Obsah

1 Lineární prostory

1. Dokažte, že v lineárním prostoru $(V, +, \cdot)$ platí:

   a) Ve V existuje právě jeden neutrální (nulový) prvek o.

   b) Jestliže $u, v, w \in V$ a $u + v = u + w$, pak $v = w$.

   c) $(-1) \cdot u = (-u)$, tedy opačný prvek dostaneme vynásobením původního prvku číslem -1.

   d) Jestliže $u + v = w$, pak $u = w + (-v)$.

   e) Jestliže $a \cdot u = o$, pak $u = o$ nebo $a = 0$.

2. a) Dokažte $(u, av + bw) = \bar{a}(u, v) + \bar{b}(u, w)$.

   b) Ukažte, kdy nastane rovnost ve Schwarzově nerovnosti.

   c) Ověřte vlastnosti normy dané předpisem $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

   d) Dokažte, že v unitárním prostoru platí rovnost čtyřúhelníka $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

   e) Ukažte, že posloupnost funkcí $(\sin n\pi t)_{n=1}^{\infty}$ tvoří ortogonální posloupnost v prostoru $L^2(0, 1)$.

2 Úplné prostory

2.1 Metrické prostory

3. a) Dokažte $(f - T_n^*, T_n) = 0$, kde $T_n^* = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(\varphi_k, f)}{\|\varphi_k\|^2} \cdot \varphi_k$ a $T_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k \varphi_k$.

   b) Dokažte, že limita konvergentní posloupnosti v metrickém prostoru je právě jedna.

   c) Zdůvodněte, proč $\lim\limits_{p\to\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |u_i - v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ se nahrazuje $\max\limits_{i \in 1,\ldots,n} |u_i - v_i|$.

   d) Ověřte, že metriky d_1 a d_∞ jsou ekvivalentní.

   e) Dokažte, že pro $p > 1$ platí $|a_1| + |a_2| \geq (|a_1|^p + |a_2|^p)^{\frac{1}{p}}$.

4. a) K množině $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ najděte její uzávěr $\overline{M}$.

   b) Dokažte, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

   c) Dokažte, že z omezené posloupnosti $(a_n) \subset \mathbb{R}$ lze vybrat konvergentní podposloupnost.

   d) Nechť (V, d) je úplný prostor a $M \subset V$. Dokažte, že jestliže (M, d) je úplný, pak je uzavřený.

5. a) Dokažte, že každý kompaktní prostor je úplný.

   b) Dokažte, že prostor $C(\langle 0, 1 \rangle)$ je úplný.

   c) Dokažte, že množina $\overline{K_\varepsilon(u)}$ je uzavřená.

   d) Dokažte, že $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

2.2 Banachovy prostory

6. a) Nechť $f\colon \langle 0,1\rangle \to \langle 0,2\rangle$ a $f(x)=2x$. Najděte metriky na prostorech $\langle 0,1\rangle$, $\langle 0,2\rangle$ tak, aby f bylo izometrické zobrazení.
   b) Porovnejte předpoklady Peano-Picardovy s předpoklady Banachovy věty o kontraktivním zobrazení.
   c) Definujte kouli, konvergentní posloupnost a ekvivalentnost norem v Banachově prostoru.
   d) Ověřte, že kartézský součin Banachových prostorů je opět Banachův prostor.
   e) Dokažte, že $\|u\| = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$ je norma na lineárním prostoru $C(\overline{\Omega})$.

7. a) Nechť $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ a $f(0)=0$. Ukažte, že f' nelze na $\langle 0,1\rangle$ spojitě dodefinovat.
   b) Dokažte, že funkce s kompaktním nosičem jsou "nulové na okolí $\partial\Omega$".
   c) Dokažte, že prostor $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ je Banachův.
   d) Nechť $f(x)=\sqrt{x}$. Určete hodnotu $H_{\frac{1}{2}}(f)$ pro $x\in\langle 0,1\rangle$.
   e) Dokažte, že z Youngovy nerovnosti vyplývá $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

8. a) Pomocí Youngovy nerovnosti dokažte Hölderovu nerovnost.
   b) Najděte takovou posloupnost (f_n), pro kterou nastane ve Fatouově lemmatu ostrá nerovnost.
   c) Nechť $1 \le p < \infty$. Rozhodněte, zda platí $C(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, $C(\overline{\Omega}) \subset L^p(\Omega)$.
   c) Rozhodněte, zda platí $\frac{1}{x} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $x^2-1 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

9. a) Dokažte, že $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, jestliže Ω je omezená a $1 \le q \le p \le \infty$.
   b) Dokažte, že $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, jestliže $1 \le p \le \infty$.
   c) Dokažte, že normy $\|u\|_{k,p} = \sum\limits_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_p$ a $|||u|||_{k,p} = (\sum\limits_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_p^p)^{\frac{1}{p}}$ jsou ekvivalentní.
   d) Pomocí Greenovy věty dokažte, že $\int\limits_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x)\, dx = \int\limits_\Omega D^\alpha u(x) \varphi(x)\, dx \quad \forall u \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.
   e) Jestliže F je lineární funkcionál, pak $F(o)=0$, dokažte.

2.3 Lineární funkcionály

10. a) Jestliže F je lineární funkcionál, pak $\|F\|_* = \sup\limits_{\|u\|\le 1} |F(u)|$, dokažte.
    b) Jestliže F je lineární funkcionál, pak $|F(u)| \le \|F\|_* \cdot \|u\|$, dokažte.
    c) Dokažte, že prostor všech lineárních funkcionálů s normou $\|F\|_*$ je normovaný lineární prostor.
    d) Dokažte větu 2.19 o existenci funkcionálu $F \in V^*$ takového, že $F(u_0) = \|u_0\|$ a $\|F\|_* = 1$.
    e) Dokažte, že pro funkcionál s Rieszovy věty o reprezentaci platí $\|F\|_* = \|v\|$.

2.4 Hilbertovy prostory

11. a) Dokažte, že v prostoru $L^3(-1,1)$ není splněna rovnost rovnoběžníka.
    b) Dokažte, že $F(u) = (u, v)$ je spojitý lineární funkcionál na Hilbertově prostoru H.
    c) Dokažte, že ortogonální doplněk $M^\perp$ množiny $M \subset H$ je uzavřený lineární podprostor Hilbertova prostoru H.
    d) Dokažte, že direktní součet $M_1 \oplus M_2$ je uzavřený lineární podprostor Hilbertova prostoru H.
    e) Dokažte, že obor hodnot $R(T)$ a jádro $\mathrm{Ker}(T)$ lineárního operátoru T jsou lineární prostory.

3 Operátory na Banachových prostorech

Otázky ke zkoušce

1. Zformulujte Minkowského a Hölderovu nerovnost a na příkladech ukažte jejich použití.
2. Definujte a uveďte konkrétní příklady metrického prostoru.
3. Definujte a uveďte konkrétní příklady normovaného prostoru.
4. Definujte a uveďte konkrétní příklady unitárního prostoru.
5. Formulujte a dokažte Schwarzovu nerovnost. Pro jaké $k \in \mathbb{R}$ je vzdálenost vektorů ku a v nejmenší a proč?
6. Co to je konvergentní posloupnost v metrickém prostoru a co znamená, že metriky jsou ekvivalentní. Uveďte příklady ekvivalentních metrik.
7. Definujte a na příkladech vysvětlete pojmy otevřená množina, uzavřená množina. Popište vztah mezi uzavřenou množinou a jejím uzávěrem.

---

8. Dokažte, že množina M je uzavřená právě tehdy, když každá konvergentní posloupnost prvků z M má limitu v M.
9. Definujte úplný prostor a uveďte příklady úplných prostorů. Popište vztah uzavřeného a úplného prostoru.
10. Definujte kompaktní prostor a popište jeho vztah k úplnému, uzavřenému a omezenému prostoru.
11. Definujte separabilní prostor. Formulujte větu o zúplnění metrického prostoru.
12. Dokažte Banachovu větu o kontrakci.
13. Definujte Banachův prostor a uveďte příklady Banachových prostorů.
14. Jak se definují prostory spojitě diferencovatelných funkcí, Hölderovsky spojitých funkcí a spojitých funkcí s kompaktním nosičem?

---

15. Jaký je rozdíl mezi prostory $\mathcal{L}^p(\Omega)$ a $L^p(\Omega)$? Jsou tyto prostory Banachovy? Kdy platí $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.
16. Za jakých předpokladů je množina $M \subset L^p(\Omega)$ kompaktní?

17. Jaký je vztah prostorů $L^p(\Omega)$ a $C_0^\infty(\Omega)$. Jak se definují Sobolevovy prostory.

18. Jaký je vztah mezi spojitým lineárním funkcionálem a omezeným lineárním funkcionálem.

19. Co to je duální prostor k lineárnímu prostoru? Zformulujte Hahnovu-Banachovu větu a její důsledek "o oddělitelnosti bodu".

20. Zformulujte Rieszovu větu o reprezentaci spojitého funkcionálu nad prostorem $L^p(\Omega)$.

21. Kdy je prostor reflexivní? Uveďte příklady reflexivních prostorů. Zformulujte Eberleinovu-Šmuljanovu větu.

---

22. Co to je slabě konvergetní posloupnost a jaké jsou její vlastnosti? Zformulujte Banachovu-Steinhausovu větu.

23. Definujte Hilbertův prostor. Jak lze popsat duální prostor H^*?

24. Definujte direktní(ortogonální) součet, ortonormální systém a Fourierovu řadu na Hilbertově prostoru H.

25. Popište prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a uveďte podmínky, za kterých existuje T^{-1} k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

26. Definujte a uveďte příklady kompaktního, duálního a samoadjungovaného operátoru.

27. Dokažte, že vlastní čísla symetrického operátoru na Hilbertově prostoru jsou reálná a odpovídající vlastní vektory jsou kolmé.

28. Co to je kvadratický funkcionál určený operátorem T a za jakých předpokladů nabývá svého minima?