Oblast spolehlivosti (konfidenční oblast; *confidence region*) – příklad

Intervalový odhad jednoho parametru je zaveden:

Mějme (iid) náhodný výběr $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ rozsahu *n* náhodné proměnné ξ s hustotou $f(x; g)$, kde g je hledaný (odhadovaný) parametr. Dále předpokládáme, že je dáno číslo $1-\alpha$ nazývané koeficient spolehlivosti. Pod $100(1-\alpha)\%$ intervalem spolehlivosti pro g (Neymanovým, konfidenčním) budeme rozumět dvojici statistik $g_d(x_1, x_2, ..., x_n) < g_h(x_1, x_2, ..., x_n)$ takovou, že:

$$P\big(g_d(x_1, x_2, \ldots, x_n) < g < g_h(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) \geq 1-\alpha; 0 < \alpha < 1.$$

Máme-li odhadovat *m*-tici parametrů je úloha mnohem a mnohem komplikovanější.
Mějme náhodný výběr $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ rozsahu *n* náhodné proměnné ξ s hustotou $f(x; g_1, \ldots, g_m)$, kde $g_1, \ldots, g_m$ jsou hledanými (odhadovanými) parametry. Pak pod $100(1-\alpha)\%$ oblastí spolehlivosti pro $g_1, \ldots, g_m$ budeme rozumět oblast $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_m$ [1], (tj. nějakou podmnožinu množiny všech *m*-tic reálných čísel) pro kterou platí $P\big([g_1, \ldots, g_m] \in G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) \geq 1-\alpha; 0 < \alpha < 1.$

„Mnohoznačnost“ této podmínky je širší než mnohoznačnost určení mezí pro interval spolehlivosti. Záleží na tvaru takové oblasti. Takovými tvary mohou být např m-rozměrný elipsoid, m-rozměrný kvádr, … .

Tento text = následující příklad je určen jen pro připomenutí, že mohou existovat i jiná vymezení než jen interval spolehlivosti.

Příklad

Mějme náhodný výběr $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ rozsahu *n* náhodné proměnné ξ s rozdělením $N(\mu, \sigma^2)$. Potom průměr $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ má rozdělení $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ a náhodná proměnná $Y = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$ má rozdělení $N(0,1)$ a $\bar{X}$ je náhodná proměnná průměru. Potom lze nalézt čísla dol, hor tak, aby platilo

$$P\left(dol \leq \sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \leq hor\right) = 1-\alpha_1;\ 0 < \alpha_1 < \alpha,$$ např. $dol = u_{\frac{\alpha_1}{2}}$ a $hor = u_{1-\frac{\alpha_1}{2}}$ [2].

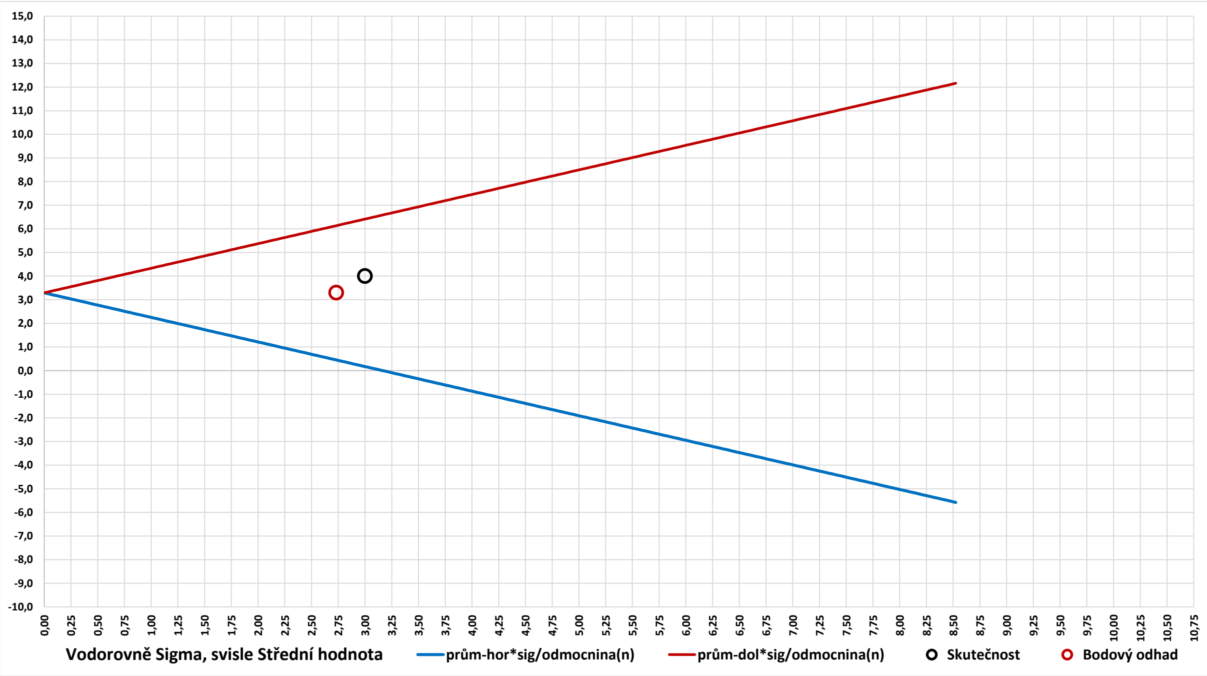
Potom:

$$P\left(dol \leq \sqrt{n}\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \leq hor\right) = P\left(dol\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{x} \leq -\mu \leq hor\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \bar{x}\right) =$$
$$= P\left(-dol\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x} \geq \mu \geq -hor\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right) = P\left(\bar{x} - hor\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} - dol\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Slovy: neznámý parametr μ leží někde mezi přímkami $\bar{x} - hor\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (klesající) a $\bar{x} - dol\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (rostoucí), viz následující obrázek:

[1] Zápisem $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rozumíme, že daná oblast funkčně závisí na „pozorovaných“ hodnotách náhodného výběru $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Pokud se bude zabýváno takovými „oblastmi“, budou ně kladen nějaký soubor „rozumných“ omezení, např. souvislost (interval je souvislý), … .

[2] Tj. interval symetrický v pravděpodobnosti. V tomto případě je evidentně $dol < 0$ a $hor < 0$



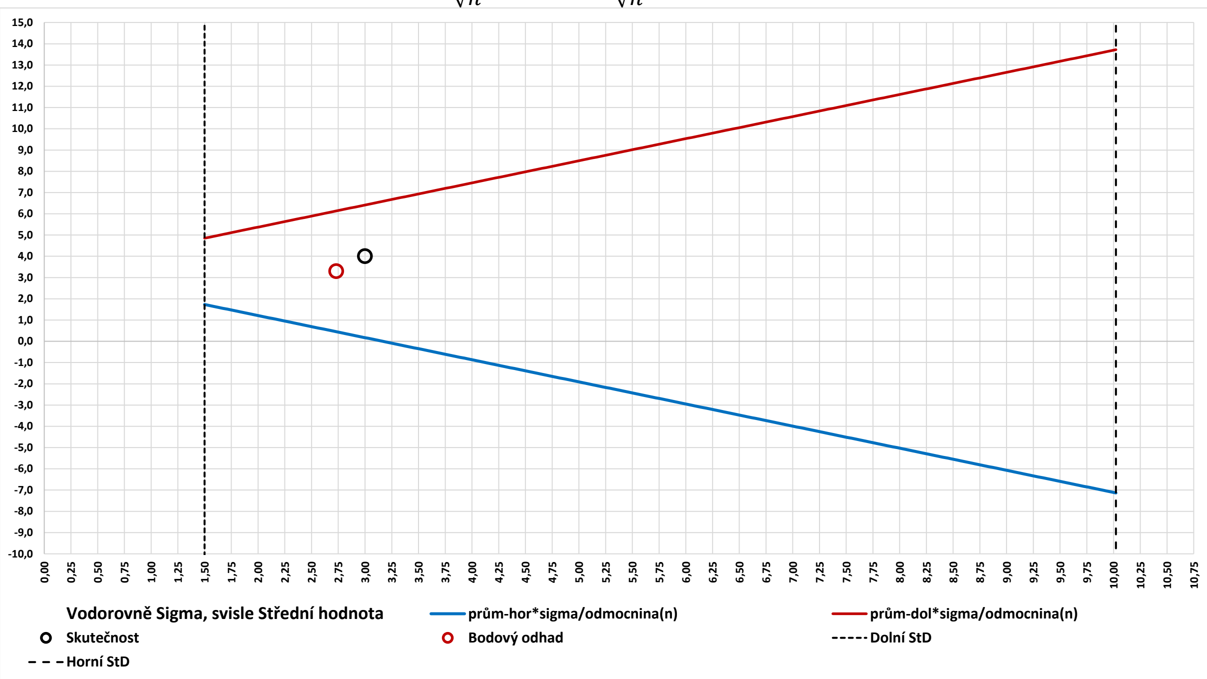
Dále pro zadané $\alpha_2;\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ lze určit intervalový odhad směrodatné odchylky:

$$P\left(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha_2/2}(n-1)}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha_2/2}(n-1)}}\right)$$

kde $\chi^2_\beta(n-1)$ je β −kvantil χ^2 rozdělení s n-1 stupni volnosti. Viz např. text přednášky

Sa1-08-n.pdf.

Tím se klín tvořený přímkami $\bar{x} - hor\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ a $\bar{x} - dol\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ „zúží“ na lichoběžník, viz následující obrázek:



Protože na základě Bonferroniho nerovnosti (viz např. doplňkový text „***Užití Bonferroniho nerovnosti při 'slučování' klasických testů.pdf***“) platí:

$$P\left(\left[\bar{x} - hor\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} - dol\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \cap \left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha_2/_2}(n-1)}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha_2/_2}(n-1)}}\right]\right) \geq 1 - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

je tento „lichoběžník“ $100(1-\alpha)\%$ konfidenční oblastí pro dvojici parametrů μ a σ.

Tento příklad má následující parametry a podkladová data:

mi=	4
sigma=	3
n=	5

PRŮMĚR=	3,292
SIGMA bodový odhad=	2,732

Simulovaná data, ze kterých bylo počítáno
7,288
3,787
3,791
0,110
1,487

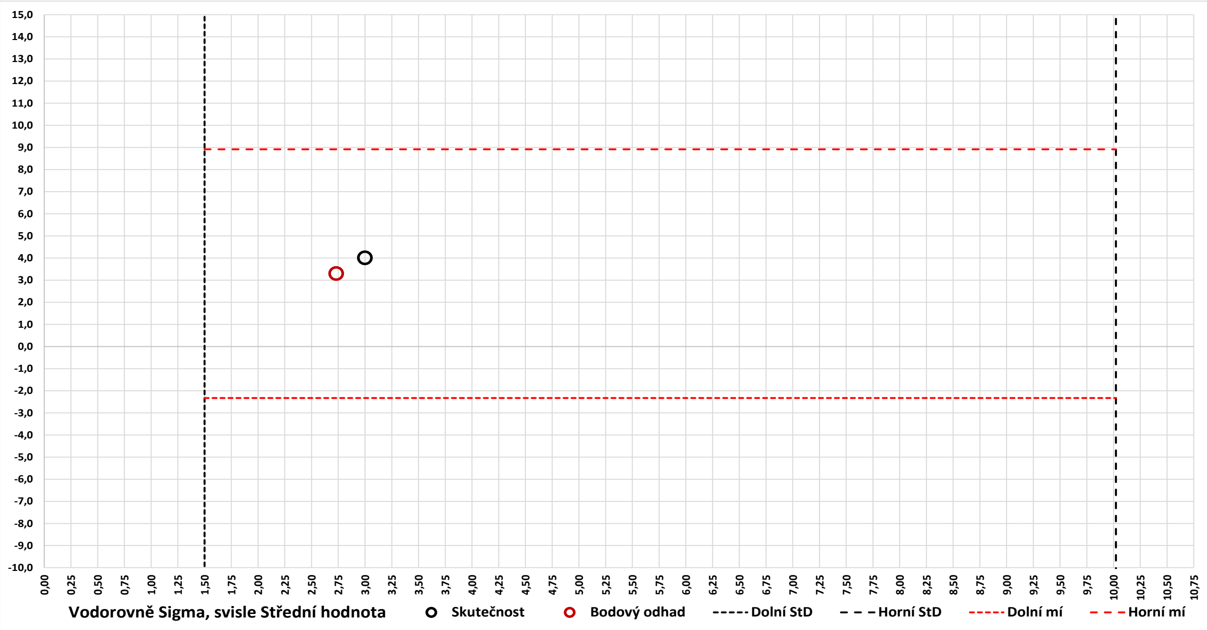
$\alpha = 2\%;\ \alpha_1 = \alpha_2 = $
$= 1\%$

Samozřejmě parametr μ lze intervalově odhadnout

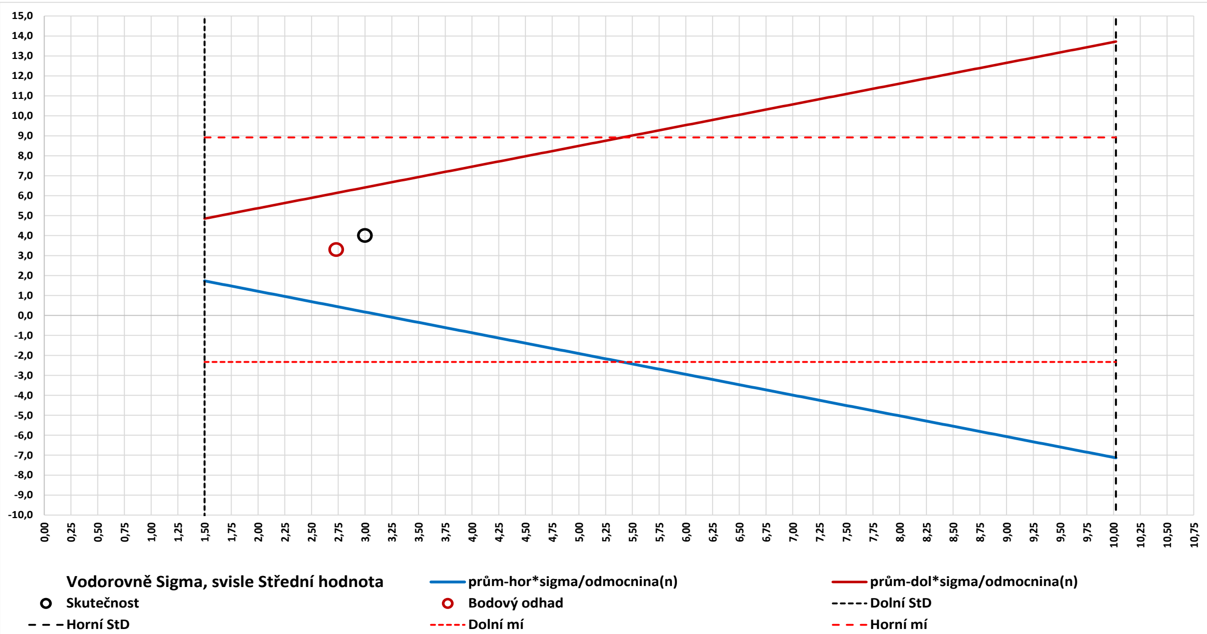
$$\bar{x} - t_{\alpha_1}\frac{s}{\sqrt{n}} \qquad \bar{x} + t_{\alpha_1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

kde $s = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ a t_β je β —kvantil t-rozdělení s *n-1* stupni volnosti (viz např. text přednášky ***Sa1-08-n.pdf***).

Pak dostaneme obdélníkovou konfidenční oblastí pro dvojici parametrů μ a σ, viz následující obrázek:



„Srovnání obou oblastí následuje:



Pokud bychom měřili kvality obou odhadů plochou jejich konfidenčních oblastí, je (pro tento konkrétní případ) kvalitnější „obdélníková verze“. Je třeba připomenout, že v užití „obdélníkové verze“ je skryt předpoklad, že statistiky $\bar{x}$ a s jsou nezávislé. Tak tomu pro „normálně = gaussovsky“ rozdělená data je.