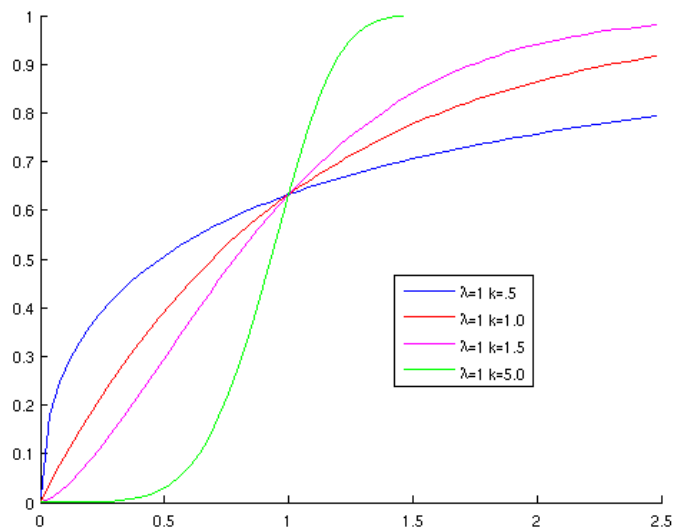
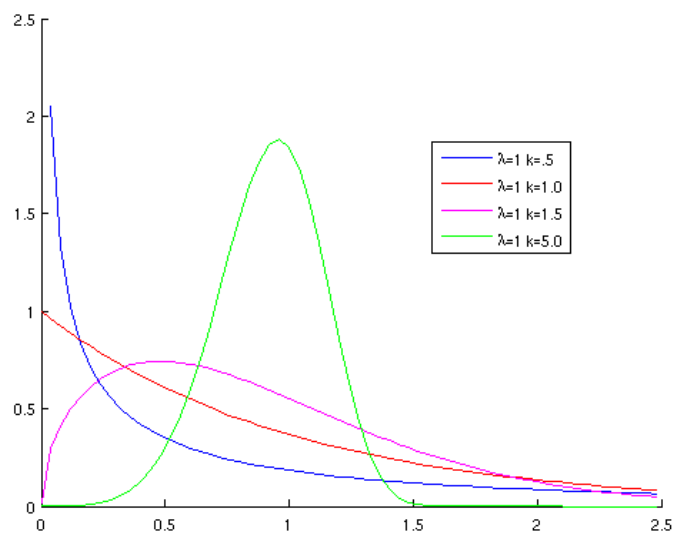


1 Weibullovo rozdělení $W(k; \delta)$

- $\delta > 0; k > 0; x \in [0; \infty)$. Kde k je parametr tvaru a δ parametr měřítka.
- Funkce hustoty, distribuční funkce, střední hodnota a rozptyl:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\delta} \left(\frac{x}{\delta}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^k}, & x \geq 0; \\ 0, & \text{jinde} \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^k}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \delta \Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right); D(X) = \delta^2 \left(\Gamma\left(\frac{2}{k} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{k} + 1\right) \right).$$



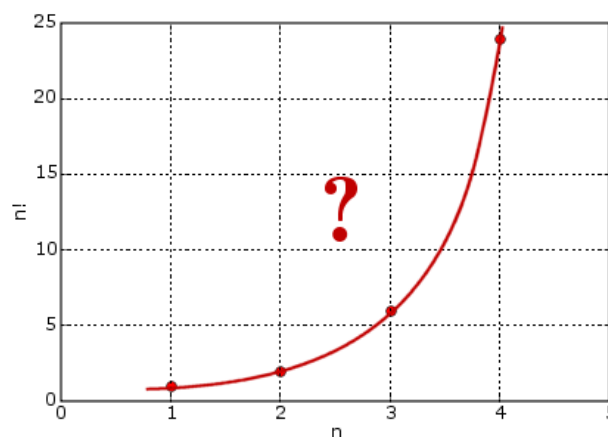
Obrázek 3: Funkce hustoty a distribuční funkce pro různé hodnoty

- Pro přirozená čísla platí $\Gamma(n) = (n - 1)!$ – jedná se o zobecněný faktoriál.

- Parametr $k > 1$ charakterizuje životnost zařízení, u kterého se intenzita poruchy s časem zvyšuje, parametr $k < 1$ charakterizuje životnost zařízení, u kterého se naopak intenzita poruchy s časem snižuje.
- Pokud je $k = 1$, tak se jedná přímo o exponenciální rozdělení pravděpodobnosti.
- Typické použití:
 - Analýza přežití.
 - Předpověď počasí.
 - Předpověď technologických změn.
 - K reprezentování výrobního a dodacího času v průmyslu.
 - Analýza spolehlivosti a analýza selhání.

1.1 Použité funkce

- Gama funkce
- Motivace ke vzniku Gama funkce, nalézt vhodnou funkci k interpolaci faktoriálu, jak je vidět na níže uvedeném obrázku.



Obrázek 4: Motivace k vytvoření Gama funkce

- Gama funkce je tedy zobecnění funkce faktoriál do oboru komplexních čísel (a tedy i reálných). Není definována pro 0 a celá záporná čísla.

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

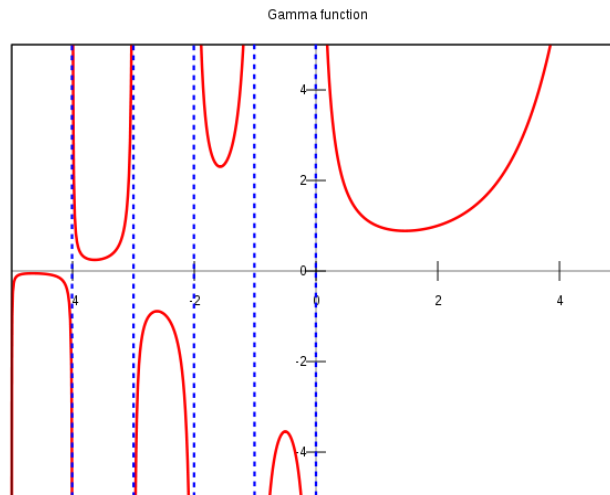
kde

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt; \quad \Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Pro kladná přirozená čísla platí

$$\Gamma(z) = (z - 1)!$$

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) = z(z - 1)! = z!$$



Obrázek 5: Gama funkce pro reálná čísla (nedefinováno v 0 a celých záporných číslech)

- Neúplná Gama funkce
 - Horní neúplná Gama funkce

$$\Gamma(s; x) = \int_x^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

- Dolní neúplná Gama funkce

$$\gamma(s; x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t} dt.$$

2 Dvourozměrné normální rozdělení $X \sim (X_1, X_2)$ s parametry $(\mu_1, \mu_2, \sigma_{11}, \sigma_{22})$.

- $\sigma_1^2, \sigma_2^2 > 0$; $\mu_1, \mu_2, x_i \in R$ a $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$.
- σ_i^2 – rozptyl, μ_i – střední hodnota.
- Sdružená funkce hustoty pravděpodobnosti

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho \frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right]},$$

kde pro lineárně nezávislé (tj. pro $\rho = 0$) platí, že $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$.

- Respektive formální tvar

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}} e^{-\frac{1}{2}P(x_1, x_2)},$$

kde

$$P(x_1, x_2) = (x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2)C^{-1}(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2)^T$$

a kovarianční matice (kovariance = střední hodnota součinu odchylek náhodných veličin X_1, X_2 , která poskytuje informaci o intenzitě vztahu mezi dvěma veličinami) má tvar

$$\text{var}(X) = C = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix},$$

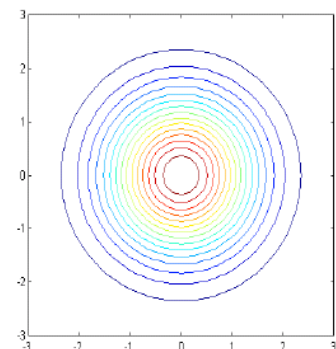
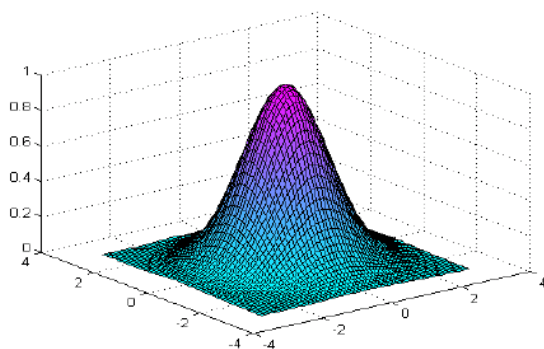
kde ρ je korelační koeficient, vyjadřující míru lineární závislosti mezi X_1, X_2 .

- Pro jednotlivé marginální (okrajové) hustoty platí

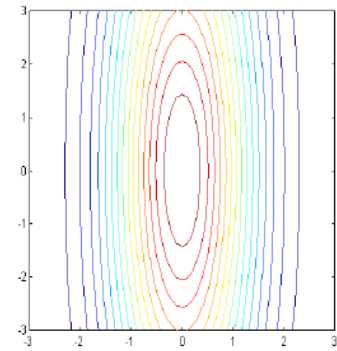
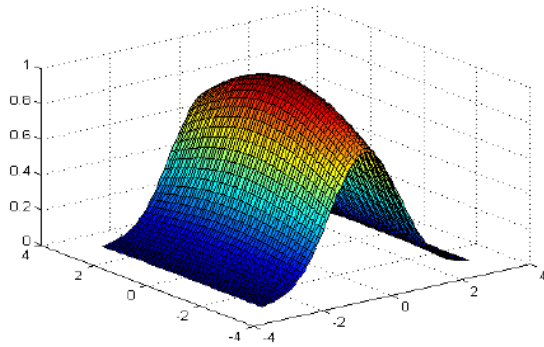
$$f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right]}.$$

Vizuální znázornění hustoty dvourozměrného normálního rozdělení pro různé parametry:

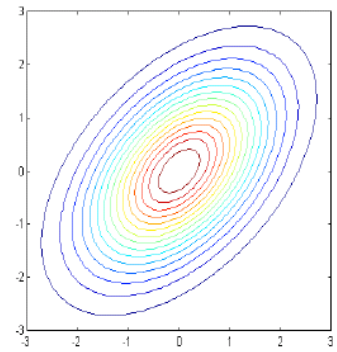
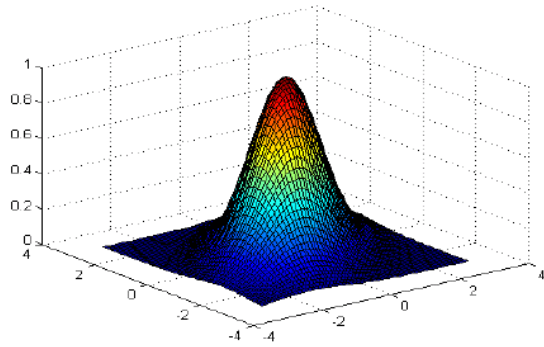
$$X \sim N = (\mu_1 = 0; \mu_2 = 0; \sigma_1 = 1; \sigma_2 = 1; \rho = 0)$$



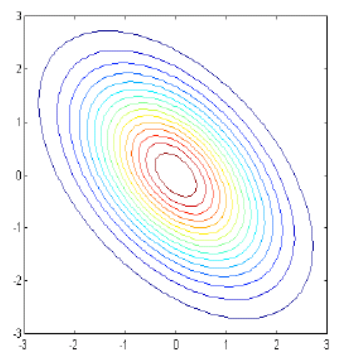
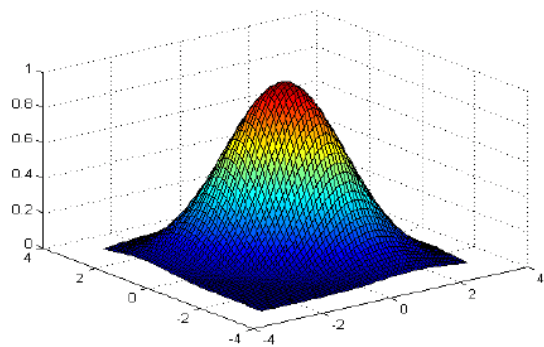
$$X \sim N = (\mu_1 = 0; \mu_2 = 0; \sigma_1 = 1; \sigma_2 = 4; \rho = 0)$$



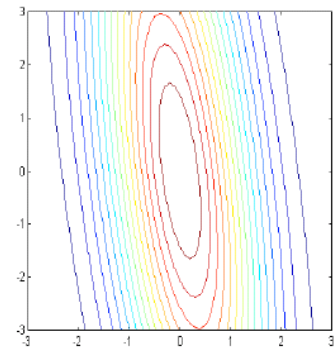
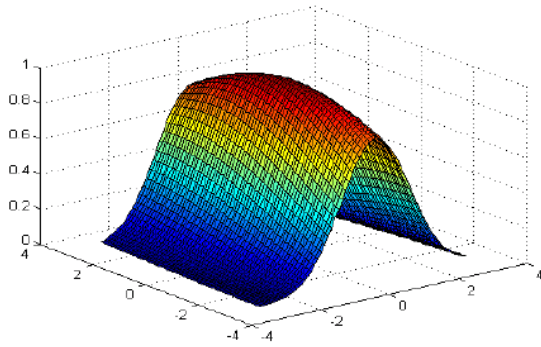
$$X \sim N = (\mu_1 = 0; \mu_2 = 0; \sigma_1 = 1; \sigma_2 = 1; \rho = 0.5)$$



$$X \sim N = (\mu_1 = 0; \mu_2 = 0; \sigma_1 = 1; \sigma_2 = 1; \rho = -0.5)$$



$$X \sim N = (\mu_1 = 0; \mu_2 = 0; \sigma_1 = 1; \sigma_2 = 4; \rho = -0.5)$$



Použité zdroje a materiály pro další studium

- [1] Jaroslav Hátle, Jiří Likeš: Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky. SNTL Praha 1974.
- [2] [Weibull distribution](#)
- [3] <http://home.zcu.cz/~sediva/pse>