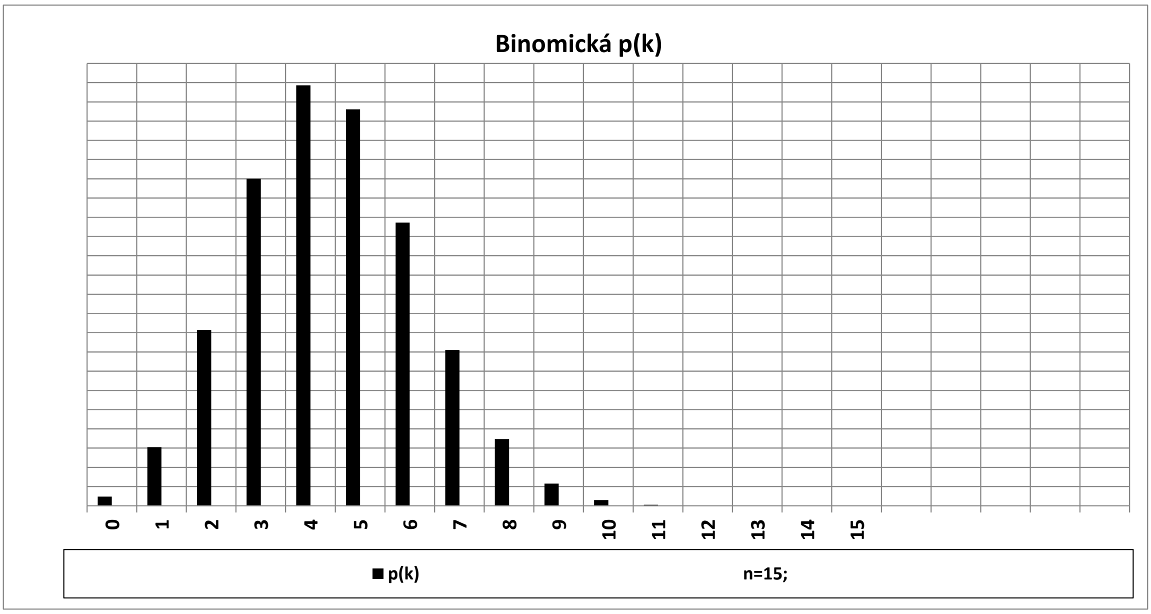
„Odhady = vymezení“ parametrů „některých diskrétních“ rozdělení na základě polohy modu (maxima pravděpodobnosti) a „tvaru“ rozdělení.

Binomické rozdělení[1]



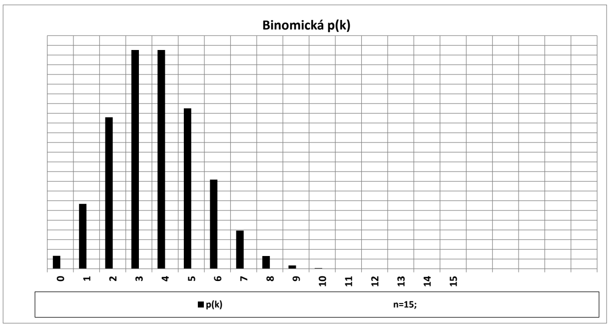
$$P_n(X = k) = P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,; \quad k = 0, \dots, n; \quad 0 < p < 1$$

Otázkou je, co lze říct z výše uvedeného obrázku o parametru p, při známém n. Pro polohu maxima k_m (zde $k_m = 4$) platí:

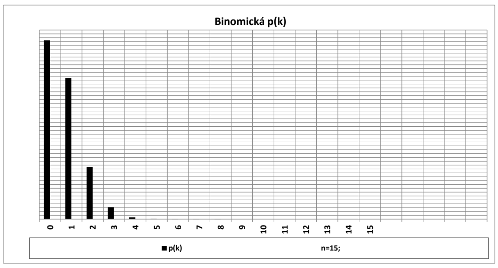
$$P_n(k_m) \geq P_n(k_m - 1) \quad a \quad P_n(k_m) \geq P_n(k_m + 1) \quad [2]$$

[1] Je dobré si uvědomit, že výrok o tom o které rozdělení jde, **není** principiálně otázkou užité statistiky, ale problémem oblasti (odborné, vědecké, …) odkud pochází data. Samozřejmě jedná se o pozorovaná (ne generovaná, simulovaná, …) data.

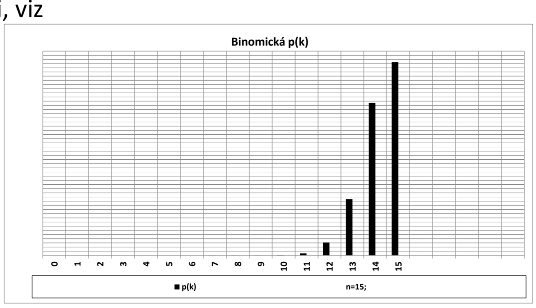
[2] Kdy může být takových maxim více, viz:



? A jak bude uvedená podmínka vypadat, pokud bude maximu na kraji, viz



nebo



?

Rozepsáno $\binom{n}{k_m} p^{k_m}(1-p)^{n-k_m} \geq \binom{n}{k_m-1} p^{k_m-1}(1-p)^{n-k_m+1}$ a

$$\binom{n}{k_m} p^{k_m}(1-p)^{n-k_m} \geq \binom{n}{k_m+1} p^{k_m+1}(1-p)^{n-k_m-1}$$

Po „vykrácení“ obou nerovností $p^{k_m}(1-p)^{n-k_m}$ dostaneme:

$$\binom{n}{k_m} \geq \binom{n}{k_m-1} \frac{(1-p)}{p} \quad \text{a} \quad \binom{n}{k_m} \geq \binom{n}{k_m+1} \frac{p}{(1-p)}$$

Při rozepsání binomických koeficientů:

$\frac{n!}{(n-k_m)!k_m!} \geq \frac{n!}{(n-k_m+1)!(k_m-1)!} \frac{(1-p)}{p}$ a $\frac{n!}{(n-k_m)!k_m!} \geq \frac{n!}{(n-k_m-1)!(k_m+1)!} \frac{p}{(1-p)}$. Když levou nerovnost vydělíme $\frac{n!}{(n-k_m)!(k_m-1)!}$ a podobně pravou vydělíme $\frac{n!}{(n-k_m-1)!(k_m)!}$, dostaneme:

$$\frac{1}{k_m} \geq \frac{1}{(n-k_m+1)} \frac{(1-p)}{p} \quad \text{a} \quad \frac{1}{(n-k_m)} \geq \frac{1}{(k_m+1)} \frac{p}{(1-p)}.$$

Drobnými úpravami z obou nerovností dostaneme: $\frac{n-k_m+1}{k_m} \geq \frac{1-p}{p}$ a $\frac{1-p}{p} \geq \frac{n-k_m}{(k_m+1)}$. Jejich řešení vůči p bude $\boldsymbol{\frac{k_m}{(n+1)} \leq p \leq \frac{k_m+1}{(n+1)}}$. Pro pravděpodobnosti z výše uvedeného obrázku to bude:

$$\frac{4}{16} \leq p \leq \frac{5}{16} \quad \text{tedy } 0.25 \leq p \leq 0.3125$$ [3].

Další informaci (pro výše uvedený obrázek) můžeme získat z porovnání $P_n(k_m+1) \geq P_n(k_m-1)$, tedy:

$$\binom{n}{k_m+1} p^{k_m+1}(1-p)^{n-k_m-1} \geq \binom{n}{k_m-1} p^{k_m-1}(1-p)^{n-k_m+1}$$

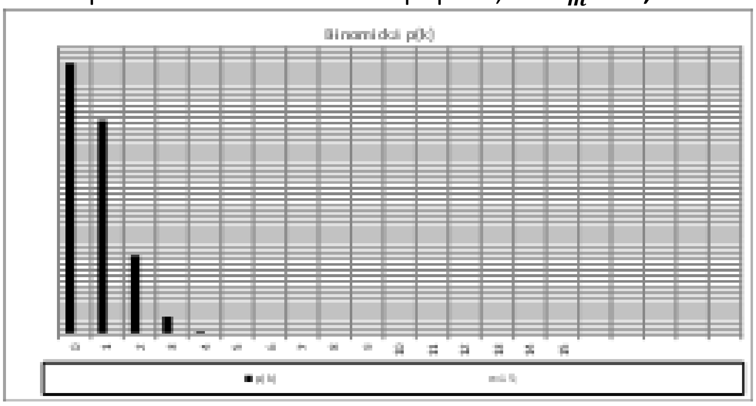
Obdobnými úpravami jako v předchozím odvození dostaneme:

$$\frac{p}{1-p} \geq \sqrt{\frac{k_m(k_m+1)}{(n-k_m+1)(n-k_m)}}$$

V případě výše uvedeného obrázku je $\sqrt{\frac{k_m(k_m+1)}{(n-k_m+1)(n-k_m)}} = 0.38925$ a proto $p \geq 0.28$

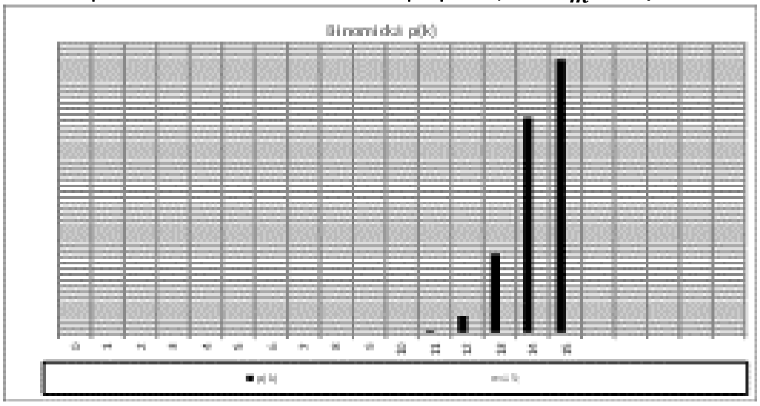
Shrneme-li oba rozbory získáme $\boldsymbol{0.28 \leq p \leq 0.3125}$, tím jsme získali intervalový odhad (s jistotou) parametru $\boldsymbol{p}$ s „šíří“ intervalu 0.0325 a to jenom rozborem kvalitativních relací.

Námět 1: Vyřešte úlohu pro binomické rozdělení v případě, že $\boldsymbol{k_m = 1}$, viz obr.



[3] Generované p bylo 0.3 .

Námět 2: Vyřešte úlohu pro binomické rozdělení v případě, že $\boldsymbol{k_m = n}$**,** viz obr.



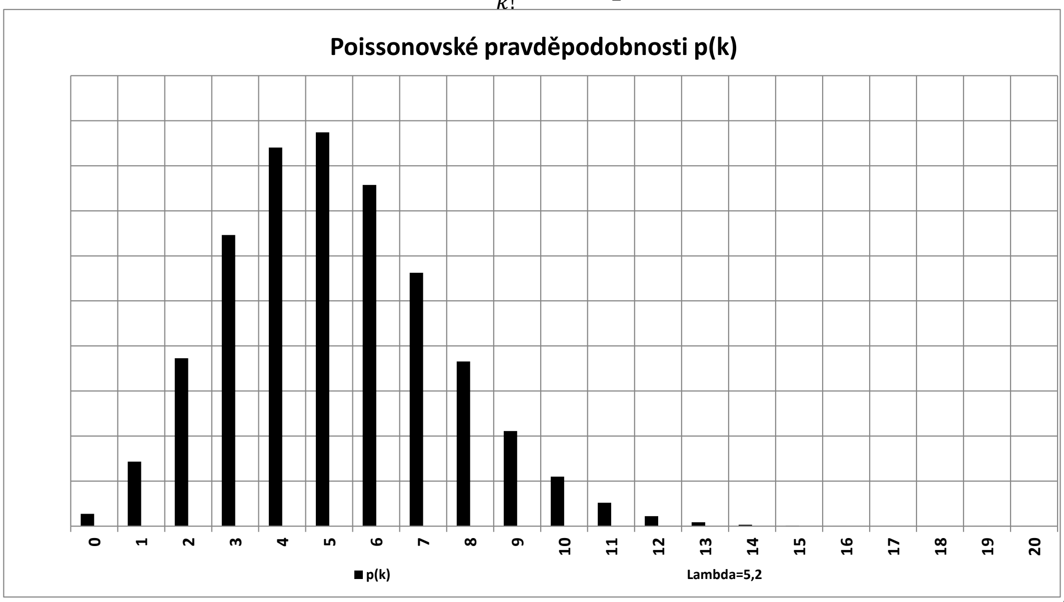
Námět 3: Ve kterých případech bude „více maxim“, tj. k_m není určeno jednoznačně (předpokládá se binomické rozdělení)?

Námět 4: Může být takových maxim více než dvě (předpokládá se binomické rozdělení)? Za jakých podmínek (vůči parametru p a při daném a známém n) bude takových maxim více (předpokládá se binomické rozdělení)?

Námět 5: Kdy a za jakých podmínek bude platit: $P_n(k_m + 1) \leq P_n(k_m - 1)$ (předpokládá se binomické rozdělení)?

Námět 6: Ze vztahu $\frac{k_m}{(n+1)} \leq p \leq \frac{k_m+1}{(n+1)}$ se pokuste vyřešit problém, kdy n není přesně známé, např. z rozebíraného obrázku lze vidět jen, že $n \geq 11$. Tj. hledáme platné dvojice (n, p), které splňují $\frac{k_m}{(n+1)} \leq p \leq \frac{k_m+1}{(n+1)}$ a $n \geq n_{max}$. Jak taková úloha bude vypadat pro případy z Námět 1: a Námět 2: ? Vše opět za předpokladu binomického rozdělení.

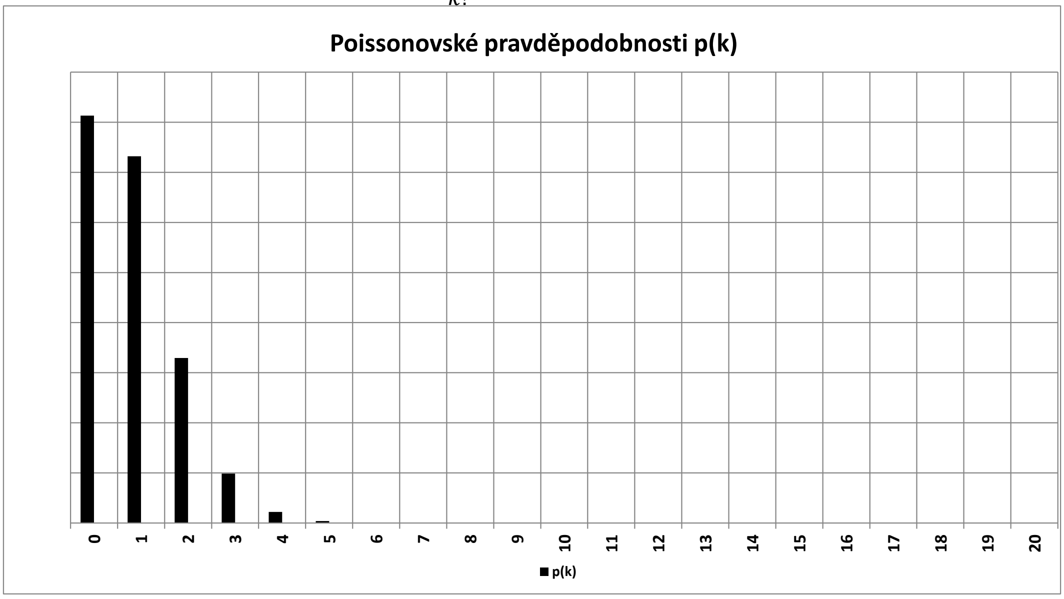
Námět 7: Řešte problém odhadu parametru λ z obrázku velikostí pravděpodobností Poissonova rozdělení $P(Y = k) = P(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$; $\lambda \in R_1$; $\lambda > 0$; $k = 0, 1, \dots,$ viz např.



,

kde $k_m = 5$.

Námět 8: Řešte problém odhadu parametru λ z obrázku velikostí pravděpodobností Poissonova rozdělení $P(Y = k) = P(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$; $\lambda \in R_1$; $\lambda > 0$; $k = 0, 1, \dots$, za předpokladu $k_m = 0$.



Námět 9: Pokuste se formulovat analogické úlohy a nalézat jejich řešení pro některá další („jednorozměrná“) diskrétní rozdělení pravděpodobnosti, např. geometrické, negativně, binomické, hypergeometrické, … .

Námět 10: Nakreslete si průběhy dotčených diskrétních rozdělení pro různé hodnoty jejich parametrů, zvl. ty hodnoty (parametrů) při kterých se mění „tvar“ grafu průběhu pravděpodobností.