KATEDRA INFORMATIKY A VÝPOČETNÍ TECHNIKY

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

Předmět KIV/TI - přednáška 12

Teorie a modely výrokové logiky

Ing. Václav Vais, Ph.D.

vais@kiv.zcu.cz

Dedukce z množiny mimologických axiomů

- Axiomy A1, A2, A3 jsou výrokové tautologie, jsou logicky pravdivé ze své podstaty, nepřináší žádné poznatky o (jakékoli) zkoumané skutečnosti.
- Jak využít mechanizmus deduktivního odvozování při zkoumání reality? Empirické poznatky o realitě budeme vyjadřovat formulemi, které nebudou tautologicky pravdivé, ale budou splnitelné. Množinu těchto formulí (*vlastních axiomů*, *mimologických axiomů*) budeme nazývat *teorie* a označovat *T.*
- Použijeme-li k odvozování kromě axiomů A1, A2, A3 i množinu formulí *T*, budou odvozené formule pravdivé ve všech modelech množiny *T* , tj. ve všech pravdivostních ohodnoceních, ve kterých jsou současně pravdivé všechny formule množiny *T* .

Dedukce z množiny mimologických axiomů

- Typické:
  - realitu popíšeme *k* elementárními výroky
  - každý z nich může být pravdivý nebo nepravdivý
  - existuje tedy $N_0 = 2^k$ různých pravdivostních ohodnocení
  - pokusy nebo pozorováním některé z těchto kombinací vyloučíme (nemohou nastat); „korektních“ pravdivostních ohodnocení, (tj. takových, které mohou nastat), zbude $N < N_0$
  - i z takových elementárních výroků lze odvozovat dedukcí další formule, které budou pravdivé ve všech pravdivostních ohodnoceních, kde jsou (současně) pravdivé výchozí elementární výroky

Teorie jazyka výrokového počtu, model

- *Teorie jazyka výrokového počtu* T = množina splnitelných formulí výrokového počtu (*mimologických axiomů*)
- *Model teorie* T = pravdivostní ohodnocení M, v němž jsou všechny mimologické axiomy z T pravdivé.

  Formálně: $\forall A \in T : M \models A$
- Jestliže je formule A pravdivá v každém modelu teorie T, pak logicky vyplývá z teorie T (ve smyslu dříve uvedené definice logického vyplývání).
- Množina formulí T *je nesplnitelná,* pokud neexistuje její model, tedy neexistuje pravdivostní ohodnocení M, v němž by byly pravdivé všechny formule z T.

Důkaz formule z teorie

- *Důkaz formule A z teorie T* = („konečná“ posloupnost formulí taková, že jejím posledním členem je formule *A* a každá z předchozích formulí je
  - axiom výrokového počtu (A1, A2, A3 s možností využití věty o nahrazení)
  - nebo formule patřící do teorie *T*
  - nebo se získá z předchozích formulí odvozením pravidlem modus ponens
- Pokud je $T = \emptyset$, pak je *A* formálně dokazatelná formule jazyka výrokového počtu, tedy výroková tautologie.

  Formálně: $\vdash A$

Teorie jazyka výrokového počtu, model

- Terminologie: *Formule A je formálně dokazatelná v T .*
- Značení: $T \vdash A$
- Teorie T *je sporná,* pokud existuje formule A taková, že platí

  $$(T \vdash A) \land (T \vdash \neg A)$$

  (tedy existuje formule taková, že lze dokázat jak tuto formuli, tak i její negaci).
- Teorie T *je bezesporná* v opačném případě (tedy pokud neexistuje žádná taková formule, že je možné dokázat jak tuto formuli, tak i její negaci).

Dokazování formule v teorii T - příklad

Dokažte, že z formulí T1 : $A \rightarrow B$ a T2 : $B \rightarrow C$ logicky vyplývá formule $A \rightarrow C$

Posloupnost formulí A_i vytvoříme takto:

A_1 : $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ (axiom A2)

A_2 : $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ (axiom A1; za A dosazeno $B \rightarrow C$; za B dosazeno A)

A_3 : $B \rightarrow C$ (vlastní axiom T2)

A_4 : $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ (aplikace *modus ponens* na A_3 , A_2)

A_5 : $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ (aplikace *modus ponens* na A_4 , A_1)

A_6 : $A \rightarrow B$ (vlastní axiom T1)

A_7 : $A \rightarrow C$ (aplikace *modus ponens* na A_6 , A_5)

Věta o dedukci, věta o důkazu sporem

- Jsou–li A a B výrokové formule a T množina výrokových formulí, pak

  $T \vdash (A \longrightarrow B)$ právě tehdy, když $T \cup \{A\} \vdash B$.

  jinak řečeno

  Rozšíříme-li množinu formulí o předpoklad implikace, která z této množiny vyplývá, pak z této (rozšířené) množiny vyplývá i tvrzení té implikace.

- Je–li A výroková formule a T množina výrokových formulí, pak

  $T \vdash A$ právě tehdy, když $T \cup \{\neg A\}$ je nesplnitelná množina.

  jinak řečeno

  Tvrzení lze dokázat tak, že vyvrátíme jeho negaci sporem s předpoklady.

Věta o rozboru případů, věta o bezespornosti

- Jsou–li A a B výrokové formule a T množina výrokových formulí, pak

  $T \cup \{A, B\} \vdash$ C právě tehdy, když $T \cup \{A\} \vdash C$ a zároveň $T \cup \{B\} \vdash C$.

  Důsledek:

  Je-li v předpokladech disjunkce, pak je třeba prověřit obě alternativy a z obou musí množiny vyplývat závěr.

- Je-li T množina výrokových formulí, pak

  T je bezesporná, právě když T je splnitelná.

Rozhodnutelnost logického kalkulu

- Logický kalkul je *rozhodnutelný* právě tehdy, když existuje algoritmus, který o každé formuli jednoznačně rozhodne, zda je či není tautologií.
- **Výrokový počet je rozhodnutelný.**
- Predikátový počet rozhodnutelný není.
- Lze zavést slabší pojem *parciální rozhodnutelnost* (přesahuje rozsah tohoto textu, souvisí s Turingovými stroji a s teorií vyčislitelnosti), pak
  - predikátový počet prvního řádu je parciálně rozhodnutelný
  - predikátové počty vyšších řádů nejsou rozhodnutelné ani parciálně

KATEDRA INFORMATIKY A VÝPOČETNÍ TECHNIKY

FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

Předmět KIV/TI - přednáška 12

Algebraický přístup k výrokovému počtu

Ing. Václav Vais, Ph.D.

vais@kiv.zcu.cz

Logické funkce

- Algebraický přístup k výrokovému počtu otevírá cestu k pohodlnějšímu dokazování výrokových formulí.
- Výroková formule, v nichž vystupuje *k* výrokových proměnných má 2^k různých pravdivostních ohodnocení, každému pravdivostnímu ohodnocení přiřadí jednoznačnou (logickou) hodnotu $\Rightarrow$ lze na ni nahlížet jako na *logickou funkci (Booleovu funkci, booleovskou funkci) n logických proměnných.*
- Jak lze (obecně) reprezentovat (jakékoli) funkce?
  - formulí (tj. funkčním předpisem, vzorcem, …..)
  - tabulkou (v případě logických funkcí *pravdivostní tabulkou*)

Logické funkce

- Ve formulích vystupuje konečný počet nezávislých logických proměnných, jsou jen dvě pravdivostní hodnoty

  $$\Rightarrow$$

  pro daný počet nezávislých logických proměnných k existuje jen konečný počet navzájem různých logických funkcí, a to

  $$2^{2^k} = 2^{\left(2^k\right)}$$

Proč zrovna tolik? Naznačí následující příklady.

Logické funkce jedné proměnné

A	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_0 = 0$

$f_1 = A$

$f_2 = \neg A$

$f_3 = 1$

Logické funkce dvou proměnných

A	B	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_0 = 0$

$f_1 = A \wedge B$

$f_2 = \neg(A \longrightarrow B)$

$f_3 = A$

$f_4 = \neg(B \longrightarrow A)$

$f_5 = B$

$f_6 = \neg(A \longleftrightarrow B)$

$f_7 = A \vee B$

$f_8 = \neg(A \vee B)$

$f_9 = A \longleftrightarrow B$

$f_{10} = \neg B$

$f_{11} = B \longrightarrow A$

$f_{12} = \neg A$

$f_{13} = A \longrightarrow B$

$f_{14} = \neg(A \wedge B)$

$f_{15} = 1$

Logické funkce dvou proměnných

- Funkce s indexy, jejichž součet je 15, jsou „vzájemnými negacemi“.
- Terminologické poznámky:
  - *A* lze číst jako „aserce *A*“ (analogie k „negace A“)
  - funkce *negace implikace* se nazývá *inhibice*
  - funkce *negace logického součtu* se nazývá *Peirceova funkce* [pírsova]
  - funkce *negace logického součinu* se nazývá *Shefferova funkce*

Logické funkce obecně

- Pravdivostní tabulky se používají také k vyhodnocování výrokových formulí.
- Příklad: vyhodnocení formule $F = ((A \wedge (\neg B)) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \vee C)$ pravdivostní tabulkou:

A	B	C	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$	$(A \wedge (\neg B)) \rightarrow C$	$A \vee C$	$((A \wedge (\neg B)) \rightarrow C) \leftrightarrow (A \vee C)$
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1

Dokazování výrokových formulí algebraickými nástroji

- Algebraickými nástroji lze také ověřovat platnost formulí a vztahy mezi formulemi.
- Je to pohodlnější cesta, než odvozování z mimologických axiomů, ale
  - odvozováním z axiomů lze získávat nové pravdivé formule, jejichž interpretací získáváme z teorie nové platné závěry
  - algebraickou cestou lze jen dokázat, zda nějaká formule je či není platná, tj. zda logicky vyplývá z výchozí teorie, nejsme ovšem schopni tuto formuli odvodit (tedy „vymyslet)
- Odvozování z axiomů je tedy nezastupitelné, význam má v automatických odvozo-vacích systémech, které odvozují nové poznatky metodami backtrackingu.

Dokazování výrokových formulí algebraickými nástroji - příklad

Dokažte, že z formulí T$_1$: $A \to B$ a T$_2$: $B \to C$ logicky vyplývá formule $A \to C$.

Vytvoříme formuli $F = (A \to B) \wedge (B \to C) \wedge (\neg(A \to C))$ a pravdivostní tabulkou dokážeme, že je kontradikcí :

			F_1	F_2	F_3	F_4	
A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$A \to C$	$\neg(A \to C)$	$F = F_1 \wedge F_2 \wedge F_4$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0

Dokazování výrokových formulí algebraickými nástroji - příklad

Dokažte, že z formulí $T_1 : A \to B$ a $T_2 : B \to C$ logicky vyplývá formule $A \to C$.

Stejně korektním důkazem je vytvoření formule $F = ((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$ a ověření, že je tautologií:

			F_1	F_2	F_3	F_4	
A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$A \to C$	$F_1 \wedge F_2$	$F = F_4 \to F_3$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Dokazování výrokových formulí algebraickými nástroji - příklad

Dokažte, že z formulí $T_1 : A \to B$ a $T_2 : B \to C$ logicky vyplývá formule $A \to C$.

Ověřování kontradikce může být pokládáno za výpočetně jednodušší .

			F_1	F_2	F_3	F_4	
A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$A \to C$	$\neg(A \to C)$	$F = F_1 \wedge F_2 \wedge F_4$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0			0
0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0				0
1	0	1	0				0
1	1	0	1	0			0
1	1	1	1	1	1	0	0

Dokazování výrokových formulí algebraickými nástroji - příklad

Ještě efektivnější cestou může být *důkaz sporem*. Předpoklad: Formule není kontradikcí.

F NENÍ kontradikcí, existuje tedy alespoň jedno pravděpodobnostní ohodnocení, ve kterém F nabývá hodnoty 1.

Všechny čtvři členy konjunkce $(A \rightarrow B)$, $(B \rightarrow C)$, A, $\neg C$ tedy v tomto pravděpodobnostním ohodnocení musí mít hodnotu 1. Tedy

4. člen $\neg C = 1$, proto $C = 0$,
3. člen $A = 1$,
1. člen $A \rightarrow B = 1$, proto (vzhledem k tomu, že $A = 1$) $B = 1$,
2. člen $B \rightarrow C = 1$, proto (vzhledem k tomu, že $B = 1$) $C = 1$ = spor s prvním řádkem

Závěr: neexistuje pravděpodobnostní ohodnocení, ve kterém by F nabyla hodnoty 1, JE to tedy kontradikce.

Standardní reprezentace logických funkcí

- *Úplné normální formy* (*kanonické formy*)
  - *úplná disjunktivní normální forma* ÚDNF
  - *úplná konjunktivní normální forma* ÚKNF

Standardní reprezentace logických funkcí

- ÚDNF logické funkce *n* logických proměnných $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - ÚDNF je ve tvaru disjunkce
  - každý člen disjunkce odpovídá jedné (konkrétní) jedničce ve sloupci „funkčních hodnot“ tabulkové reprezentace funkce
  - členy disjunkce jsou ve tvaru $\sim x_1 \wedge \sim x_2 \wedge \cdots \wedge \sim x_n$, kde symbol $\sim x_i$ představuje x_i nebo $\neg x_i$, kde $\sim x_i$ jsou voleny tak, aby člen nabyl hodnoty 1
  - členy $\sim x_1 \wedge \sim x_2 \wedge \cdots \wedge \sim x_n$ se nazývají *mintermy*

Standardní reprezentace logických funkcí

- ÚKNF logické funkce *n* logických proměnných $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$
  - ÚKNF je ve tvaru konjunkce
  - každý člen konjunkce odpovídá jedné (konkrétní) nule ve sloupci „funkčních hodnot“ tabulkové reprezentace funkce
  - členy konjunkce jsou ve tvaru $\sim x_1 \vee \sim x_2 \vee \cdots \vee \sim x_n$, kde symbol $\sim x_i$ představuje x_i nebo $\neg x_i$, kde $\sim x_i$ jsou voleny tak, aby člen nabyl hodnoty 0
  - členy $\sim x_1 \vee \sim x_2 \vee \cdots \vee \sim x_n$ se nazývají *maxtermy*

Úplné normální formy - příklad

Reprezentace logické funkce $F(x_1, x_2, x_3)$ v úplné disjunktivní normální formě

číslo řádku	x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$	Popis funkční hodnoty 1 pomocí konjunkce
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$
2	0	1	0	0	
3	0	1	1	1	$\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$
4	1	0	0	0	
5	1	0	1	1	$x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3$
6	1	1	0	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3$
7	1	1	1	1	$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$

$$F = F_1 \vee F_3 \vee F_5 \vee F_6 \vee F_7 =$$

$$= (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

Úplné normální formy - příklad

Reprezentace logické funkce $F(x_1, x_2, x_3)$ v úplné konjunktivní normální formě

číslo řádku	x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$	Popis funkční hodnoty 0 pomocí disjunkce
0	0	0	0	0	$x_1 \vee x_2 \vee x_3$
1	0	0	1	1	
2	0	1	0	0	$x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$
3	0	1	1	1	
4	1	0	0	0	$\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3$
5	1	0	1	1	
6	1	1	0	1	
7	1	1	1	1	

$$F = F_0 \wedge F_2 \wedge F_4 = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$