Normální rozdělení a **některá** z něj odvozená 1.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ [1], náhodná proměnná X se řídí normálním rozdělením s parametry μ a σ^2.

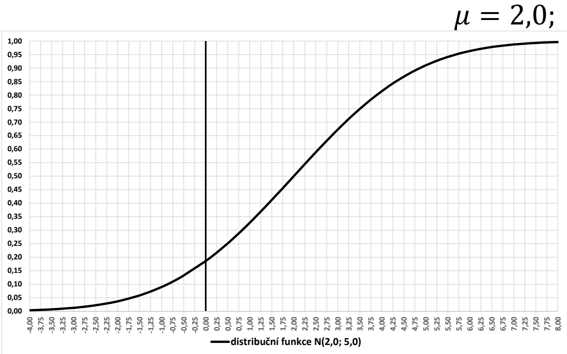
Tj. distribuční funkce náhodné proměnné X je $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, kde $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$ a hustota $f_X(x) = \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, kde $\varphi(x) = \frac{d}{dx}\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Mějme k náhodné proměnné (normálně rozdělené) X její transformaci $Y = X^2$, (***zde pozor jak vypadá definiční obor[2] Y a jak definiční obor X***). Tj . kvadrát normálně rozdělené náhodné proměnné. Pak:

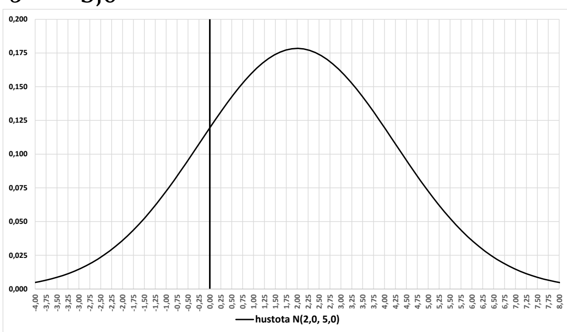
$F_Y(x) = P(Y < x) = P(X^2 < x) = P(-\sqrt{x} < X < +\sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) = \Phi\left(\frac{\sqrt{x}-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\sqrt{x}-\mu}{\sigma}\right)$ [3] a

$f_Y(x) = \frac{d}{dx}F_Y(x) = \varphi\left(\frac{\sqrt{x}-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{2\sigma\sqrt{x}} - \left(-\varphi\left(\frac{-\sqrt{x}-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{2\sigma\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{x}}\left(\varphi\left(\frac{\sqrt{x}-\mu}{\sigma}\right) + \varphi\left(\frac{-\sqrt{x}-\mu}{\sigma}\right)\right)$.

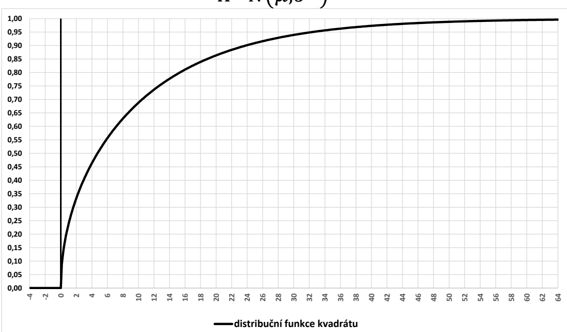
$\mu = 2{,}0; \quad \sigma^2 = 5{,}0$



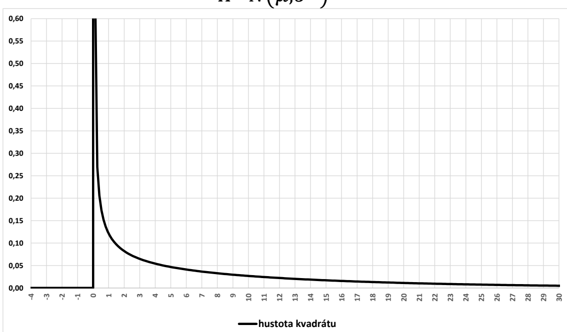
$F_{X \sim N(\mu,\sigma^2)}(x)$



$f_{X \sim N(\mu,\sigma^2)}(x)$



$F_{X^2}(x);\ X \sim N(\mu, \sigma^2)$



$f_{X^2}(x);\ X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Podobně mějme k (normálně rozdělené) náhodné proměnné X její transformaci $Y = |X|$, (***zde opět pozor jak vypadá definiční obor Y a jak definiční obor X***). Tj . absolutní hodnota normálně rozdělené náhodné proměnné. Pak:

$F_Y(x) = P(Y < x) = P(|X| < x) = P(-x < X < +x) = F_X(x) - F_X(-x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-x-\mu}{\sigma}\right)$ a

---

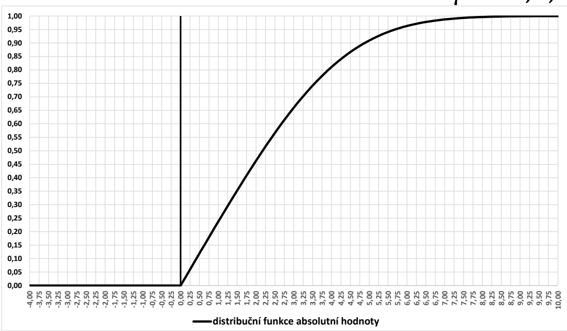
[1] Někdy se používá o konvence $N(\mu, \sigma)$, tj. místo rozptylu σ^2 se uvádí směrodatná odchylka σ.

[2] Trochu problém je jak zavést definiční obor pro náhodnou proměnnou. Pro „spojité“ náhodné proměnné ho lze **např.** zavést jako obor, kde je hustota kladná.

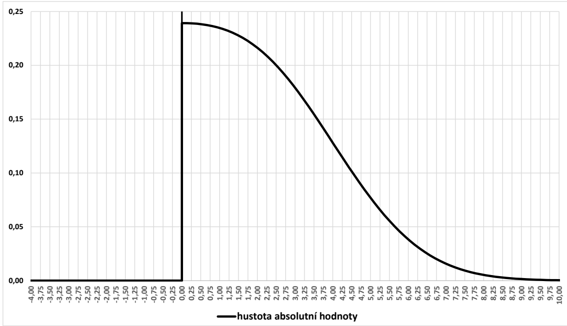
[3] Nověji se pro zavedení distribuční funkce používá definice $F_Y(x) = P(Y \leq x)$. V **tomto konkrétním případě** se hodnoty distribučních funkcí podle obou definici neliší. Pracujeme s náhodnými se spojitými distribučními funkcemi.

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx}F_Y(x) = \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma} - \left(-\varphi\left(\frac{-x-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\left(\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + \varphi\left(\frac{-x-\mu}{\sigma}\right)\right).$$

$\mu = 2{,}0;\quad \sigma^2 = 5{,}0$



$F_{|X|}(x);\ X \sim N(\mu, \sigma^2)$



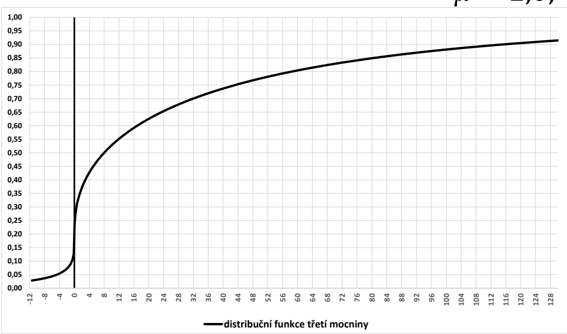
$f_{|X|}(x);\ X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Dále mějme k (normálně rozdělené) náhodné proměnné X její transformaci $Y = X^3$, (změní se zde ***definiční obor Y od definičního oboru X?***). Tj . třetí mocnina normálně rozdělené náhodné proměnné. Pak:

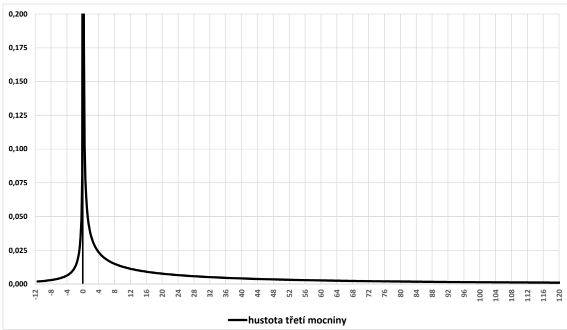
$F_Y(x) = P(Y < x) = P(X^3 < x) = P\left(X < x^{\frac{1}{3}}\right) = F_X\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \Phi\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}-\mu}{\sigma}\right)$ a

$f_Y(x) = \frac{d}{dx}F_Y(x) = \varphi\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{3\sigma x^{\frac{2}{3}}}$

$\mu = 2{,}0;\quad \sigma^2 = 5{,}0$



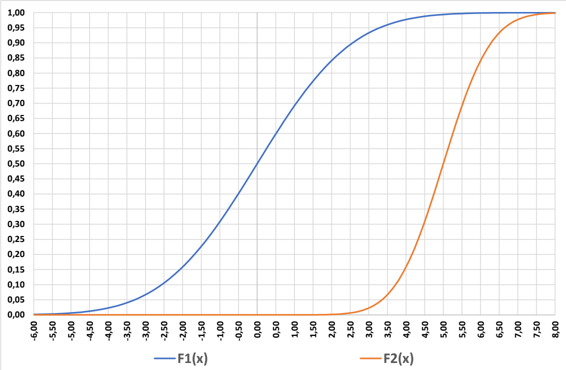
$F_{X^3}(x);\ X \sim N(\mu, \sigma^2)$



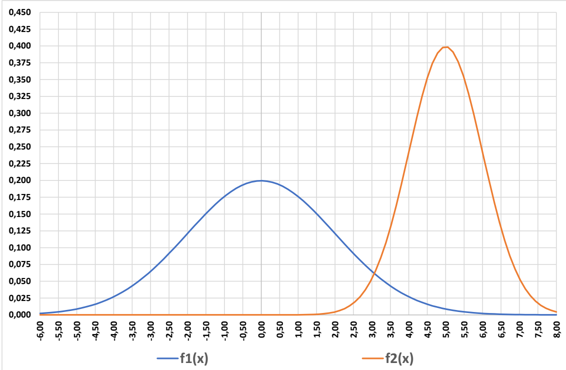
$f_{X^3}(x);\ X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Rozdíl **konvexní kombinace** (normálně rozdělených) náhodných proměnných **proti směsi** (normálně rozdělených) náhodných proměnných:

Mějme dvě **nezávislé** náhodné proměnné $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

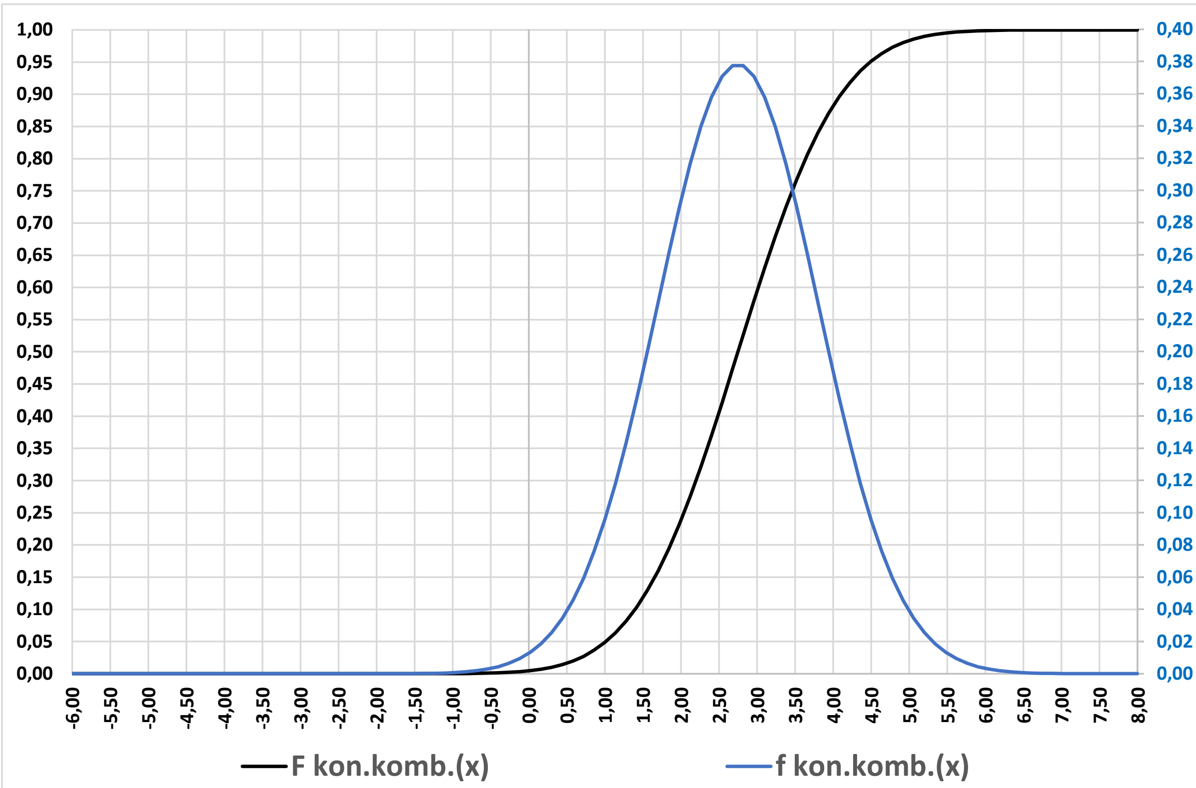


$F_{X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)}(x)$ a $F_{X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)}(x)$;
$\mu_1 = 0{,}0;\ \sigma_1^2 = 4{,}0;$
$\mu_2 = 5{,}0;\ \sigma_2^2 = 1{,}0$



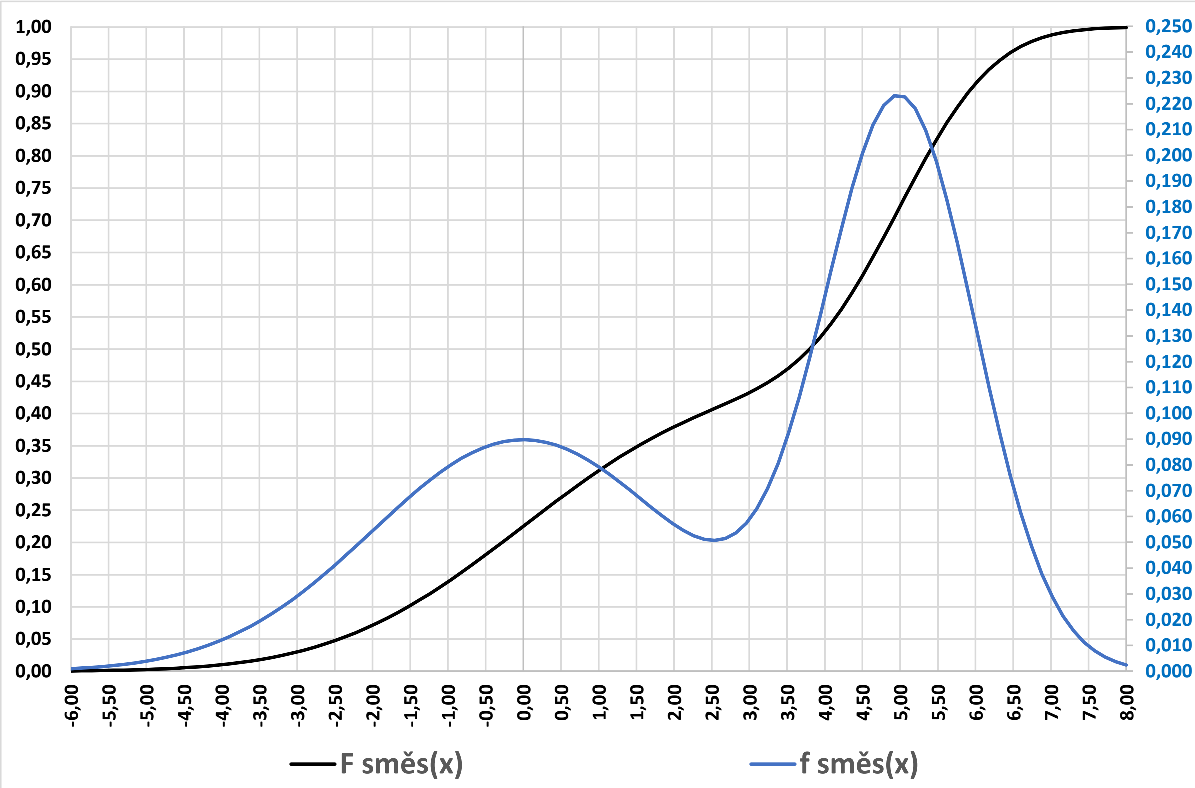
$f_{X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)}(x)$ a $f_{X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)}(x)$

pak pod jejich **konvexní kombinací** (pro $0 < \alpha < 1$) budeme rozumět novou náhodnou proměnnou $\boldsymbol{Y = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2}$, ta má opět normální rozdělení (dokažte, obtížnější – nejlépe pomocí charakteristických funkcí; je předpoklad nezávislosti podstatný?) $Y \sim N(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2,\ \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_1^2)$ (dokažte, že to budou takové parametry; je také zde předpoklad nezávislosti podstatný?).



$F_{X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)}(x)$ a $F_{X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)}(x)$;
$\mu_1 = 0{,}0;\ \sigma_1^2 = 4{,}0;$
$\mu_2 = 5{,}0;\ \sigma_2^2 = 1{,}0$
$\alpha = 0{,}45$
$F_{Y \sim N(\mu, \sigma^2)}(x);\quad \mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 = 2{,}75;\ \ \sigma^2 = \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_1^2 \cong 1{,}113$

A pod jejich (α)**směsí** (pro $0 < \alpha < 1$) budeme rozumět novou náhodnou proměnnou $\boldsymbol{Y}$ **s distribuční funkcí** $\boldsymbol{F_Y(x) = \alpha F_{X_1}(x) + (1-\alpha)F_{X_2}(x)}$ a hustotou $f_Y(x) = \alpha f_{X_1}(x) + (1-\alpha)f_{X_2}(x)$. Náhodná proměnná (až na velmi vzácné výjimky) už nebude mít normální rozdělení pravděpodobnosti. Námět: určete její střední hodnotu a rozptyl.



$$F_{X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)}(x) \text{ a } F_{X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)}(x);$$
$$\mu_1 = 0{,}0;\ \sigma_1^2 = 4{,}0;$$
$$\mu_2 = 5{,}0;\ \sigma_2^2 = 1{,}0$$
$$\alpha = 0{,}45$$
$$F_Y(x) = \alpha F_{X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)}(x) + (1-\alpha) F_{X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)}(x) \text{ a}$$
$$f_Y(x) = \alpha f_{X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)}(x) + (1-\alpha) f_{X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)}(x).$$

Součet dvou nezávislých normálně rozdělených náhodných proměnných

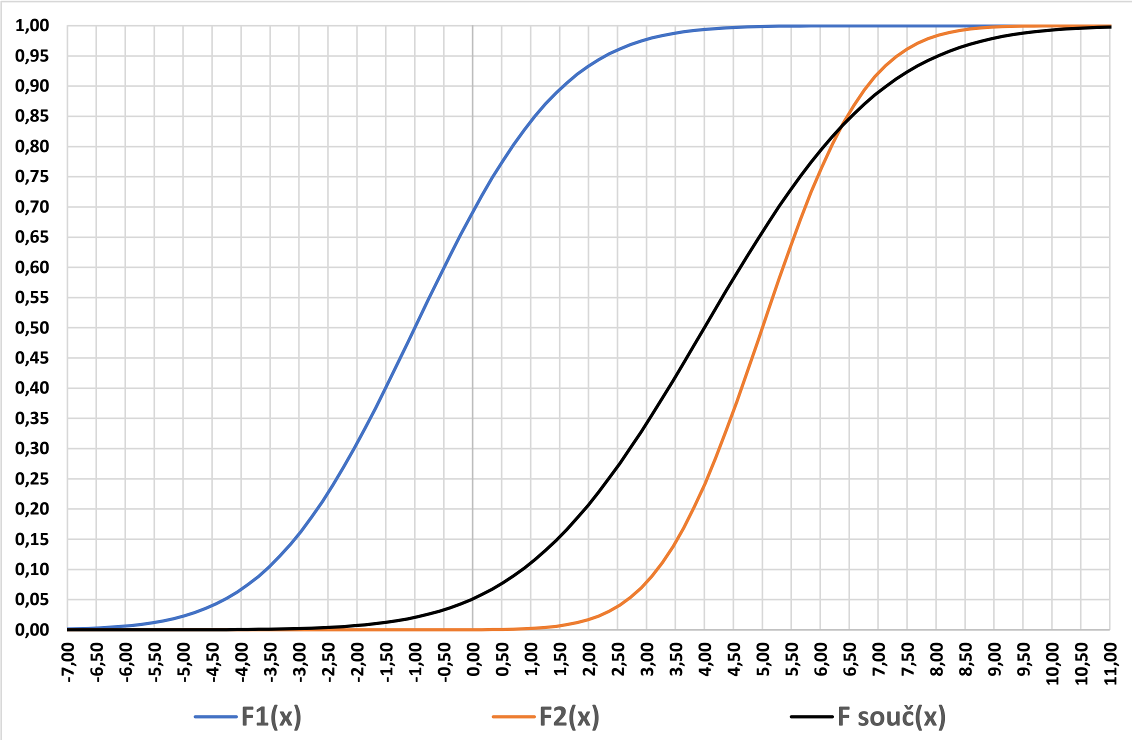
je zase normálně rozdělená náhodná proměnná.

Důkaz: Mějme dvě **nezávislé** náhodné proměnné $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ s charakteristickými funkcemi $C_{X_1}(j\omega) = e^{j\omega\mu_1 - \frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}}$ a $C_{X_2}(j\omega) = e^{j\omega\mu_2 - \frac{\sigma_2^2\omega^2}{2}}$. Protože se jedná o součet $Y = X_1 + X_2$ nezávislých náhodných proměnných bude jeho charakteristická funkce součinem charakteristických funkcí sčítanců, tedy: $C_{X_1+X_2}(j\omega) = C_{X_1}(j\omega)C_{X_2}(j\omega)$, a v tomto konkrétním případě

$$C_{X_1+X_2}(j\omega) = e^{j\omega\mu_1 - \frac{\sigma_1^2\omega^2}{2}} e^{j\omega\mu_2 - \frac{\sigma_2^2\omega^2}{2}} = e^{j\omega(\mu_1+\mu_2) - \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\omega^2}{2}}$$

a to je charakteristická funkce normálního rozdělení se střední hodnotou $\mu_1 + \mu_2$ a rozptylem $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

$Y = X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

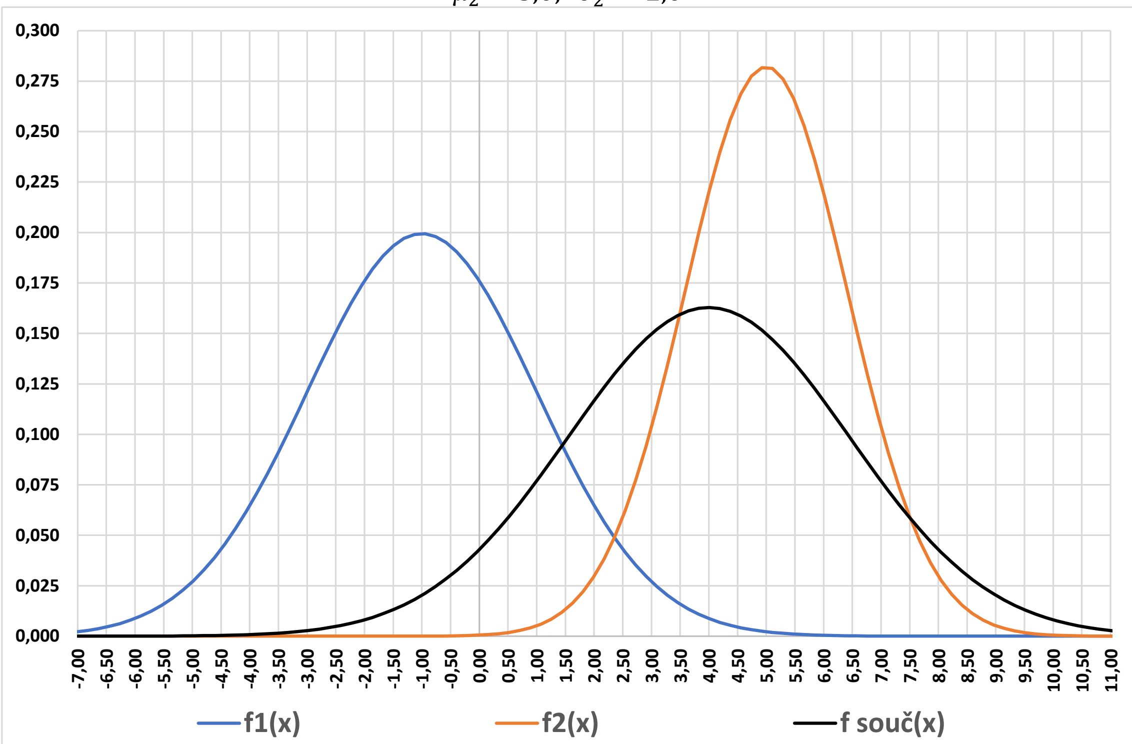


Distribuční funkce

$F_{X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)}(x)$ a $F_{X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)}(x)$ a $F_{X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2,\, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}(x)$

$\mu_1 = -1{,}0;\ \sigma_1^2 = 4{,}0;$

$\mu_2 = 5{,}0;\ \sigma_2^2 = 2{,}0$



Hustoty

$f_{X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)}(x);\ f_{X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)}(x)$ a $f_{X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2,\, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)}(x)$

$\mu_1 = -1{,}0;\ \sigma_1^2 = 4{,}0;$

$\mu_2 = 5{,}0;\ \sigma_2^2 = 2{,}0$