KATEDRA INFORMATIKY A VÝPOČETNÍ TECHNIKY

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

Předmět KIV/TI - přednáška 11

Úvod do logiky

Ing. Václav Vais, Ph.D.

vais@kiv.zcu.cz

Základní pojmy

- Logika je disciplína, která se zabývá metodami správného usuzování, tedy způsoby vyvozování správných závěrů (*důsledků*) z pravdivých (tj. ověřených) poznatků (*předpokladů*).
- Logika zkoumá pouze formu sdělení, nikoli jeho obsah.
- *Dedukce* = posloupnost kroků, z nichž každý zaručuje, že jsou-li pravdivé předpoklady, je pravdivý i závěr.
- Dedukce - z malého počtu výchozích poznatků odvozujeme poznatky další.
- Dedukce je obecnou metodou deduktivních věd (např. matematiky).

Základní pojmy

- Indukce (zobecňování) - z jednotlivých výchozích poznatků se vytvářejí obecné hypotézy.
- Indukce je obecnou metodou empirických věd (např. přírodní vědy).
- *Formální logika* – definuje a studuje abstraktní odvozovací pravidla, jejichž platnost nezávisí na významu pojmů, které v nich vystupují.
- Jinak řečeno - formální logika zkoumá obsahové logické myšlení prostřednictvím formálních logických systémů.

Základní pojmy

- Otázky, jež pomáhá řešit formální logika:
  - Je konkrétní tvrzení pravdivé?
  - Lze toto tvrzení dokázat? Lze toto tvrzení vyvrátit?
  - Je konkrétní teorie bezesporná?
- *Matematická logika* – studuje vyvozování jako práci se symboly, popisujícími abstraktní matematické objekty.
- 1. polovina 20. stol. - snahy o to, jak z malého počtu předpokladů (axiomů) „odvodit celou matematiku“ a moci o každém tvrzení algoritmicky rozhodnout, zda je pravdivé. **NELZE.** Dokázal Kurt Gödel 1931 (Gödelova věta o neúplnosti).

Axiomatická výstavba formálních teorií

- *Axiomy* – výchozí tvrzení dané teorie. Nedokazují se, jejich platnost se předpo-kládá (např. na základě zkušeností, výsledků experimentů, apod.).
- Požadavky na axiomy:
  - *bezespornost* (důsledkem axiomů nemůže tvrzení a zároveň i jeho negace)
  - *nezávislost* (žádný axiom není důsledkem ostatních axiomů)
- Z axiomů se dedukcí odvozují další tvrzení – *důsledky.*
- Teorie lze formalizovat, tedy popisovat pomocí symbolů. Tvrzení pak dostávají podobu *formulí* . Pravidla pro odvozování důsledků pak jsou reprezentována určitými operacemi nad těmito formulemi.

Axiomatická výstavba formálních teorií

- Dokazování tvrzení ve formálních teoriích = *formální důkaz*.
- Existují různé přístupy k dokazování tvrzení, liší se systémy pravidel používanými pro dokazování. Tyto systémy se nazývají *kalkuly* (alternativně *logické kalkuly*, *důkazové kalkuly*, *odvozovací systémy*, …..).
- Logický kalkul je *korektní*, jestliže každé tvrzení, jež v něm lze odvodit, je pravdi-vé.
- Logický kalkul je *úplný,* jestliže v něm každé pravdivé tvrzení lze dokázat a každé nepravdivé tvrzení vyvrátit (tj. dokázat jeho negaci).
- Existují-li tvrzení, jež nelze ani dokázat, ani vyvrátit, je kalkul *neúplný.*

Hierarchie logických kalkulů - příklady

(1) Půjdou-li na večírek Martin s Petrem, nepůjde tam Lucie.

Formalizováno: $(M \wedge P) \rightarrow \neg L$,

kde M představuje elementární výrok *Martin půjde na večírek,*
P představuje elementární výrok *Petr půjde na večírek,*
L představuje elementární výrok *Lucie půjde na večírek,*
$\wedge$, $\rightarrow$ a $\neg$ jsou logické spojky.

Hierarchie logických kalkulů - příklady

$(M \wedge P) \rightarrow \neg L$

- *atomickými formulemi* (podformulemi, v nichž se nevyskytují žádné logické spojky) jsou dále nedělitelné *elementární výroky* M, P, L , jimž lze přiřadit pravdivostní hodnoty
- nevyskytují se proměnné ani kvantifikátory, tvrzení vypovídá o (jednoznačně určených) konkrétních osobách
- tvrzení je formulí *výrokového počtu*

Hierarchie logických kalkulů - příklady

(2) Existuje nejmenší přirozené číslo (= existuje přirozené číslo x takové, že pro všechna přirozená čísla y platí $x \leq y$).

Formalizováno: $\exists x \, \forall y \;\; x \leq y$,

kde x a y představují prvky z množiny přirozených čísel,
$\exists$ a $\forall$ jsou kvantifikátory,
$\leq$ je relační operátor nad množinou přirozených čísel.

Hierarchie logických kalkulů - příklady

$\exists x \, \forall y \;\; x \leq y$

- ve formuli se vyskytují kvantifikátory $\exists, \forall$
- symboly x, y jsou proměnné, představující (libovolné) prvky z nějaké množiny (v našem případě z množiny přirozených čísel)
- symbol $\leq$ představuje *binární predikát;* definuje relaci mezi dvěma prvky množiny; výraz $x \leq y$ tedy pro konkrétní hodnoty x, y nabývá konkrétní logické hodnoty PRAVDA nebo NEPRAVDA

Hierarchie logických kalkulů - příklady

(3) Princip matematické indukce (= platí-li nějaké tvrzení $V(x)$ pro $x = n_0$ a platí-li, že z platnosti tvrzení V pro obecné x vyplývá platnost tvrzení V pro $x + 1$, pak tvrzení V platí pro všechna přirozená čísla $x \geqq n_0$).

Formalizováno: $\forall V \left(V(n_0) \wedge \forall x \, (V(x) \rightarrow V(x+1)) \right) \rightarrow \forall x \, (x \geqq n_0 \rightarrow V(x))$,

kde V představuje nějaké tvrzení parametrizované přirozeným číslem (např. „součet vnitřních úhlů konvexního n-úhelníka je $(n-2) \cdot 180$ stupňů“),

n_0 je konstanta z množiny přirozených čísel (tj. nejmenší číslo, pro které tvrzení V platí),

x představuje (libovolný) prvek z množiny přirozených čísel,

$\exists$ a $\forall$ jsou kvantifikátory,

$\wedge$ a $\rightarrow$ jsou logické spojky,

$\geqq$ je relační operátor nad množinou přirozených čísel.

Hierarchie logických kalkulů - příklady

$$\forall V\ \big(\ V(n_0) \wedge \forall x\ (V(x) \rightarrow V(x+1)\big) \rightarrow \forall x\ (x \geqq n_0 \rightarrow V(x))$$

- symbol $V(x)$ představuje *výrokovou formu,* tedy obecné tvrzení, které pro konkrétní prvek x z nějaké množiny (v našem případě z množiny přirozených čísel) nabývá konkrétní logické hodnoty PRAVDA nebo NEPRAVDA
- symbol x je proměnné, představující (libovolný) prvek z nějaké množiny (v našem případě z množiny přirozených čísel)
- symbol n_0 je konstanta, představující konkrétní prvek z nějaké množiny (v našem případě z množiny přirozených čísel)

Hierarchie logických kalkulů - příklady

(4) Existuje nejmenší prvek.

Formalizováno: $\exists x \, \forall y \; x \leq y$

Ve speciálním případě uvedeném výše, kdy jsme prvky x a y vybírali z množiny přirozených čísel, je tvrzení pravdivé, nejmenším přirozeným číslem je 1.

Pokud bychom ovšem prvky x a y vybírali z množiny reálných čísel, tvrzení pravdivé není, protože množina reálných čísel nemá nejmenší (ani největší) prvek.

Pokud bychom prvky x a y vybírali z nějaké částečně uspořádané množiny, závisela by pravdivost tvrzení na této konkrétní množině. Pokud by touto částečně uspořádanou množinou byl například svaz, bylo by tvrzení pravdivé, protože každý svaz má nejmenší (i největší) prvek.

Hierarchie logických kalkulů - příklady

$$\exists x \, \forall y \;\; x \leq y$$

- na rozdíl od tvrzení *(2)* v tomto případě není řečeno, z jaké množiny se prvky x a y vybírají.
- určení množiny, z níž budou x a y vybírány, je úkolem *interpretace formule*

Hierarchie logických kalkulů - příklady

(5) Formuli $(\exists F)\,\{(F(a) = b) \wedge (\forall x)\,[p(x) \rightarrow (F(x) = g(x, F(f(x))))]\}$

čteme „existuje funkce F taková, že $F(a) = b$ a pro všechna x, která splňují podmínku $p(x)$, platí $F(x) = g(x, F(f(x)))$."

Interpretace této formule spočívá v následujícím:

ve volbě nějaké neprázdné množiny (označíme ji D),
v přiřazení některých konkrétních prvků z D symbolům a a b,
v přiřazení nějaké funkce zobrazující D do D symbolu f; $f: D \rightarrow D$, např. $y = f(x)$,
v přiřazení nějaké funkce zobrazující $D \times D$ do D symbolu g; $g: D \times D \rightarrow D$, např. $z = g(x, y)$,
v přiřazení nějaké funkce (*predikátu*) zobrazující D do množiny {PRAVDA, NEPRAVDA} symbolu p; $p: D \rightarrow$ {PRAVDA, NEPRAVDA}.

Hierarchie logických kalkulů - příklady

Interpretace 1 („číselná“):

Zvolíme:

$D = N_0$ (tj. množina přirozených čísel N rozšířená o nulu),
$a = 0$, $b = 1$,
$f(x) = x - 1$ pro $x \epsilon N$ a $f(0) = 0$ (tj. $f(x)$ je funkce „předchůdce (x)“ s „ne zcela standardním“ dodefinováním „předchůdce nuly“),
$g(x, y) = x \cdot y$,
$p(x) = (x > 0)$.

Zkonkretizujme tvrzení *(5)* ve smyslu této interpretace: „existuje funkce F taková, že $F(0) = 1$ a pro všechna přirozená čísla $x > 0$ platí $F(x) = x \cdot F(x-1)$.“

Toto tvrzení je zřejmě pravdivé, protože takovou funkcí F je například faktoriál $F(x) = x!$
Z rekurzivní definice faktoriálu víme, že $x! = x \cdot (x-1)!$ a $0! = 1$.

Hierarchie logických kalkulů - příklady

Zvolíme:

$D = \Sigma^*$ (tj. množina všech řetězců nad nějakou abecedou Σ),
$a = e$, $b = e$ (tj. a i b jsou prázdné řetězce),
$f(x) = zbytek(x)$ (tj. f je funkce „zbytek řetězce po odstranění prvního písmene zleva“ s dodefinováním $f(e) = e$),
$g(x, y) = y \cdot začátek(x)$ (operátor $\cdot$ zde představuje zřetězení řetězců, tj. g je zřetězením řetězce y s prvním písmenem řetězce x),
$p(x) = (x \neq e)$.

Zkonkretizujeme tvrzení *(5)* ve smyslu této interpretace: „existuje funkce F taková, že $F(e) = e$ a pro všechny neprázdné řetězce x platí $F(x) = F(zbytek(x)) \cdot začátek(x)$.“

Toto tvrzení je zřejmě pravdivé, protože takovou funkcí F je reverze (obrácení) řetězce $F(x) = reverze(x) = x^R$

Názorně: Jak rekurzivním postupem „obrátíme“ řetězec?
První písmeno dáme na konec, před něj pak „přilepíme“ převrácený zbytek.

Hierarchie logických kalkulů - příklady

Interpretace 3 („číselná“):

Zvolíme:

$D = N$ (tj. množina přirozených čísel N),
$a = 0$, $b = 1$,
$f(x) = x$,
$g(x, y) = y + 1$,
$p(x) = (x > 0)$.

Zkonkretizujme tvrzení *(5)* ve smyslu této interpretace: „existuje funkce F taková, že $F(0) = 1$ a pro všechna $x > 0$ platí $F(x) = F(x) + 1$“.

Toto tvrzení je ovšem evidentně nepravdivé.

Výrokový počet x predikátový počet

- Tvrzení $(M \wedge P) \rightarrow \neg L$ bylo formulí výrokového počtu.
- Všechna ostatní byla formulemi *predikátového počtu .*
- Predikátový počet má bohatší vyjadřovací schopnosti než výrokový počet.
- Predikátový počet vypovídá o vlastnostech *individuí ,* tj. prvků z nějaké množiny (*univerza*) prostřednictvím predikátů (tj. funkcí zobrazujících do množiny {PRAVDA, NEPRAVDA}).
- V predikátové logice oplatí všechny vztahy výrokové logiky.
- V souvislosti s predikátovou logikou hovoříme o jejím *řádu*.

Predikátový počet - obecně

- *Predikátová logika prvního řádu* obsahuje pouze jeden druh proměnných, a to proměnné pro individua. Mohou jimi být přirozená čísla, množiny, prvky, apod.
- *Predikátová logika druhého řádu* obsahuje dva druhy proměnných, a to proměnné pro individua a proměnné pro *množiny individuí.*
- Analogicky existují i predikátové logiky vyšších řádů.
- Predikátová logika (bez ohledu na její řád) pracuje se symboly pro funkční a predikátové konstanty a funkční a predikátové proměnné (obecně *n-ární* , tj. *s* *n* argumenty.

Predikátový počet - obecně

- Ve výrokové logice i v predikátové logice prvního řádu existují dokazovací systémy, které jsou korektní a zároveň úplné.
- V predikátových logikách vyššího řádu takové systémy neexistují.
- V KIV/TI se budeme zabývat jen výrokovou logikou, kterou v oborech informatika a výpočetní technika používáme zejména jako
  - nástroj pro logické odvozování a dokazování (expertní systémy, umělá inteligence)
  - nástroj pro návrh a popis hardware (číslicové systémy)
- Predikátovým počtem se budou zabývat jiné předměty ve vyšších ročnících studia.

Výroková logika

- *Výroková logika* je formální odvozovací systém, ve kterém jsou atomickými formulemi *výrokové proměnné*.
- Abeceda jazyka výrokové logiky
  - P - neprázdná množina symbolů reprezentujících *výrokové proměnné* (*atomické výrokové formule, prvoformule, elementární výroky, …..*)
  - *výrokové spojky* (*logické operátory, logické funktory, ….*) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
    (negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence)
  - závorky (,)
- Abecedou jazyka jsou výrokové proměnné, výrokové spojky a závorky.

Výroková logika - syntaxe

- Syntaxe formulí výrokové logiky:
  - *(Dobře utvořené) výrokové formule* lze definovat rekurzivně takto:

1. Každá výroková proměnná je výrokovou formulí
2. Jestliže *A, B* jsou libovolné (dobře utvořené) výrokové formule, jsou výrokovými formulemi i formule (A) a (B) a *složené formule* $\neg A$, $\neg B$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$
3. Neexistují žádné jiné výrokové formule.

- Každou formuli výrokového počtu tedy lze vytvořit jen konečným počtem užití pravidel 1. a 2.

Výroková logika - syntaxe

- Poznámky k syntaxi formulí výrokové logiky
  1. Při zápisu složených formulí se obvykle dvojice vnějších závorek vynechává, např. místo $((A \wedge B) \rightarrow (B \vee C))$ píšeme $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee C)$
  2. Od počátku svého vývoje (starověké Řecko) logika zkoumala soudy ve formě implikací. Symboly výrokových spojek začaly být používány až v 19. století. Kromě symbolů $\neg$ a $\rightarrow$ byly zavedeny i ostatní spojky, a to jako zkratky:

$A \vee B$ je zkratka za $(\neg A) \rightarrow B$

$A \wedge B$ je zkratka za $\neg(A \rightarrow \neg B)$

$A \leftrightarrow B$ je zkratka za $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Výroková logika - sématika

- Každé výrokové proměnné lze přiřadit hodnotu PRAVDA nebo NEPRAVDA (obvykle reprezentované jako 1 nebo 0 či T = **true** nebo F = **false**.
- Přiřazení pravdivostních hodnot složeným formulím je určeno pravdivostním ohodnocením výrokových proměnných (a významem výrokových spojek).
- Přiřazení pravdivostních hodnot výrokovým formulím se formule stává konkrétním výrokem s jednoznačně určenou pravdivostní hodnotou.
- Analogie s reálnou funkcí *n* reálných proměnných - výroková formule není nic jiného, než „logická funkce“ *n* „logických“ proměnných.

Výroková logika - sématika

- Vystupuje-li ve formuli k různých výrokových proměnných, existuje 2^k různých pravdivostních ohodnocení formule.
- Význam výrokových spojek:

A	B	Negace $\neg A$	Konjunkce $A \wedge B$	Disjunkce $A \vee B$	Implikace $A \to B$	Ekvivalence $A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Výroková logika – klasifikace formulí

- *Splnitelná formule* = formule, která je pravdivá alespoň v jednom pravdivostním ohodnocení.
- Pravdivostní ohodnocení, v němž je splnitelná formule pravdivá = *model formule*.
  Značení: $\mathcal{M} \models A$ Čteme: „ohodnocení $\mathcal{M}$ je modelem formule A.
- *Tautologie (logicky pravdivá formule)* = formule, která je pravdivá ve všech pravdivostních ohodnoceních. Modelem tautologie je libovolné pravdivostní ohodnocení.
- *Kontradikce (nesplnitelná formule)* = formule, která není pravdivá v žádném pravdivostním ohodnocení. Model kontradikce neexistuje.
- Je zřejmé, že negací tautologie je kontradikce a naopak.

Výroková logika – důležité tautologie

zákon dvojí negace	$(\neg(\neg A)) \leftrightarrow A$
obměna implikace	$(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$
princip sporu	$\neg((\neg A) \wedge A)$
zákon vyloučení třetího	$A \vee \neg A$
tranzitivita implikace	$((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$
antisymetrie implikace	$((A \to B) \wedge (B \to A)) \to (A \leftrightarrow B)$
de Morganova pravidla	$(\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
	$(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
negace implikace	$(\neg (A \to B)) \leftrightarrow (A \wedge (\neg B))$

- **Věta o nahrazení:** nahradíme-li v tautologii všechny výskyty některé výrokové proměnné libovolnou (ale pro všechny výskyty stejnou) formulí, vznikne tak opět tautologie.

Logické vyplývání

- *Logické vyplývání (sémantický důsledek, tautologický důsledek, ……)* je specifický vztah mezi formulemi, kdy platnost jedné formule automaticky vyplývá z platnosti formule jiné (respektive z platnosti všech formulí z nějaké množiny).
- Jinak řečeno: ve všech pravdivostních ohodnoceních, ve který je pravdivá „výchozí formule“ (respektive všechny „výchozí“ formule), je pravdivá i formule vyplývající.

- **Příklad:** Z formule $A \leftrightarrow B$ logicky vyplývá formule $A \rightarrow B$.

  Obráceně to ale neplatí.

Logické vyplývání

Příklad: Z formule $A \leftrightarrow B$ logicky vyplývá formule $A \to B$.

A	B	Ekvivalence $A \leftrightarrow B$	Implikace $A \to B$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Všechny jedničky ve ve sloupci „výchozí“ formule (u nás ekvivalence) jsou „pokryty“ jedničkami ve sloupci vyplývající formule (u nás implikace) $\Rightarrow$ ve všech pravdivostních ohodnoceních, kde je pravdivý antecedent, je pravdivý i konsekvent.

Logické vyplývání

- Formule K logicky vyplývá z formule A *(respektive K je sémantickým důsledkem*, je *tautologickým důsledkem*, je *konsekventem* formule A) právě tehdy, je-li formule K pravdivá ve všech modelech formule A. Značení: $A \vdash K$.

  Terminologie: formule A = *antecedent,* formule K = *konsekvent.*
- Je zřejmé, že tautologie je sémantickým důsledkem libovolné formule, respektive libovolné množiny formulí včetně prázdné. Značení: $\vdash T$.
- Je zřejmé, že pokud platí $A \vdash B$ i $B \vdash A$, jsou formule A i B ekvivalentní, tedy $A \leftrightarrow B$ je tautologie.

Logické vyplývání

- **Důsledky:**
- Formule B logicky vyplývá z formule A právě tehdy, když je formule $A \longrightarrow B$ tautologií.
- Formule B logicky vyplývá z formulí $A_1, A_2, \dots A_n$ právě tehdy, když je formule $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \longrightarrow B$ tautologií.
- Formule B logicky vyplývá z formulí $A_1, A_2, \dots A_n$ právě tehdy, když je formule $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n \wedge (\neg B)$ kontradikcí.
- **Jak rozhodnout, zda formule logicky vyplývá z formulí jiných?**

  Úplnou indukcí (tj. pomocí pravdivostní tabulky) nebo dedukcí (odvozením).

Hilbertův odvozovací systém

- Hilbertovský výrokový kalkulus je tvořen třemi axiomy a odvozovacím pravidlem *modus ponens*.
- Soubor logických axiomů *(soubor axiomů výrokové logiky)*:

  axiom *A1*: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$,
  axiom *A2*: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$,
  axiom *A3*: $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$.

  kde *A, B, C* jsou libovolné výrokové formule.

- Pravidlo modus ponens:

  z platnosti formulí A a $A \rightarrow B$ lze odvodit platnost formule B

Hilbertův odvozovací systém

- **Poznámky k axiomům:**

Axiom A1 vyjadřuje, že je-li výrok A pravdivý, je pravdivá i libovolná implikace, jejímž je (pravdivý) výrok A důsledkem.

Axiom A2 vyjadřuje distributivnost implikace.

Axiom A3 vyjadřuje pricip nepřímého důkazu – máme-li dokázat, že z předpokladu A plyne tvrzení B, lze to učinit důkazem, že z nepravdivosti tvrzení B plyne nepravdivost předpokladu A.

- **Poznámky k pravidlu modus ponens:**

Pravidlo *modus ponens* je třeba chápat takto: pro všechna ohodnocení, kde jsou současně pravdivé formule A a $A \to B$ je pravdivá i formule B . Jsou-li tedy formule A a $A \to B$ tautologie, je i formule B tautologií , formálně $A, A \to B \vdash B$.

Hilbertův odvozovací systém

- **Poznámky k pravidlu modus ponens:**

  obecněji - jsou-li formule A a $A \rightarrow B$ současně pravdivé na nějaké množině ohodnocení M, je pro všechna ohodnocení z množiny M pravdivá i formule B.

- Omezíme-li se jen na axiomy výrokového počtu A1, A2, A3, umožňuje pravidlo modus ponens odvozovat tautologie. Tedy každá formule odvoditelná z axiomů A1, A2, A3 bude tautologií.
- Je každá tautologie formálně dokazatelná? V úplném systému axiomů **ANO.**
- Úplný systém axiomů je takový soubor axiomů, v němž je každá tautologie dokazatelná. **Hilbertův systém axiomů je úplný.**

Formální důkaz v odvozovacím systému

Formálním důkazem formule A nazveme takovou konečnou posloupnost formulí $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, kde je dokazovaná formule posledním členem, tedy $A = A_n$, a pro každé $i \leq n$ je A_i axiom nebo je A_i odvozeno pravidlem *modus ponens* z formulí A_j, A_k, kde $j < i$, $k < i$ (obě antecedentní formule se tedy v posloupnosti musí vyskytnout před konsekventní formulí).

<u>Ilustrační příklad</u> (formální důkaz formule $A \rightarrow A$ deduktivním postupem):

Posloupnost formulí A_i vytvoříme takto:

$A_1 : A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ (axiom *A1*; za *B* dosazeno $A \rightarrow A$)

$A_2 : (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$
(axiom *A2*; za *B* dosazeno $A \rightarrow A$; za *C* dosazeno A)

$A_3 : (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ (aplikace *modus ponens* na A_1, A_2)

$A_4 : A \rightarrow (A \rightarrow A)$ (axiom *A1*; za *B* dosazeno A)

$A_5 : A \rightarrow A$ (aplikace *modus ponens* na A_3, A_4)

Dedukce z množiny mimologických axiomů

- Axiomy A1, A2, A3 jsou výrokové tautologie, jsou logicky pravdivé ze své podstaty, nepřináší žádné poznatky o (jakékoli) zkoumané skutečnosti.
- Jak využít mechanizmus deduktivního odvozování při zkoumání reality? Empirické poznatky o realitě budeme vyjadřovat formulemi, které nebudou tautologicky pravdivé, ale budou splnitelné. Množinu těchto formulí (*vlastních axiomů*, *mimologických axiomů*) budeme nazývat *teorie* a označovat *T.*
- Použijeme-li k odvozování kromě axiomů A1, A2, A3 i množinu formulí *T*, budou odvozené formule pravdivé ve všech modelech množiny *T* , tj. ve všech pravdivostních přiřazeních, ve kterých jsou současně pravdivé všechny formule množiny *T* .