\quad 3C_1'\cos 3x\sin 3x + 3C_2'\sin^2 3x &= 0\,,\\ -3C_1'\sin 3x + 3C_2'\cos 3x &= \tfrac{1}{\sin 3x} &\Rightarrow -3C_1'\sin 3x\cos 3x + 3C_2'\cos^2 3x &= \tfrac{\cos 3x}{\sin 3x}\,. \end{aligned}$$
Odtud po sečtení rovnic dostaneme $3C_2' = \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|$ a z první rovnice plyne $C_1'\cos 3x + \frac{\cos 3x}{3} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{x}{3}$. Partikulární řešení má tvar
$$y_p(x) = -\frac{x}{3}\,\cos x + \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|\,\sin 3x\,.$$
3. Obecným řešením úlohy je funkce
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\,\cos 3x + C_2\,\sin 3x - \frac{x}{3}\,\cos 3x + \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|\,\sin 3x\,.$$

Řešte rovnice

93. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$ $\quad [y = e^x(x\ln|x| + C_1x + C_2)]$

94. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$ $\quad \left[y = e^x(C_1x + C_2 - \ln\sqrt{x^2+1} + x\,\mathrm{arctg}\,x)\right]$

95. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$ $\quad \left[y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x+1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}\right]$

96. $y'' + y + \mathrm{cotg}^2\,x = 0$ $\quad \left[y = 2 + C_1\cos x + C_2\sin x + \cos(x)\ln|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}|\right]$

Vyřešte rovnici $y'' - y' = f(x)$, jestliže

97. $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ $\quad [y = e^x(x + C_1) - (e^x+1)\ln(e^x+1) + C_2]$

98. $f(x) = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$ $\quad \left[y = \frac{1}{2}e^x(\arcsin(e^x) + e^x\sqrt{1-e^{2x}} + C_1) + \frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3} + C_2\right]$

99. $f(x) = e^{2x}\cos(e^x)$ $\quad [y = C_1e^x - \cos(e^x) + C_2]$

WolframAlpha

11.6 Metoda odhadu tvaru partikulárního řešení

Teorie

<u>*Příklad 100*</u> : Pomocí odhadu tvaru partikulárníbo řešení vyřešíme rovnici

$$y'' - 5y' = (x-1)^2 .$$

1. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, má kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ a homogenní řešení má tvar
$$y_h = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{5x} .$$

2. Z rovnosti
$$(x-1)^2 = \mathrm{e}^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$
vyplývá $a = 0$, $b = 0$, $n = 2$, $m = 0$ $\Rightarrow$ $k = 2$, $R_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, kde a_2, a_1, a_0 jsou konstanty. Kritické číslo $a + i\,b = 0$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, tedy $r = 1$.

   Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru
$$y_p(x) = x\,(a_2x^2 + a_1x + a_0) ,$$
potom $y_p'(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 + x\,(2a_2x + a_1) = 3a_2x^2 + 2a_1x + a_0$, $y_p''(x) = 6a_2x + 2a_1$. Po dosazení y_p', y_p'' do dané rovnice dostaneme:
$$6a_2x + 2a_1 - 5\,(3a_2x^2 + 2a_1x + a_0) = (x-1)^2 ,$$
$$-15a_2x^2 + (6a_2 - 10a_1)x + 2a_1 - 5a_0 = x^2 - 2x + 1 ,$$
$$\Rightarrow \quad a_2 = \tfrac{-1}{15} ,\ a_1 = \tfrac{4}{25} ,\ = a_0 = \tfrac{-17}{125} ,$$
a partikulárním řešením je funkce $\quad y_p(x) = x\,(\frac{-1}{15}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{-17}{125})$.

3. Obecné řešení má tvar $\quad y(x) = C_1 + C_2\,x\mathrm{e}^{5x} + x\,(\frac{-1}{15}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{-17}{125})$.

Metodou odhadu řešte rovnice

101. $y'' + y = 4xe^x$ $\qquad [y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x-2)e^x]$

102. $y'' - y = 2e^x - x^2$ $\qquad \left[y = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x + x^2 + 2\right]$

103. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$ $\qquad \left[y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + (\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3})e^x\right]$

104. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ $\qquad \left[y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{\sin x}{10} + \frac{3\cos x}{10}\right]$

105. $y'' + y = 4\sin x$ $\qquad [y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x]$

106. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$ $\qquad \left[y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (\frac{x}{10} - \frac{12}{100})\cos x - (\frac{3x}{10} + \frac{34}{100})\sin x\right]$

107. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$ $\quad \left[y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5} e^{-4x} - (\frac{x}{6} + \frac{1}{36}) e^{-x}\right]$

108. $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$ $\quad \left[y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x}(\frac{6}{37} \sin x - \frac{1}{37} \cos x)\right]$

109. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$ $\quad \left[y = (C_1 + C_2 x + x^3) e^x\right]$

110. $y'' + y = x \sin x$ $\quad \left[y = (C_1 - \frac{x^2}{4}) \cos x + (C_2 + \frac{x}{4}) \sin x\right]$

Řešte rovnice s počáteční podmínkou

111. $y'' + 9y = 6e^{3x}\,;\ y(0) = y'(0) = 0$ $\quad \left[y = -\frac{1}{3}(\cos 3x + \sin 3x - e^{3x})\right]$

112. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x\,;\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3$ $\left[y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x) + (x+1)^2 e^x\right]$

113. $y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x\,;\ y(0) = y'(0) = 0$ $\left[y = (x + \frac{3}{5}) e^{-3x} + \frac{1}{5}(4 \sin x - 3 \cos x)\right]$

114. $y'' + 4y = \sin x\,;\ y(0) = y'(0) = 1$ $\quad \left[y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\sin 2x + \sin x)\right]$

115. $y'' + y = 2 \cos x\,;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ $\quad \left[y = \cos x + x \sin x\right]$

Odhadněte partikulární řešení následujících rovnic

116. $y'' - 7y' = (x-1)^2$ $\quad \left[A_1 x^3 + A_2 x^2 + A_3 x\right]$

117. $y'' + 7x' = e^{-7x}$ $\quad \left[Axe^{-7x}\right]$

118. $y'' - 8y' + 16y = (10 - x) e^{4x}$ $\quad \left[(A_1 x^3 + A_2 x^2) e^{4x}\right]$

119. $y'' + 25y = \cos 5x$ $\quad \left[x(A \cos 5x + B \sin 5x)\right]$

120. $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$ $\quad \left[(A \cos 2x + B \sin 2x) e^{2x}\right]$

121. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)$ $\quad \left[x(A \cos 2x + B \sin 2x) e^{2x}\right]$

122. $y^{(4)} - y''' = 4$ $\quad \left[Ax^3\right]$

123. $y''' + 2y'' + y' = (2x+1) \sin x + (x^2 - 4x) \cos x$ $\quad \left[(Ax^2 + Bx + C) \cos x + \right]$
$\left[+ (Dx^2 + Ex + F) \sin x\right]$

124. $y''' - y' = e^x \sin x + 2x^2$ $\quad \left[e^x(A \cos x + B \sin x) + \right]$
$\left[+ x(Cx^2 + Dx + E)\right]$

125. $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = e^x(x \cos x + \sin x)$ $\quad \left[x^2 e^x \{(Ax + B) \cos x + \right]$
$\left[+ (Cx + D) \sin x\}\right]$

126. $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 3 \cos 2x + 1$ $\left[x^2(A \cos 2x + B \sin 2x) + C\right]$
$\left[y = 3 \cos 2x + 1\right]$

WolframAlpha

11.7 Okrajové úlohy

Teorie

Příklad 127: Pomocí charakteristické rovnice a dosazením okrajových podmínek vyřešíme smíšenou okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} &y'' - 2y' - 8y = 0\,, \qquad x \in (0,1)\,,\\ &y(0) = 1\,,\quad y'(1) = 0\,. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4\,,\ \lambda_2 = -2$ a obecným řešením úlohy je funkce $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{4x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}$. Z okrajových podmínek dostaneme

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2\,,\\ 0 &= 4C_1\mathrm{e}^4 - 2C_2\mathrm{e}^{-2}\,, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_1 &= \tfrac{1}{1+2\mathrm{e}^6}\,,\\ C_2 &= \tfrac{2\mathrm{e}^6}{1+2\mathrm{e}^6}\,. \end{aligned}$$

Řešením okrajové úlohy je funkce $y(x) = \frac{1}{1+2\mathrm{e}^6}\,\mathrm{e}^{4x} + \frac{2\mathrm{e}^6}{1+2\mathrm{e}^6}\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Řešte následující okrajové úlohy

128. $y'' - y = 0\,;\ y(0) = 0, y(2\pi) = 1$ $\quad\left[y = \frac{\sinh x}{\sinh 2\pi}\right]$

129. $y'' + y = 0\,;\ y(0) = 0, y(2\pi) = 1$ $\quad$[nemá řešení]

130. $y'' - k^2y = 0\,;\ y(0) = v_1, y(x_0) = v_2$ $\quad\left[y = \frac{1}{\sinh kx_0}(v_1 \sinh k(x_0 - x) + v_2 \sinh kx)\right]$

131. $y'' - \alpha^2 y = 0\,;\ y(0) = v, y'(x_0) = 0$ $\quad\left[y = v\frac{\cosh(x_0 - x)}{\cosh \alpha x_0}\right]$

132. $y'' - \alpha^2 sy = 0\,;\ y(0) = \frac{1}{s}, y'(x_0) = 0$ $\quad\left[s < 0; y = \frac{\cos\alpha\sqrt{-s}(x_0 - x)}{s\cos\alpha\sqrt{-s}x_0}\right.$ pro $\left.x_0 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha\sqrt{-s}}\right]$
$\left[\text{pro } x_0 = \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha\sqrt{-s}}\right.$ nemá řešení; $\left. s > 0; y = \frac{\cosh\alpha\sqrt{s}(x_0 - x)}{s\cosh\alpha\sqrt{s}x_0}; k = 1, 2, 3, \dots\right]$

133. $y'' - \lambda^2 y = 0\,;\ \lambda \neq 0, y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\quad\left[y = \frac{\sinh\lambda x}{\lambda\sinh\lambda}\right]$

134. $y'' - \lambda^2 y = 0\,;\ \lambda \neq 0, y(0) = 0, y'(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\quad\left[y = \frac{\sinh\lambda x}{\lambda^2\cosh\lambda}\right]$

135. $y'' - \lambda^2 y = 0\,;\ \lambda \neq 0, y'(0) = 0, y(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\quad\left[y = \frac{\cosh\lambda x}{\lambda\cosh\lambda}\right]$

136. $xy'' + y' = 0;\ y(1) = \alpha y'(1)\,;\ y(x)$ je omezená pro $x \to \infty$ $\quad[y = 0]$

137. $y^{(4)} - \lambda^4 y = 0;\ y(0) = y''(0) = 0, y(\pi) = y''(\pi) = 0$ $\quad[y = C\sin kx$ pro $\lambda = k]$
$[k = 1, 2, 3, \dots \quad y = 0$ pro ostatní $\lambda]$

WolframAlpha

11.8 Úlohy na vlastní čísla a vlastní funkce

Teorie

<u>*Příklad 138*</u> : Určíme vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy

$$y'' + \lambda y = 0\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y'(\pi) = 0\,.$$

Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{kx}$, potom charakteristická rovnice má tvar $k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda}$.

- Pro $\lambda < 0$ je $k_1 = \sqrt{-\lambda}$, $k_2 = -\sqrt{-\lambda}$ a obecné řešení má tvar

  $$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x} \Rightarrow y'(x) = \sqrt{-\lambda}\,C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda}\,C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}\,.$$

  Z okrajových podmínek dostáváme soustavu rovnic pro neznámé konstanty $C_1,\ C_2$

  $$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2\,, \\ 0 &= \sqrt{-\lambda}\,C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \sqrt{-\lambda}\,C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\,, \end{aligned}\right\} C_1 = 0,\ C_2 = 0 \Rightarrow y = 0\,.$$

- Pro $\lambda = 0$ má obecné řešení tvar $y(x) = C_1 + C_2\,x \Rightarrow y'(x) = C_2$ a z okrajových podmínek dostaneme

  $$C_1 \in \mathbb{R}\,,\ C_2 = 0 \Rightarrow y = C_1\,.$$

- Pro $\lambda > 0$ má obecné řešení tvar

  $$y(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x \Rightarrow y'(x) = -\sqrt{\lambda}\,C_1\sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}\,C_2\cos\sqrt{\lambda}x\,.$$

  Z okrajových podmínek plyne

  $$\left.\begin{aligned} 0 &= C_2\,, \\ 0 &= -C_1\,\sin\sqrt{\lambda}\pi\,, \end{aligned}\right\} \sqrt{\lambda}\pi = n\pi\,,\ n \in \mathbb{N}\,.$$

  Dostáváme tak **posloupnost vlastních čísel**

  $$\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$$

  a **posloupnost jim odpovídajících vlastních funkcí** je

  $$\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots\}.$$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce úlohy $y'' + \lambda y = 0$, je-li

139. $x \in < 0, \pi >, y(0) = y'(\pi) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2}{4}, y_K = \sin\frac{2K-1}{2}x, K \in N\right]$

140. $x \in < 0, \pi >, y'(0) = y(\pi) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2}{4}, y_K = \cos\frac{2K-1}{2}x, K \in N\right]$

141. $x \in < 1, 2 >, y(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2, y_K = \sin K\pi x, K \in N\right]$

142. $x \in < 1, 2 >, y(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4}, y_K = \cos\frac{2K-1}{2}\pi x, K \in N\right]$

143. $x \in < 1, 2 >, y'(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4}, y_K = \sin\frac{2k-1}{2}\pi x, K \in N\right]$

144. $x \in < 1, 2 >, y'(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2, y_K = \cos K\pi x; K = 0, 1, 2, \ldots\right]$

145. $x \in < a, b >, y(a) = y(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{(b-a)^2}, y_K = \sin\frac{K\pi(x-a)}{b-a}, K \in N\right]$

146. $x \in < a, b >, y(a) = y'(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, y_K = \sin\frac{(2K-1)(x-a)\pi}{2(b-a)}, K \in N\right]$

147. $x \in < a, b >, y'(a) = y(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, y_K = \cos\frac{(2K-1)(x-a)\pi}{2(b-a)}, K \in N\right]$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce následujících okrajových úloh

148. $y'' + 2y' + \lambda y = 0\,;\ x \in < 0, l >,\ y(0) = y(l) = 0$ $\left[\lambda_K = 1 + \frac{K^2\pi^2}{l^2}\right]$
$\left[y_K = e^{-x}\sin\frac{K\pi x}{l}, K \in N\right]$

149. $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0\,;\ x \in < 1, l >,\ y(1) = y(l) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{\ln^2 l}, y_K = \sin\frac{K\pi \ln x}{\ln l}\right]$

150. $y'' + (\lambda + 1)y = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2 - 1, K \in N\right]$
$x \in < 0, 1 >,\ y(0) = y'(0) = 0,\ y(1) - y'(1) = 0$ $\left[y_K = \sin(\mathrm{arcotg}(K\pi) + K\pi x)\right]$

151. $y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0\,;\ y(l) = 0, y$ je omezená pro $x \to 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{l^2}, y_K = \frac{1}{x}\sin\frac{K\pi x}{l}\right]$

12 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Teorie

Příklad 152 : Určíme fundamentální matici a obecné řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= \ 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= \ 3y_1 + 4y_2 \,. \end{aligned}$$

Matice soustavy je

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a její vlastní čísla dostaneme z rovnice

$$\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) - 3 = 0 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = 5\,.$$

K vlastním číslům určíme vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1: \quad (\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_1 = (1, -1)^T \quad ,$$

$$\lambda_2 = 5: \quad (5\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_2 = (1, 3)^T \quad .$$

Fundamentální matice má tedy tvar

$$\mathbb{Y}(x) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5x}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{5x} \\ -\mathrm{e}^x & 3\,\mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix}$$

a obecné řešení má tvar

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5x} = C_1\,\vec{h}_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\vec{h}_2\,\mathrm{e}^{5x}\,.$$

12.1 Soustavy homogenních diferenciálních rovnic

153. $y_1' = y_1 - y_2$ $\quad\left[y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}\right]$
$y_2' = y_2 - 4y_1$ $\quad\left[y_2 = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x}\right]$

154. $y_1' + y_1 - 8y_2 = 0$ $\quad\left[y_1 = 2C_1e^{3x} - 4C_2e^{-3x}\right]$
$y_2' - y_1 - y_2 = 0$ $\quad\left[y_2 = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}\right]$

155. $y_1' = y_1 + y_2$ $\quad\left[y_1 = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x\right]$
$y_2' = 3y_2 - 2y_1$ $\quad\left[y_2 = e^{2x}\{(C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x\}\right]$

156. $y_1' = y_1 - 3y_2$ $\quad [y_1 = e^x(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)]$

$y_2' = 3y_1 + y_2$ $\quad [y_2 = e^x(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x)]$

157. $y_1' + y_1 + 5y_2 = 0$ $\quad [y_1 = (2C_2 - C_1)\cos 2x - (2C_1 + C_2)\sin 2x]$

$y_2' - y_1 - y_2 = 0$ $\quad [y_2 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x]$

158. $y_1' = 2y_1 + y_2$ $\quad \left[y_1 = (C_1 + C_2x)e^{3x}\right]$

$y_2' = 4y_2 - y_1$ $\quad \left[y_2 = (C_1 + C_2 + C_2x)e^{3x}\right]$

159. $y_1' = 3y_1 - y_2$ $\quad [y_1 = (C_1 + C_2x)e^x]$

$y_2' = 4y_1 - y_2$ $\quad [y_2 = (2C_1 - C_2 + 2C_2x)e^x]$

160. $y_1' = y_1 + y_3 - y_2$ $\quad \left[y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}\right]$

$y_2' = y_1 + y_2 - y_3$ $\quad \left[y_2 = C_1e^x - 3C_3e^{-x}\right]$

$y_3' = 2y_1 - y_2$ $\quad \left[y_3 = C_1e^x + C_2e^{2x} - 5C_3e^{-x}\right]$

161. $y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3$ $\quad \left[y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{5x}\right]$

$y_2' = y_1 + y_2 + y_3$ $\quad \left[y_2 = C_1e^x - 2C_2e^{2x} + C_3e^{5x}\right]$

$y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3$ $\quad \left[y_3 = -C_1e^x - 3C_2e^{2x} + 3C_3e^{5x}\right]$

162. $y_1' = 4y_2 - 2y_3 - 3y_1$ $\quad \left[y_1 = C_1e^x + C_3e^{-x}\right]$

$y_2' = y_3 + y_1$ $\quad \left[y_2 = C_1e^x + C_2e^{2x}\right]$

$y_3' = 6y_1 - 6y_2 + 5y_3$ $\quad \left[y_3 = 2C_2e^{2x} - C_3e^{-x}\right]$

163. $y_1' = y_1 - y_2 - y_3$ $\quad [y_1 = e^x(2C_2\sin 2x + 2C_3\cos 2x)]$

$y_2' = y_1 + y_2$ $\quad [y_2 = e^x(C_1 - C_2\cos 2x + C_3\sin 2x)]$

$y_3' = 3y_1 + y_3$ $\quad [y_3 = e^x(-C_1 - 3C_3\cos 2x + 3C_3\sin 2x]$

164. $y_1' = 4y_1 - y_2 - y_3$ $\quad \left[y_1 = C_1e^{2x} + (C_2 + C_3)e^{3x}\right]$

$y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3$ $\quad \left[y_2 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}\right]$

$y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3$ $\quad \left[y_3 = C_1e^{2x} + C_3e^{3x}\right]$

165. $y_1' = y_1 - y_2 + y_3$ $\quad \left[y_1 = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{2x}\right]$

$y_2' = y_1 + y_2 - y_3$ $\quad [y_2 = (C_1 - 2C_2 + C_2x)e^x]$

$y_3' = 2y_3 - y_2$ $\quad \left[y_3 = (C_1 - C_2 + C_2x)e^x + C_3e^{2x}\right]$

166. $y_1' = 4y_1 - y_2$ $\quad \left[y_1 = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{2x}\right]$

$y_2' = 3y_1 + y_2 - y_3$ $\quad \left[y_2 = \{2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)x + 2C_3x^2\}e^{2x}\right]$

$y_3' = y_1 + y_3$ $\quad \left[y_3 = \{C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)x + C_3x^2\}e^{2x}\right]$

WolframAlpha

12.2 Soustavy nehomogenních diferenciálních rovnic

Příklad 167 : Řešení nehomogenní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= \; 2y_1 + y_2 + \mathrm{e}^x \\ y_2' &= \; 3y_1 + 4y_2 \,. \end{aligned}$$

hledáme metodou **variace konstant**.

- Nejdříve vyřešíme homogenní soustavu (viz příklad 152). Řešení homogenní soustavy má tvar

  $$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x)\cdot\vec{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{5x} \\ -\mathrm{e}^x & 3\mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^x + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{5x}\,,$$

  kde $\mathbb{Y}(x)$ je fundamentální matice soustavy a $\vec{C}$ je vektor konstant.

- Partikulární řešení dané rovnice hledáme ve tvaru $\vec{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x)\cdot\vec{C}(x)$, kde $\vec{C}(x)$ je vektor funkcí. Po dosazení do soustavy dostaneme $\mathbb{Y}'(x)\vec{C}(x) + \mathbb{Y}(x)\vec{C}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)\vec{C}(x) + \vec{b}(x)$. Protože $\mathbb{Y}' = \mathbb{A}\mathbb{Y}$, tak platí

  $$C_1'(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^x + C_2'(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{5x} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Odtud vyplývá

  $$\begin{aligned} C_1'\,\mathrm{e}^x + C_2'\,\mathrm{e}^{5x} &= \mathrm{e}^x \\ -C_1'\,\mathrm{e}^x + 3C_2'\,\mathrm{e}^{5x} &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 4C_2'\,\mathrm{e}^{5x} &= \mathrm{e}^x \\ -4C_1'\,\mathrm{e}^x &= -3\mathrm{e}^x \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} C_2 &= \tfrac{-1}{16}\,\mathrm{e}^{-4x} \\ C_1 &= \tfrac{3}{4}\,x \end{aligned}$$

  a partikulární řešení soustavy má tvar

  $$y_p(x) = \frac{3}{4}\,x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^x + \frac{-1}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\mathrm{e}^x$$

- Obecným řešením nehomogenní soustavy je funkce

  $$\vec{y}(x) = \vec{y}(x)_h + \vec{y}_p(x) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^x + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{5x} + \tfrac{3}{4}\,x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^x + \tfrac{-1}{16}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\mathrm{e}^x\,.$$

168. $y_1' = y_2 + 2e^x$ $\quad$ $\left[y_1 = C_1e^x + C_2e^{-x} + xe^x - x^2 - 2\right]$
     $y_2' = y_1 + x^2$ $\quad$ $\left[y_2 = C_1e^x - C_2e^{-x} + (x-1)e^x - 2x\right]$

169. $y_1' = y_2 - 5\cos x$ $\quad$ $\left[y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} - 2\sin x - \cos x\right]$
     $y_2' = 2y_1 + y_2$ $\quad$ $\left[y_2 = 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x} + \sin x + 3\cos x\right]$

170. $y_1' = 4y_1 + y_2 - e^{2x}$ $\big[y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + (x+1)e^{2x}\big]$
$y_2' = y_2 - 2y_1$ $\big[y_2 = -2C_1e^{2x} - C_2e^{3x} - 2xe^{2x}\big]$

171. $y_1' = 2y_2 - y_1 + 1$ $[y_1 = (C_1 + 2C_2x)e^x - 3]$
$y_2' = 3y_2 - 2y_1$ $[y_2 = (C_1 + C_2 + 2C_2x)e^x - 2]$

172. $y_1' = 5y_1 - 3y_2 + 2e^{3x}$ $\big[y_1 = C_1e^{2x} + 3C_2e^{4x} - e^{-x} - 4e^{3x}\big]$
$y_2' = y_1 + y_2 + 5e^{-x}$ $\big[y_2 = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} - 2e^{-x} - 2e^{3x}\big]$

173. $y_1' = 2y_1 - 4y_2$ $\big[y_1 = 4C_1e^x + C_2e^{-2x} - 4xe^x\big]$
$y_2' = y_1 - 3y_2 + 3e^x$ $\big[y_2 = C_1e^x + C_2e^{-2x} - (x-1)e^x\big]$

174. $y_1' = 2y_1 - y_2$ $\big[y_1 = C_1e^{3x} + 3x^2 + 2x + C_2\big]$
$y_2' = y_2 - 2y_1 + 18x$ $\big[y_2 = -C_1e^{3x} + 6x^2 - 2x + 2C_2 - 2\big]$

175. $y_1' = y_1 + 2y_2 + 16xe^x$ $\big[y_1 = 2C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - (12x+13)e^x\big]$
$y_2' = 2y_1 - 2y_2$ $\big[y_2 = C_1e^{2x} - 2C_2e^{-3x} - (8x+6)e^x\big]$

176. $y_1' = 2y_1 - y_2$ $\big[y_1 = (C_1 + C_2x - x^2)e^x\big]$
$y_2' = y_1 + 2e^x$ $\big[y_2 = \{C_1 - C_2 + (C_2+2)x - x^2\}e^x\big]$

177. $y_1' = y_1 - y_2 + 8x$ $[y_1 = C_1\cos 2x - C_2\sin 2x + 2x + 2]$
$y_2' = 5y_1 - y_2$ $[y_2 = (C_1 + 2C_2)\cos 2x + (2C_1 - C_2)\sin 2x + 10x]$

178. $y_1' = 2y_1 - y_2$ $\big[y_1 = C_1e^x + C_2e^{3x} + e^x(2\cos x - \sin x)\big]$
$y_2' = 2y_2 - y_1 - 5e^x\sin x$ $\big[y_2 = C_1e^x - C_2e^{3x} + e^x(3\cos x + \sin x)\big]$

179. $y_1' = y_2 + \operatorname{tg}^2 x - 1$ $[y_1 = C_1\cos x + C_2\sin x + \operatorname{tg} x]$
$y_2' = -y_1 + \operatorname{tg} x$ $[y_2 = -C_1\sin x + C_2\cos x + 2]$

180. $y_1' = -4y_1 - 2y_2 + \frac{2}{e^x-1}$ $[y_1 = C_1 + 2C_2e^{-x} + 2e^{-x}\ln|e^x - 1|]$
$y_2' = 6y_1 + 3y_2 - \frac{3}{e^x-1}$ $[y_2 = -2C_1 - 3C_2e^{-x} - 3e^{-x}\ln|e^x - 1|]$

181. $y_1' = y_1 - y_2 + \frac{1}{\cos x}$ $[y_1 = (C_1+x)\cos x + (C_2+x)\sin x + (\cos x - \sin x)\ln|\cos x|]$
$y_2' = 2y_1 - y_2$ $[y_2 = (C_1 - C_2)\cos x + (C_1+C_2)\sin x + 2\cos x\ln|\cos x| + 2x\sin x]$

182. $y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3 - x + 2$ $[y_1 = C_1e^x + C_2\sin x + C_3\cos x]$
$y_2' = 1 - y_1$ $[y_2 = x - C_1e^x + C_2\cos x - C_3\sin x]$
$y_3' = y_1 + y_2 - y_3 - x + 1$ $[y_3 = 1 + C_2\sin x + C_3\cos x]$

Najděte partikulární řešení následujících soustav diferenciálních rovnic

183. $y_2' = y_2 + y_3\,;\ y_2(0) = 0, y_3(0) = -1$ $\big[y_2 = e^{2x} - e^{3x}\big]$
$y_3' = -2y_2 + 4y_3$ $\big[y_3 = e^{2x} - 2e^{3x}\big]$

184. $y_2' = 3y_2 - y_3\,;\ y_2(0) = 1, y_3(0) = 5$ $\left[y_2 = e^{-2x}\right]$
$y_3' = 10y_2 - 4y_3$ $\left[y_3 = 5e^{-2x}\right]$

185. $y_1' = 3y_1 + 8y_2\,;\ y_1(0) = 6, y_2(0) = -2$ $[y_1 = 2(2e^x + e^{-x})]$
$y_2' = -3y_2 - y_1$ $[y_2 = -e^x - e^{-x}]$

186. $y_1' = e^x - y_2 - 5y_1\,;\ y_1(0) = \frac{119}{900}, y_2(0) = \frac{211}{900}$ $\left[y_1 = \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x}\right]$
$y_2' = e^{2x} + y_1 - 3y_2$ $\left[y_2 = \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x}\right]$

187. $y_1' = y_2\,;\ y_1(0) = y_2(0) = 1$ $[y_1 = \cos x + \sin x]$
$y_2' = -y_1$ $[y_2 = \cos x - \sin x]$

188. $y_1' = 4y_1 - 5y_2\,;\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$ $\left[y_1 = (1 - 2x)e^{-2x}\right]$
$y_2' = y_1$ $\left[y_2 = xe^{-2x}\right]$

189. $y_1' = y_1 + y_2 + x\,;\ y_1(0) = -\frac{7}{9}, y_2(0) = -\frac{5}{9}$ $\left[y_1 = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{9}\right]$
$y_2' = y_1 - 2y_2 + 2x$ $\left[y_2 = \frac{1}{3}x - \frac{5}{9}\right]$

190. $y_1' = y_1 + 5y_2\,;\ y_1(0) = -2, y_2(0) = 1$ $[y_1 = (\sin x - 2\cos x)e^{-x}]$
$y_2' = -3y_2 - y_1$ $[y_2 = e^{-x}\cos x]$

191. $2y_1' = 6y_1 - y_2 - 6x^2 - x + 3\,;\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 3$ $\left[y_1 = e^{2x} + e^{3x} + x^2 + x\right]$
$y_2' = 2y_2 - 2x - 1$ $\left[y_2 = 2e^{2x} + x + 1\right]$

WolframAlpha