

## UŽITÍ METODY KONEČNÝCH PRVKŮ PRO STANOVENÍ ÚČINNOSTI AKUSTICKÝCH TLUMIČŮ

Richard MATAS<sup>1</sup>, Josef VOLDŘICH<sup>2</sup>, Bohuslav TIKAL<sup>3</sup>

**Abstract:** *Appropriate mathematical model and three-dimensional finite element methods are employed to predict the acoustic attenuation performance of silencers in the absence of mean flow. The complex characteristic impedance and wave number of an absorbing material and the transmissive impedance of perforated ducts or partitions are exerted. A computational program written in FORTRAN uses subprograms of the CXML library for sparse complex linear systems. Some problems published in the SAE technical paper 2001-01-1435 are recalculated by the program to verify its correctness.*

**Keywords:** *perforated silencer, FEM, acoustic attenuation, perforate acoustic impedance, absorbing material*

### 1. ÚVOD

Na pracovišti autorů tohoto příspěvku byl vytvořen výpočetní program pro stanovení pole akustického tlaku v omezené oblasti a pro hodnocení účinnosti akustických tlumičů, které jsou součástí řady důležitých technických zařízení. Úlohy, které je možné programem řešit, předpokládají harmonický zdroj akustických vln a stojící médium. Tvorba programu byla motivována několika skutečnostmi:

- v žádném z nedávno dostupných komerčních programů nebylo možné posuzovat akustické prvky, které by zároveň obsahovaly jak perforované stěny nebo kanály, tak výplň z absorbujícího materiálu,
- případné komerční programové balíky umožňují řešit řadu dalších úloh, jejich licenční poplatky jsou proto značně vysoké, osvojení a užívání programu pak představuje rovněž specializovaný výcvik,
- vlastní autorský program umožňuje implementaci nově navržených impedancí, využití více počítačů při řešení úlohy, vlastní volbu výstupů a jejich zpracování, apod.

Cílem tohoto příspěvku je podat stručný popis matematického modelu a implementace metody konečných prvků, ze které tvorba programu vychází. Zároveň jsou v nejnútnejší míře připomenuty jak hodnocení účinnosti tlumičů, tak inženýrské formule postihující chování perforovaných plechů a kanálů nebo chování porézních vláknitých materiálů. Další inženýrské zkušenosti a přístupy lze nalézt např. v monografiích Mechel (2002) nebo Munjal (1987), kde je navíc rozsáhlý seznam specializované literatury.

<sup>1</sup>Ing. Richard Matas, PhDr., NTC ZČU v Plzni, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň, tel.: +420 377634705, e-mail: mata@ntc.zcu.cz

<sup>2</sup>RNDr. Josef Voldřich, CSc., idem, voldrich@ntc.zcu.cz

<sup>3</sup>Ing. Bohuslav Tikal, CSc., idem, tikal@ntc.zcu.cz

Program byl vytvořen v jazyku FORTRAN, pro řešení praktických problémů pak bylo nezbytné implementovat techniku řídkých matic (byly užity procedury knihovny Compaq Extended Math Library). Korektnost programu je ověřena porovnáním s výsledky příkladů, které je možné řešit analyticky a které uveřejnila ve svých technických listech společnost SAE automobilových inženýrů. Selamet et al. (2001) rovněž uvádí porovnání výsledků výpočtů s provedenými experimenty, které je velmi uspokojivé. Předpoklad stojícího média při výpočetním hodnocení např. koncových automobilových tlumičů je všeobecně přijímán, neboť průměrná rychlost média nepřekračuje hodnotu 0,1 až 0,2 Machova čísla.

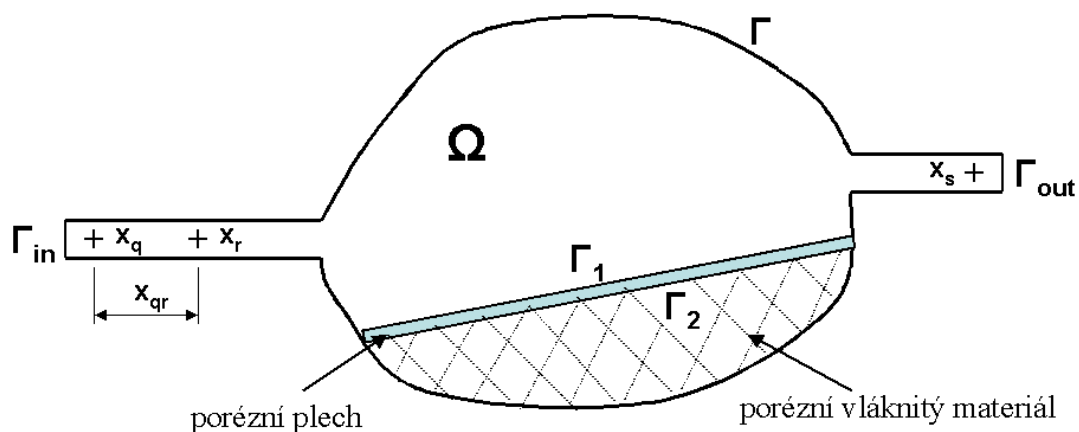
## 2. HODNOCENÍ PŘENOSOVÝCH ZTRÁT

Uvažujme akustický prvek vyplněný neviskózním neproudícím médiem (tekutinou) s nepohyblivými stěnami, který přenáší harmonické akustické vlny. Akustický tlak (skalární pole) a akustickou rychlost (vektorové pole) pak můžeme uvažovat ve tvaru

$$p(\mathbf{x}) \cdot e^{i\omega t}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot e^{i\omega t}, \quad (1)$$

kde  $\mathbf{x}$  značí polohový vektor,  $t$  čas a  $\omega = 2\pi f$  je úhlový kmitočet. Veličiny  $p$  a  $\mathbf{v}$  jsou obecně komplexní funkce polohového vektoru  $\mathbf{x}$ .

Pro řadu technických zařízení lze dále předpokládat, že akustické vlny na vstupu i výstupu (tj. v bodech  $\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s$  obrázku č. 1) jsou rovinné. Položme dále  $p_i = p(\mathbf{x}_i)$ ,  $v_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}$ ,  $i = q, r, s$ , kde  $\mathbf{n}$  je normálový vektor k rovině akustické vlny. Akustický prvek je pak charak-



**Obr. 1.** Schéma akustického tlumiče s body měření pro 3-pólovou metodu.

terizován členy  $A, B, C$  a  $D$  přenosové matice ze vztahu

$$\begin{bmatrix} p_q \\ v_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_s \\ v_s \end{bmatrix}.$$

Pro nejvíce užívané hodnocení přenosové ztráty, tzv. transmission loss TL, v případě stejného průřezu na vstupu a výstupu můžeme psát

$$TL = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{2} \left| A + \frac{B}{\rho c} + C \rho c + D \right| \right),$$

kde  $\rho$  značí hustotu média a  $c$  akustickou rychlost. (V případě nestejných průřezů nebo nerovinných vln je toto vyhodnocení komplikovanější.)

Uvedená 4-pólová metoda je však nevýhodná v tom, že předpokládá znalost akustických rychlostí  $v_q$  a  $v_s$ . Ty lze ovšem mnohem obtížněji měřit než hodnoty akustického tlaku, v případě výpočtů pak zvyšují minimálně dvojnásobně počet stupňů volnosti úlohy.

V případě, že známe hodnoty  $p_q, p_r, p_s$  a že výstup je anechoidní (charakteristická impedance je  $Z = \rho c$ ), je možné užitím 3-pólové metody podle Wu and Wan (1996) psát

$$TL = 20 \log_{10} \left| \frac{p_i S_{in}}{p_3 S_{out}} \right|, \quad \text{kde } p_i = \frac{p_q - p_r \exp(-ikx_{qr})}{1 - \exp(-i2kx_{qr})},$$

$x_{qr} = |\mathbf{x}_q - \mathbf{x}_r|$ ,  $k = 2\pi f/c$ ,  $S_{in}$  a  $S_{out}$  jsou velikosti průřezů vstupní a výstupní trubky.

### 3. PŘENOSOVÁ IMPEDANCE TENKÉHO PERFOROVANÉHO PLECHU

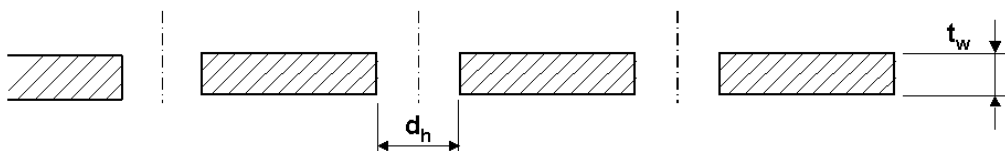
Akustické tlumiče velmi často obsahují tenké děrované plechy (přepážky) nebo kanály. Protože podrobné modelování každého z otvorů takovéto stěny nebo kanálu je nereálné (úloha by byla příliš výpočetně náročná), jsou tyto prvky charakterizovány přenosovou impedancí

$$Z = (p_2 - p_1)/v_n, \quad (2)$$

kde  $p_i$ ,  $i = 1, 2$ , značí akustický tlak na různých stranách stěny nebo trubice a  $v_n$  je fiktivní "průměrná" akustická rychlost "skrz" plochu stěny. Hodnoty  $Z$  byly předmětem výzkumu a měření řady akustických pracovišť. Jeden z velmi užívaných vztahů prezentovali Sullivan et al. (1978). Ten pak rozšířili Kirby and Cummings (1998) i pro situaci, kdy z jedné strany je plech obklopen absorbujícím materiálem (viz následující odstavec), a navrhli formuli

$$Z = \rho c \left[ 0,006 + ik \left\{ t_w + 0,375d_h \left( 1 + \frac{\tilde{\rho}\tilde{c}\tilde{k}}{\rho c k} \right) \right\} \right] / \Phi.$$

V tomto vztahu značí  $t_w$  tloušťku stěny,  $d_h$  průměr dírek (viz obrázek č. 2) a  $\Phi$  je pórezita plechu. Dále jsou užity komplexní hodnoty charakteristické impedance  $\tilde{\rho}\tilde{c}$  a vlnového čísla  $\tilde{k}$  absorbujícího materiálu.



**Obr. 2.** Schéma perforovaného plechu.

### 4. AKUSTICKÉ VLASTNOSTI POREZNÍCH VLÁKNITÝCH MATERIÁLŮ

Protože struktura vláknitých absorbujících materiálů je komplikovaná, jejich akustické vlastnosti se zpravidla zjišťují experimentálně. Velmi užívanou formuli navrhli Delany and Bazley

(1970). Zde budeme užívat její podobu z práce Huff (2001), která vychází z měření provedených v Owens Corning laboratořích pro absorbující materiály automobilových tlumičů

$$\tilde{\rho}\tilde{c}/\rho c = [1 + 0,0855 (f/R)^{-0,754}] + i [-0,0765(f/R)^{-0,732}] ,$$

$$\tilde{k}/k = [1 + 0,1472 (f/R)^{-0,577}] + i [-0,1734(f/R)^{-0,595}] .$$

Veličiny  $\tilde{\rho}\tilde{c}$  a  $\tilde{k}$  jsou závislé na frekvenci  $f$  akustických vln,  $R$  značí průtočný odpor (anglicky flow resistivity) materiálu výplně.

## 5. MATEMATICKÁ FORMULACE PROBLÉMU

### 5.1 Základní rovnice, okrajové a přenosové podmínky

Z rovností zákona zachování hmoty a hybnosti mechaniky kontinua obdržíme pro harmonické akustické vlny (1) vztahy

$$i\omega p + \rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

a

$$\rho i\omega \mathbf{v} + \nabla p = 0 . \quad (4)$$

Vyloučením akustické rychlosti  $\mathbf{v}$  pak obdržíme Helmholtzovu rovnici

$$k^2 p + \Delta p = 0 . \quad (5)$$

Pro oblast s absorbujícím materiálem je potřeba v uvedených rovnicích veličiny  $\rho$ ,  $c$ , a  $k$  pro základní médium (v našem případě vzduch) nahradit veličinami  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{c}$  a  $\tilde{k}$  z předchozího odstavce.

Rozdělme hranici uvažovaného kontinua - oblasti  $\Omega$  na vstupní část  $\Gamma_{in}$ , výstupní část  $\Gamma_{out}$ , protilehlé části  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$  s předepsanou přenosovou impedancí (2). Zbytek hranice  $\Gamma$  představuje tuhou stěnu. Pro derivaci  $\frac{\partial p}{\partial n}$  akustického tlaku  $p$  ve směru normály  $\mathbf{n}$  hranice z (4) plyne  $\frac{\partial p}{\partial n} = -i\omega\rho v_n$  s normálovou složkou akustické rychlosti  $v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ . Na vstupu  $\Gamma_{in}$  můžeme  $v_n$  předepsat jako Dirichletovu okrajovou podmínku, pro protilehlé části vnitřních stěn je pak  $v_n$  určena vztahem (2), tj.

$$\frac{\partial p_2}{\partial n_2} = -i \frac{\omega\rho}{Z} (p_2 - p_1) , \quad \frac{\partial p_1}{\partial n_1} = -i \frac{\omega\rho}{Z} (p_1 - p_2) .$$

Konečně v případě anechoidního výstupu bude  $v_n = p/\rho c$ .

### 5.2 Slabé řešení a diskretizace metodou konečných prvků

Formulaci slabého řešení (5) s popsány okrajovými podmínkami obdržíme standardním způsobem. Přenásobíme proto (5) testovací funkcí  $w$ , uijeme pro součin  $w\Delta p$  první Greenovu formuli  $\int_{\Omega} w \Delta p \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial p}{\partial n} \, dS - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla p \, d\mathbf{x}$  a za normálovou derivaci  $\frac{\partial p}{\partial n}$  dosadíme dle předchozího odstavce. Obdržíme tak vztah

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (k^{*2} w p - \nabla w \cdot \nabla p) \, d\mathbf{x} - i\omega \int_{\Gamma_{out}} \frac{1}{c^*} w p \, dS + i\omega \int_{\Gamma_2} \frac{\rho^*}{Z} w (p_2 - p_1) \, dS \\ + i\omega \int_{\Gamma_1} \frac{\rho^*}{Z} w (p_1 - p_2) \, dS = i\omega\rho \int_{\Gamma_{in}} w v_n \, dS , \end{aligned}$$

kde  $k^*$  nahrazuje  $k$  nebo  $\tilde{k}$  podle toho, zda-li příslušný polohový vektor  $\mathbf{x}$  označuje bod základního média (vzduchu) nebo bod oblasti s absorbujičím materiálem; obdobný význam mají  $\rho^*$  a  $c^*$ .

Diskretizaci provedeme pomocí tvarových funkcí  $N_i(\mathbf{x})$  metody konečných prvků ( $N_i(\mathbf{x}_m) = \delta_{im}$  pro uzel  $\mathbf{x}_m$ ), tj. položíme

$$p(\mathbf{x}) = \sum_i p_i N_i(\mathbf{x}), \quad w(\mathbf{x}) = \sum_i w_i N_i(\mathbf{x}).$$

Dále vypsanou  $j$ -tou rovnicí soustavy lineárních rovnic s neznámými  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , obdržíme volbou funkce  $w$  s hodnotami  $w_i = \delta_{ij}$  ( $=0$  pro  $i \neq j$ ,  $1$  pro  $i = j$ )

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i \left( - \int_{\Omega} \nabla N_j \cdot \nabla N_i d\mathbf{x} + \int_{\Omega} k^{*2} N_j N_i d\mathbf{x} \right) - i \sum_{\mathbf{x}_i \in \Gamma_{out}} p_i \int_{\Gamma_{out}} k^* N_j N_i dS \\ - i \sum_{\mathbf{x}_i \in \Gamma_1} (p_i - p_{ii}) \int_{\Gamma_1} b^* N_j N_i dS - i \sum_{\mathbf{x}_i \in \Gamma_2} (p_i - p_{ii}) \int_{\Gamma_2} b^* N_j N_i dS \\ = i \omega \rho \sum_{\mathbf{x}_i \in \Gamma_{in}} v_{ni} \int_{\Gamma_{in}} N_j N_i dS. \quad (6) \end{aligned}$$

Zde značíme  $b^* = \omega \rho^* / Z = \rho^* c^* k^* / Z$ , dále  $ii$  je protilehlý uzel k uzlu  $i$  stěny s přenosovou impedancí  $Z$ .

## 6. POZNÁMKY K PROVEDENÍ PROGRAMU

Bázové funkce  $N_i$  z odstavce 5.2 jsou určeny volbou typu konečných prvků. V programu jsou implementovány čtyřstěny s uzly ve svých vrcholech a s lineární interpolací funkce akustického tlaku. Vztah pro stanovení přenosové impedance  $Z$  z odstavce 3 nebo formule pro stanovení vlastností porézních materiálů z odstavce 4 mohou být nahrazeny jinou volbou.

Výstupem programu jsou soubory s hodnotami funkce akustického tlaku  $p(\mathbf{x})$  v uzlech sítě pro vybrané hodnoty frekvence  $f$ , soubory se závislostí této funkce na frekvenci ve vybraných uzlech a soubor se závislostí přenosové ztráty TL na frekvenci.

Podmínka anechoidního výstupu není prakticky nijak omezující. Ukončení výstupní trubky tlumiče sice ve skutečnosti způsobuje částečný odraz vln, v praxi je však toto ukončení chápáno jako samostatný akustický prvek. Ten může být pro standardní provedení posouzen pomocí empirických formulí nebo užitím přibližných výpočetních vzorců (přesné analytické řešení pro nekonečnou přírubu odvodil již lord Rayleigh v roce 1894). Pole akustického tlaku komplikovanějšího (např. šikmého) ukončení může být rovněž stanoveno popisovaným programem tak, že se do výpočetního modelu zahrne jeho dostatečně veliké okolí. Pro vyčíslení výstupního akustického výkonu však bude potřeba ještě vytvořit vyhodnocující proceduru. Programem lze rovněž řešit úlohy rozložení akustického tlaku v uzavřeném prostoru bez výstupního povrchu.

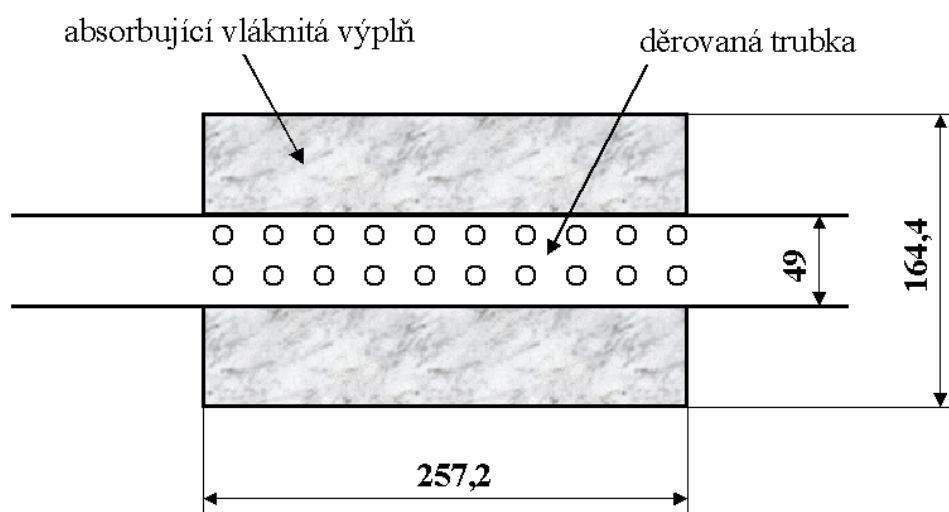
Řešení praktických inženýrských problémů zpravidla vede k vytvoření výpočetních modelů s vysokým počtem neznámých. Proto komplexní matice soustavy lineárních rovnic (6) je ukládána jako řídká matice. K její LU faktorizaci a následnému dopřednému a zpětnému chodu je využito procedur již v úvodu zmíněné knihovny CXML, přičemž vzhledem k charakteru úloh je

potřebné pracovat s dvojnásobnou přesností.

## 7. OVĚŘENÍ VYTVOŘENÉHO PROGRAMU

K ověření vytvořeného programu byly zvoleny úlohy posuzující jednoduchý akustický tlumič s rotačně symetrickou geometrií, které jsou spolu se svými výsledky uveřejněny v technickém listu inženýrské společnosti SAE (Selamet et al. (2001)) nebo v článku Selamet et al. (2004). Tyto výsledky byly získány jak přesnými analytickými metodami (řešením jsou řady s Besselovými funkcemi prvního i druhého druhu s indexy 0 a 1), tak metodou hraničních prvků. Dále uvedené práce uvádějí ještě výsledky experimentů, porovnání je vynikající. Naopak zjednodušené 1D modelování akustických vln se u těchto úloh nejpozději od frekvence cca 1500 Hz ukazuje jako nedostatečné.

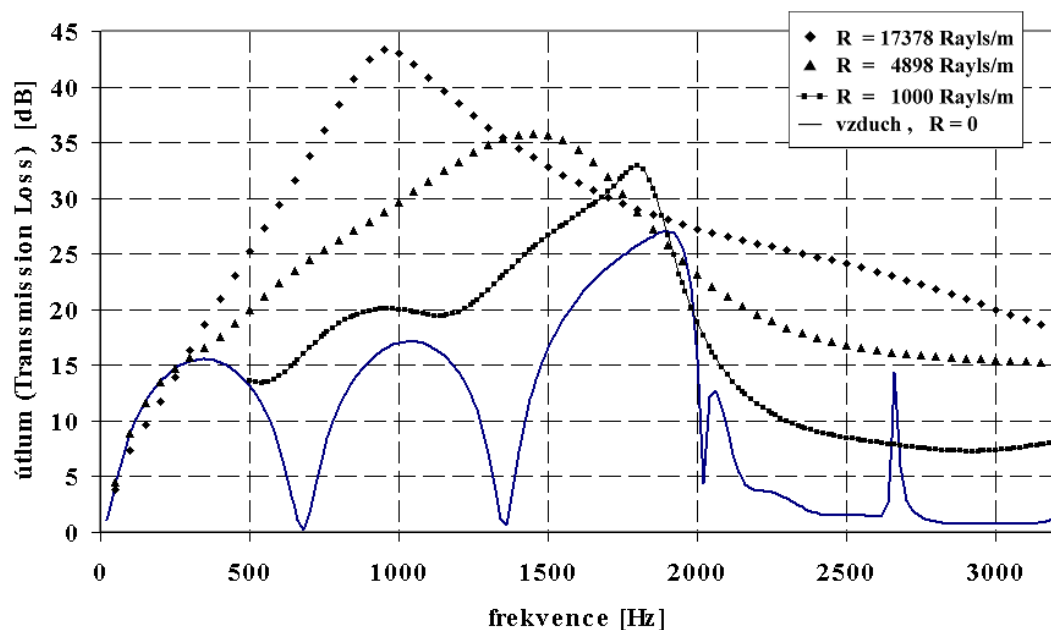
Uvažovaný rotačně symetrický akustický tlumič je nasazen na trubku o vnitřním průměru 49 mm, jeho délka je 257,2 mm a průměr 164,4 mm (viz obrázek č. 3). Uvnitř tohoto tlumiče je zmíněná centrální trubka perforovaná, její tloušťka  $t_w$  činí 0,9 mm, průměr dírek  $d_h$  je 2,49



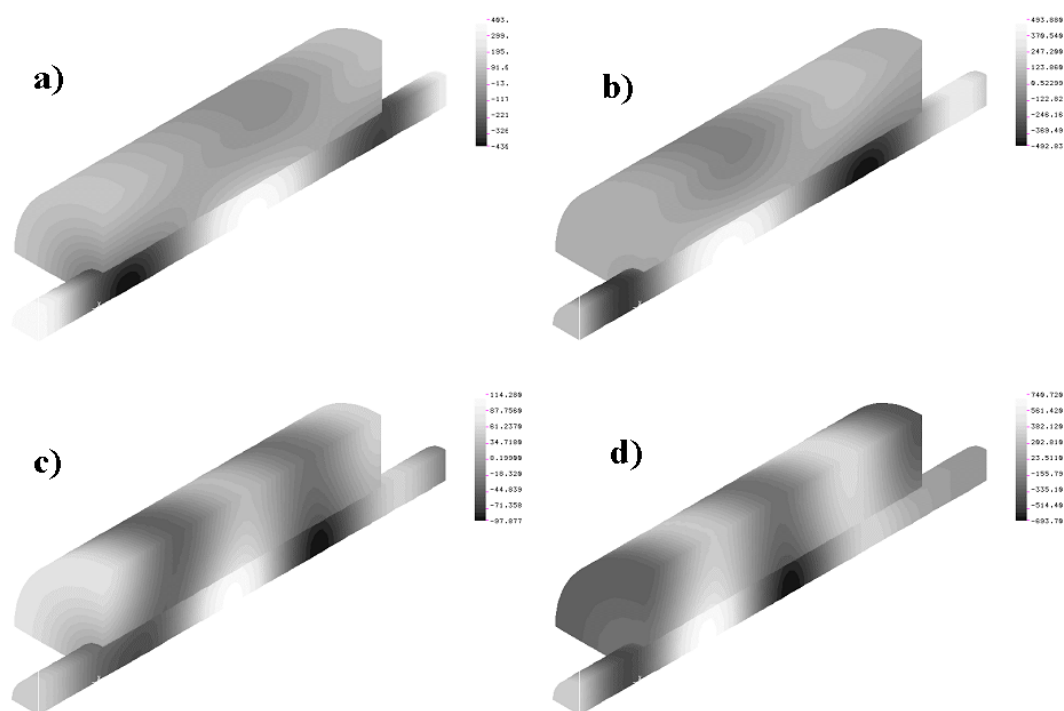
**Obr. 3.** Schéma modelovaného akustického tlumiče.

mm a porózita  $\Phi$  (tj. poměr součtu ploch všech dírek k celkovému povrchu trubky) činí 8%. Hustota média  $\rho$  je  $1,55 \text{ kg/m}^3$ , akustická rychlost není ve zmíněných pracích uvedena, volíme proto hodnotu  $c = 343 \text{ m/s}$ . Dále uvažujeme situace, kdy komora vně centrální trubky je buď volná, nebo je vyplněna porézním vláknitým materiálem, jehož průtočný odpor  $R$  nabývá postupně hodnoty 1000, 4896 nebo 17378 Rayls/m. Závislosti akustického útlumu TL na frekvenci získané vytvořeným programem jsou ve formě grafů znázorněny na obrázku č. 4 a jsou prakticky nerozlišitelné od výsledků, které uvádějí Selamet et al. (2001), (2004). Příklady vypočteného pole akustického tlaku uvnitř tlumiče pro nominální vstupní hodnotu  $v_n = 1$  jsou uvedeny na obrázku č. 5.

Vzhledem ke geometrické symetrii bylo postačující modelovat pouze čtvrtinu tlumiče, počet uzlů po diskretizaci konečnými prvky činil 8150 (což představuje 16300 reálných neznámých). Na osobním počítači s procesorem Intel P4 3200MHz trvaly příprava grafu celkové řídké matice soustavy a její první sestavení 1094 ms, pro každou další frekvenci však pouze cca 16 ms, řešení soustavy lineárních komplexních rovnic (6) pomocí LU faktorizace procedurami knihovny



**Obr. 4.** Závislost útlumu TL na frekvenci pro tlumič z obrázku č. 3 při různých hodnotách  $R$  průtočného odporu porézní vláknité výplně.



**Obr. 5.** Reálné a imaginární složky komplexního pole  $p$  akustického tlaku uvnitř tlumiče pro nominální vstupní hodnotu  $v_n = 1$  a pro tlumič bez výplně: a)  $\text{Re } p$ , frekvence 2500 Hz, b)  $\text{Im } p$ , frekvence 2500 Hz, c)  $\text{Re } p$ , frekvence 2660 Hz, d)  $\text{Im } p$ , frekvence 2660 Hz.

CXML pak pro jednotlivé frekvence nepřekročilo 3 s. Příklady vypočteného akustického tlaku tlumiče bez porézní výplně jsou pro frekvence 2500 a 2660 Hz uvedeny na obrázku č. 5.

## 8. ZÁVĚR

Metoda konečných prvků umožňuje efektivně řešit problémy spojené s harmonickými akustickými vlnami v omezeném prostoru se stojícím médiem i v případě, kdy část tohoto prostoru obsahuje zároveň absorbující výplně a (perforované) konstrukční stěny nebo kanály s různou přenosovou impedancí. Záměrem autorů je rozšíření programu pro úlohy s proudícím médiem, které z pohledu CFD lze považovat za nestlačitelné a "prakticky" nezavířené (tj. proudění nebude akustickým zdrojem v uvažovaném frekvenčním pásmu).

**Poděkování:** Tato práce vznikla za finančního příspěvku MŠMT v rámci projektu výzkumného centra 1M06031.

## LITERATURA

- Delany, M.E., and Bazley, E.N., 1970. Acoustical properties of fibrous absorbent materials. *Applied Acoustics*, Vol. 3. pp 105-116.
- Huff, N.T., 2001. Materials for absorptive silencer systems. *SAE Technical Paper Series, 2001-01-1458*. Reprinted from: Proceedings of the 2001 Noise and Vibration Conference, Traverse City, Michigan.
- Kirby, R., and Cummings, A., 1998. The impedance of perforated plates subjected to grazing gas flow and backed by porous media. *J. Sound and Vibration*, Vol. 217(4). pp 619-636.
- Mechel, F.P., 2002. *Formulas of Acoustics*. Springer. Berlin, Heidelberg, New York.
- Munjal, M.L., 1987. *Acoustics of Ducts and Mufflers*. John Wiley & Sons. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore.
- Selamet, A., Lee, I.J., Ji, Z.L., and Huff, N.T., 2001. Acoustic attenuation performance of perforated absorbing silencers. *SAE Technical Paper Series, 2001-01-1435*. Reprinted from: Proceedings of the 2001 Noise and Vibration Conference, Traverse City, Michigan.
- Selamet, A., Xu, M.B., and Lee, I.-L., 2004. Analytical approach for sound attenuation in perforated dissipative silencers. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 115. pp 2091-2099.
- Sullivan, J.W., and Crocker, M.J., 1978. Analysis of concentric-tube resonators having unpartitioned cavities. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 64. pp 207-215.
- Wu, T.W., and Wan, G.C., 1996. Muffler performance studies using direct mixed-body boundary element method and a three-point method for evaluating transmission loss. *J. Vib. Acoust.*, Vol. 118. pp 479-484.