Normální rozdělení a některá z něj odvozená 2.

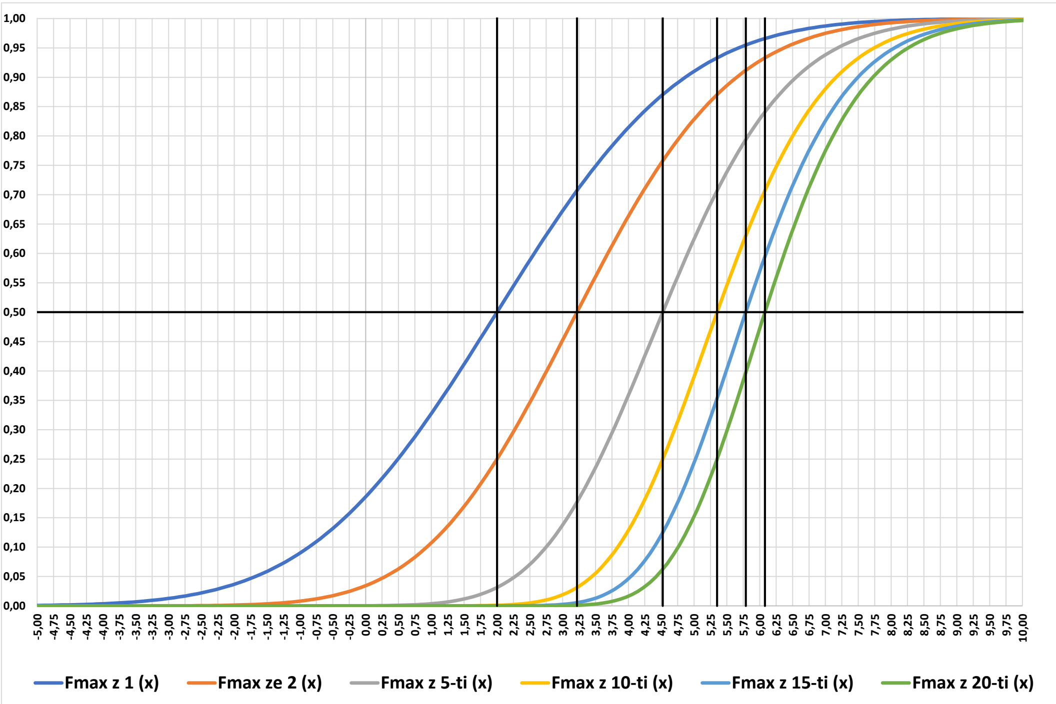
Mějme náhodné proměnné $X_1, X_2, \dots, X_n$, které jsou **stejně** normálně rozdělené a **nezávislé.** $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \sim \Phi\left(\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right); i = 1, \dots, n.$ Tj. „sestava“ těchto náhodných tvoří soubor náhodných proměnných odpovídající náhodnému výběru.

Dále mějme novou náhodnou proměnnou:

$$X_{max} = X_{(n)} = max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$ [1]

její distribuční funkce $F_{X_{(n)}}(x) = F^n(x) = \left(\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^n$ a hustota

$f_{X_{(n)}}(x) = nF^{n-1}(x)f(x) = \frac{n}{\sigma}\left(\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{n-1} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$

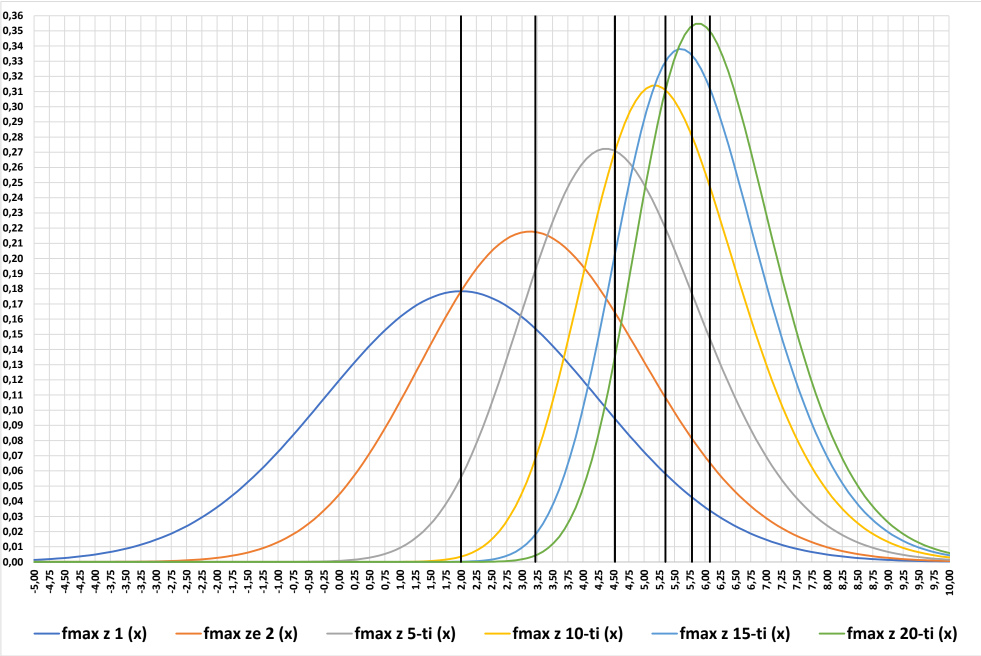


$\mu = 2;\ \sigma^2 = 5.$ Distribuční funkce. Černé čáry určují polohy mediánů[2] jednotlivých rozdělení $F_{X_{(n)}}(x);\ n = 1, 2, 5, 10, 15, 20.$

---

[1] To platí pro každou realizaci $x_1, \dots, x_n$ sestavy náhodných proměnných $X_1, \dots, X_n$.

[2] $F_{X_{(n)}}(x_{med}) = F^n(x_{med}) = \left(\Phi\left(\frac{x_{med}-\mu}{\sigma}\right)\right)^n = \frac{1}{2}.$



$\mu = 2;\ \sigma^2 = 5.$ Hustoty. Černé čáry určují polohy mediánů jednotlivých rozdělení $f_{X_{(n)}}(x);\ n = 1, 2, 5, 10, 15, 20.$

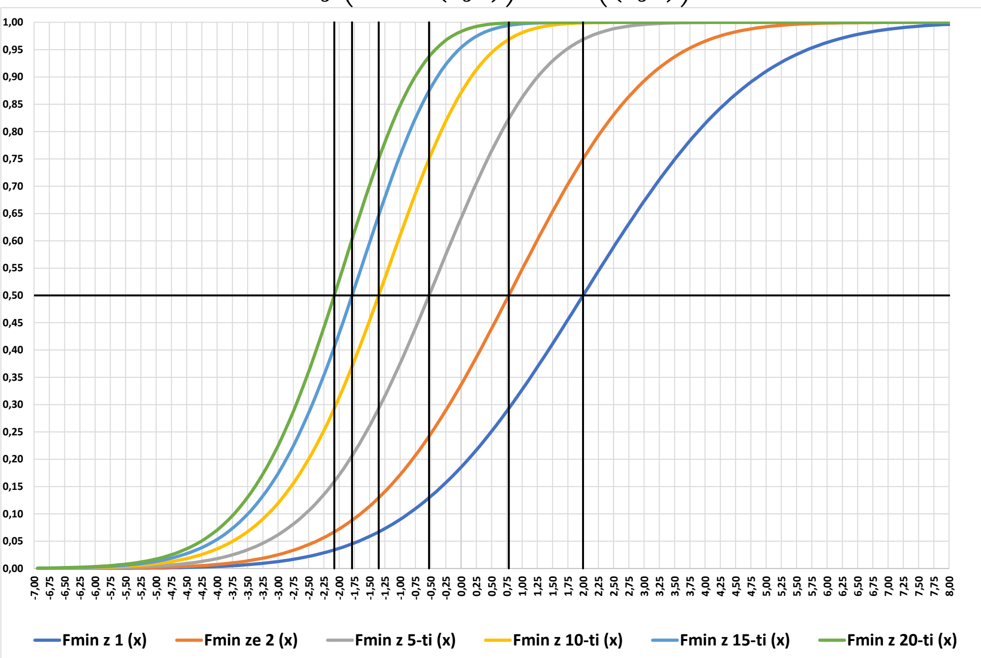
Námět: Co říkají polohy mediánů vůči maximům hustot? Mohou být rozdělení $f_{X_{(n)}}(x);\ n = \ 2, 5, 10, 15, 20$ normální? Pokud ne, proč?

Dále mějme další náhodnou proměnnou:

$$X_{min} = X_{(1)} = min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$ [3]

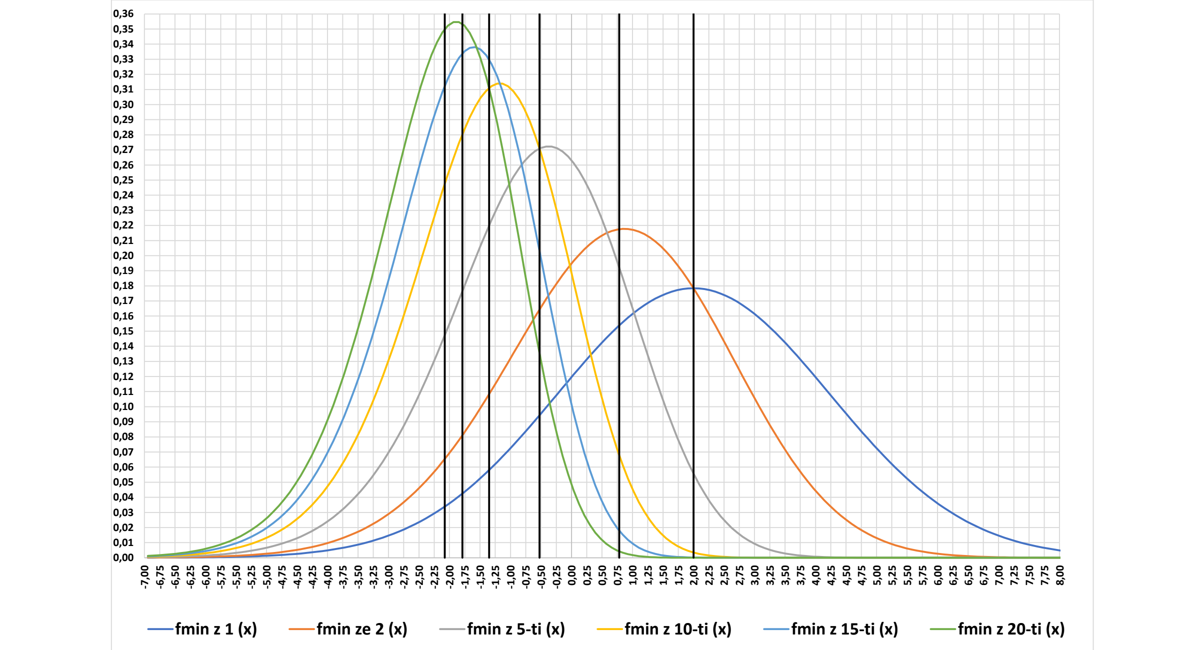
Její distribuční funkce $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - \left(1 - F(x)\right)^n = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^n$ a hustota

$f_{X_{(1)}}(x) = n\left(1 - F(x)\right)^{n-1} f(x) = \frac{n}{\sigma}\left(1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)^{n-1} \varphi\left(\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right).$



$\mu = 2;\ \sigma^2 = 5.$ Distribuční funkce. Černé čáry určují polohy mediánů jednotlivých rozdělení $F_{X_{(1)}}(x);\ n = 1, 2, 5, 10, 15, 20.$

[3] To platí pro každou realizaci $x_1, \dots, x_n$ sestavy náhodných proměnných $X_1, \dots, X_n$.



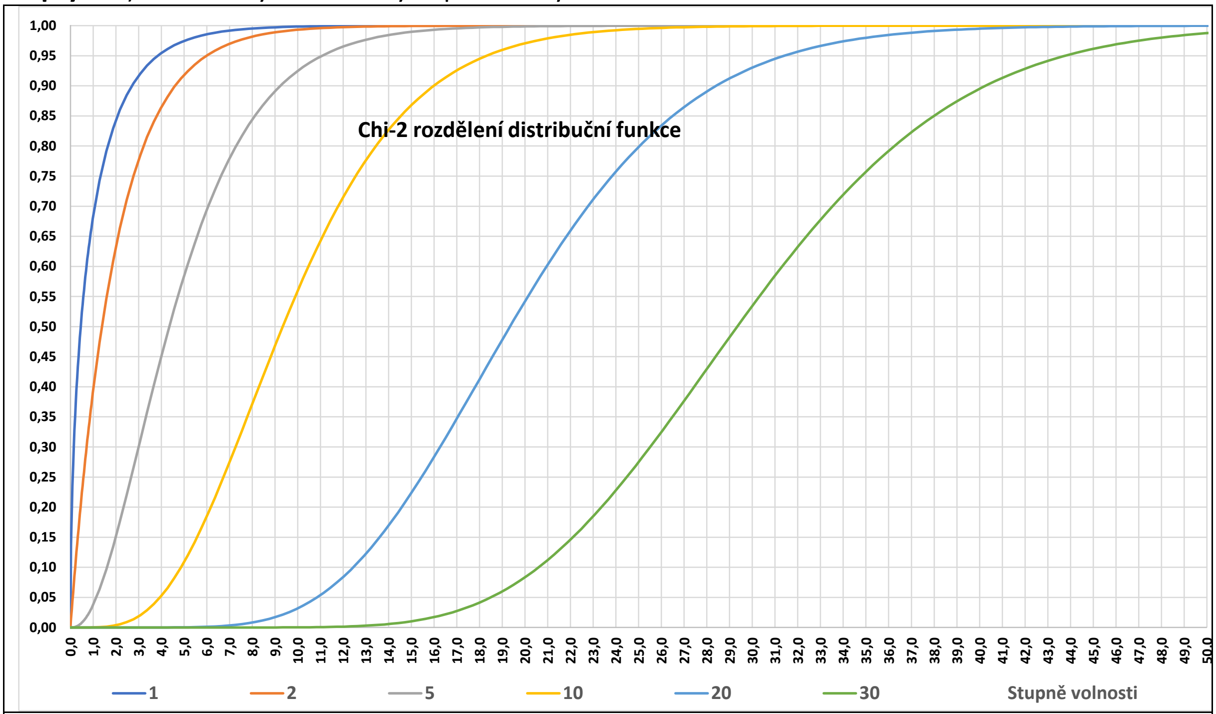
$\mu = 2$; $\sigma^2 = 5$. Hustoty. Černé čáry určují polohy mediánů[4] jednotlivých rozdělení $f_{X_{(1)}}(x)$; $n = 1, 2, 5, 10, 15, 20$.

Námět: Co říkají polohy mediánů vůči maximům hustot? Mohou být rozdělení $f_{X_{(1)}}(x)$; $n = 2, 5, 10, 15, 20$ normální? Pokud ne, proč?

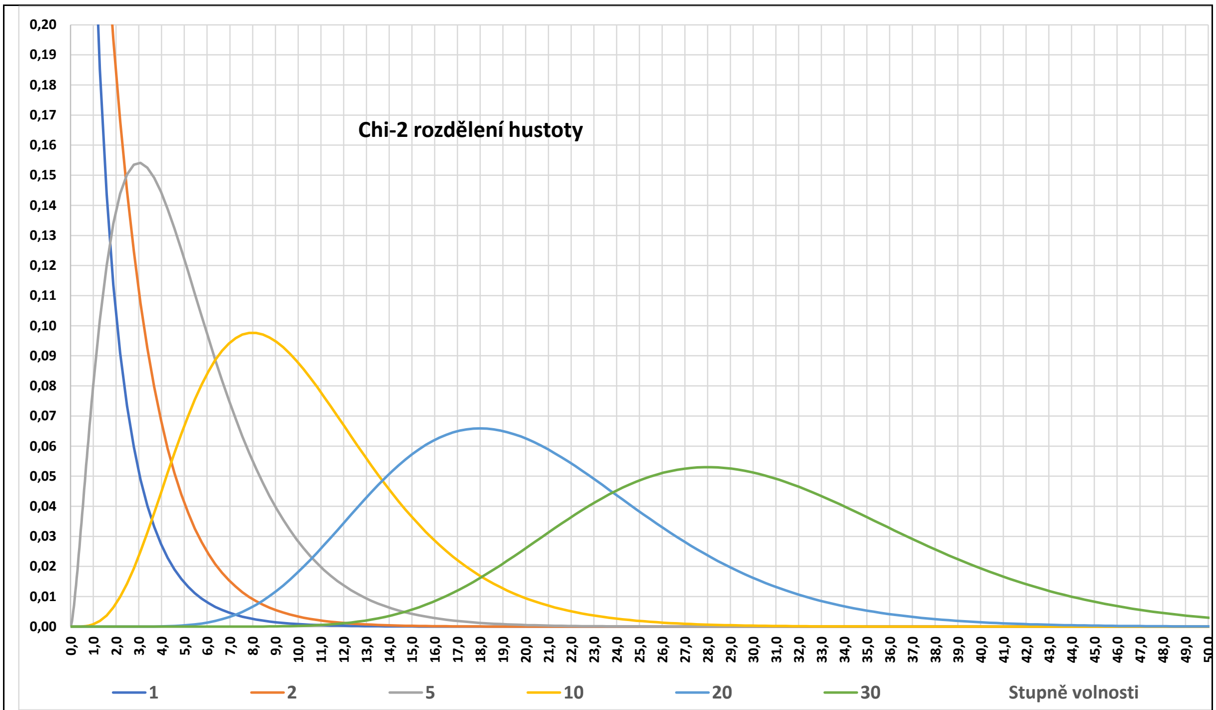
[4] $F_{X_{(1)}}(x_{med}) = 1 - \left(1 - F(x_{med})\right)^n = 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{x_{med} - \mu}{\sigma}\right)\right)^n = \frac{1}{2}$.

χ^2 a χ rozdělení

$\chi^2(n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ kde $X_i \sim N(0,1)$. $\chi^2(n)$ rozdělení s n stupni volnosti je rozdělení součtu kvadrátů n stejně rozdělených $\boldsymbol{N(0,1)}$ **(= normálně rozdělených s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem)** a nezávislých náhodných proměnných.



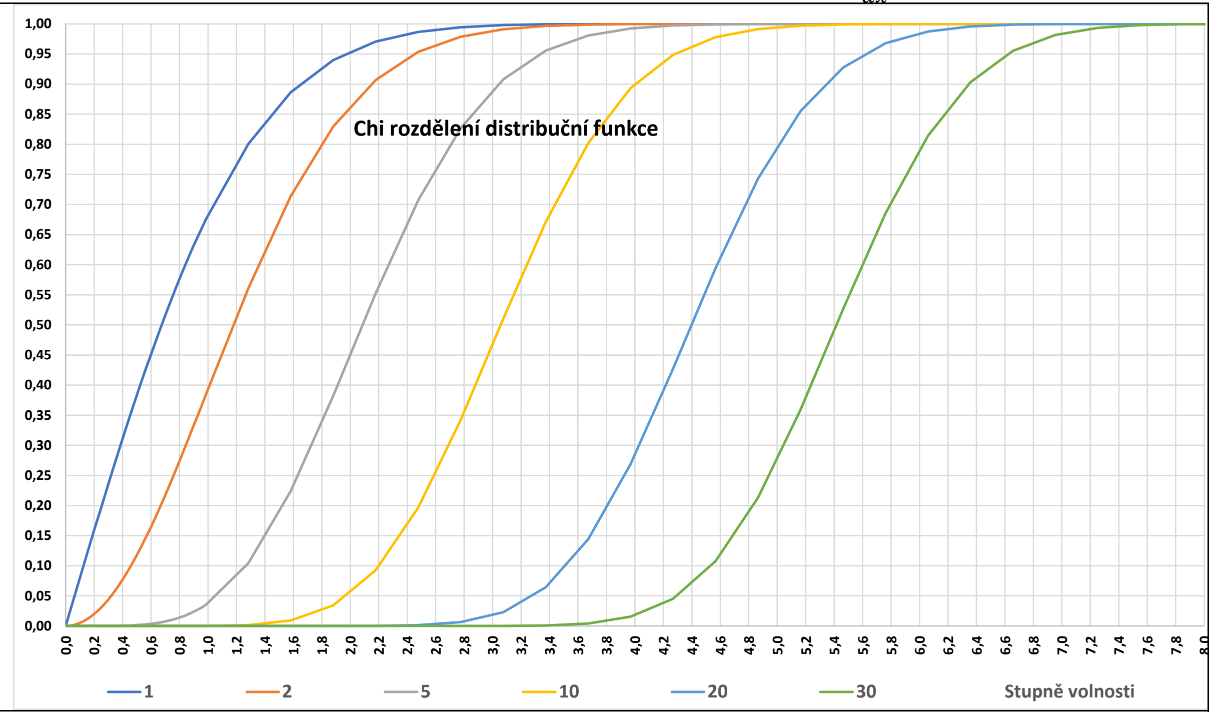
Distribuční funkce $\chi^2(n)$ rozdělení pro $n = 1, 2, 5, 10, 20, 30$.



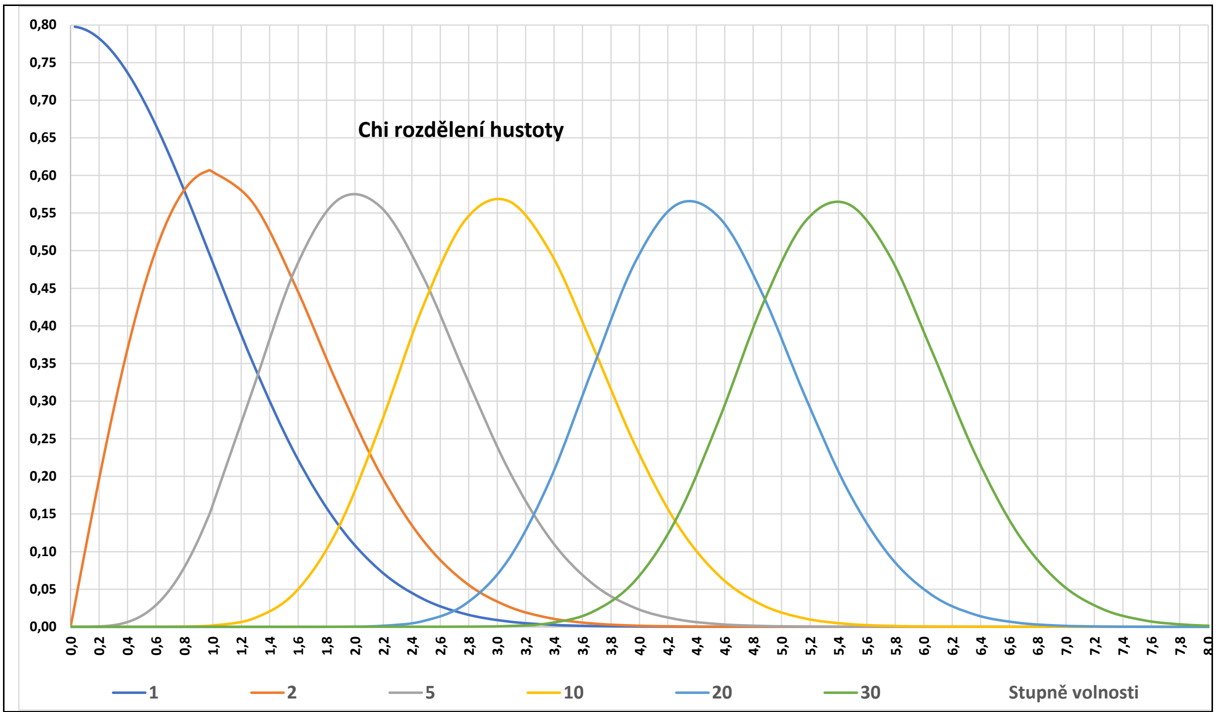
Hustoty $\chi^2(n)$ rozdělení pro $n = 1, 2, 5, 10, 20, 30$.

$\chi(n) = \sqrt{\chi^2(n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ kde $X_i \sim N(0,1)$. $\chi(n)$ rozdělení s n stupni volnosti je rozdělení odmocniny ze součtu kvadrátů n stejně rozdělených $N(0,1)$ a nezávislých náhodných proměnných. Tedy $F_{\chi(n)}(x) = P(\chi(n) < x) = P\left(\sqrt{\chi^2(n)} < x\right) = P(\chi^2(n) < x^2) = F_{\chi^2(n)}(x^2)$ a

$$f_{\chi(n)}(x) = \frac{d}{dx} F_{\chi(n)}(x) = 2x f_{\chi^2(n)}(x^2).$$



Distribuční funkce $\chi(n)$ rozdělení pro $n = 1, 2, 5, 10, 20, 30$.

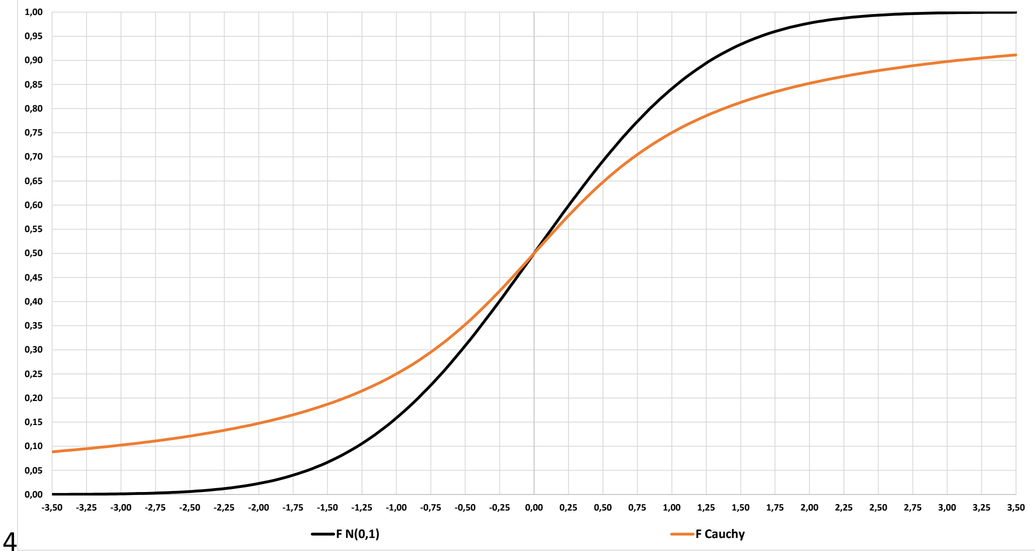


Hustoty $\chi(n)$ rozdělení pro $n = 1, 2, 5, 10, 20, 30$.

Podíl dvou normálně rozdělených náhodných proměnných s rozdělením $N(0,1)$.

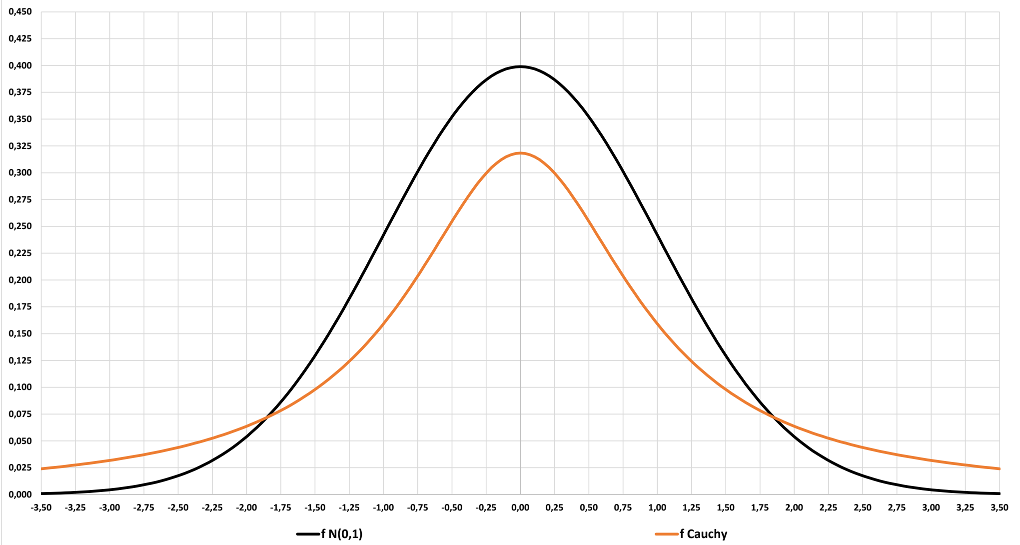
Mějme náhodné proměnné X_1, X_2 které jsou **stejně** normálně rozdělené a **nezávislé.** $X_i \sim N(0,1) \sim \Phi(x); i = 1,2.$ Dále mějme novou náhodnou proměnnou $Y = \frac{X_1}{X_2}$. Pro její distribuční funkci (za uvedených podmínek) bude platit $F_{\frac{X_1}{X_2}}(z) = P\left\{\frac{X_1}{X_2} < z\right\} = \iint_{\frac{x_1}{x_2} < z} \varphi(x_1)\varphi(x_2)dx_1dx_2$ a pro její hustotu $f_{\frac{X_1}{X_2}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\varphi(y)\varphi(zy)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |y|\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(yz)^2}{2}}\right]dy =$
$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |y| e^{-\frac{y^2}{2}(1+z^2)}dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}(1+z^2)}dy = (A)$, po substituci $x = (1+z^2)\frac{y^2}{2} \quad \Rightarrow$
$dx = y(1+z^2)dy \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{dx}{y(1+z^2)}$ získáme $(A) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$.

Shrnuto: $\boldsymbol{f_{\frac{X_1}{X_2}}(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}}$ **a odtud** $\boldsymbol{F_{\frac{X_1}{X_2}}(z) = \frac{1}{\pi}arctg(x) + \frac{1}{2}}$ [5].



4

Distribuční funkce $F_{X_i}(x); i = 1,2$ a $F_{\frac{X_1}{X_2}}(x)$.



Hustoty $f_{X_i}(x); i = 1,2$ a $f_{\frac{X_1}{X_2}}(x)$.

[5] Takové rozdělení je nazýváno (centrovaným a normovaným) Cauchyho rozdělením.

Námět: Ověřte, že pro náhodnou proměnnou $Y = \frac{X_1}{X_2}$ neexistují žádné momenty

$E_Y\left(Y^k\right) = E_{\frac{X_1}{X_2}}\left(\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^k\right); k = 1, 2, \dots .$

Námět: Z průběhů distribučních funkcí a hustot podílu $\frac{X_1}{X_2}$ se dá tušit, že připouští výskyt pozorování v oblastech sice „málo pravděpodobných“[6] výrazně větších (a i menších) hodnoty než původní dělenec X_1 a dělitel X_2. Např. pravděpodobnost pozorování hodnot pro proměnné X_1 a X_2 menších než 3,5 je prakticky nulová[7] ale u podílu Y je 0,0886. Prokažte!

Námět: Není příčinou to, že vstupní proměnnou X_1 lze dělit hodnotou X_2 libovolně blízkou (z libovolně malého neprázdného a nebodového intervalového okolí nuly) nule?

[6] Ne však „zanedbatelně“ jako u vstupních náhodných proměnných.

[7] Nejméně na tři desetinná místa.