Matematický ústav Československé akademie věd

RNDr. Josef Voldřich

UŽITÍ SOBOLEVOVÝCH VÁHOVÝCH PROSTORŮ K ŘEŠENÍ ELIPTICKÝCH OKRAJOVÝCH ÚLOH

(Kandidátská disertační práce)

Praha 1986

Děkuji svému školiteli prof. RNDr. Aloisu Kufnerovi, DrSc., za podněty a cenné rady, které mi poskytl při řešení problémů obsažených v této disertaci.

O B S A H

ÚVOD

Při vyšetřování existence slabého řešení okrajových úloh diferenciálních rovnic metodami funkcionální analýzy jsou užitečným prostředkem váhové prostory. Celkem přirozeným způsobem k nim docházíme při řešení úloh na neomezených oblastech (citujme alespoň monografii [9]). Rovněž je přirozená jejich aplikace při řešení okrajových úloh pro rovnice, u nichž je elipticita narušena (degenerované eliptické rovnice a rovnice se singularitami v koeficientech). Tyto aplikace jsou proto v literatuře velmi časté (uveďme např. [8],[23],[16]).

Poměrně malá pozornost však byla věnována užití váhových prostorů na "ryze" eliptické rovnice. Inspirující v tomto směru byla práce J.Nečase [20], která ukázala cestu, jak řešit lineární problémy pomocí zobecněného Laxova-Milgramova lemmatu. J.Nečas vyšetřoval okrajové úlohy v prostorech s vahami, jež byly mocninami vzdálenosti bodu oblasti od její hranice. Použité metody byly však jím samým i dalšími autory aplikovány na širší třídu mocninných vah i na váhy obecnějšího (tj. nikoliv jen mocninného) typu (viz [12], [15], [17],[22]); přitom v [17] autoři volí poněkud modifikovaný přístup, který umožňuje použití klasického (tj. nikoliv zobecněného) Laxova-Milgramova lemmatu.

Předkládaná disertace se zabývá výhradně aplikací mocninných vah. Podejme tedy poněkud podrobnější přehled problematiky právě v tomto případě a (pro jednoduchost) pro diferenciální operátor druhého řádu.

Uvažujme omezenou oblast $\Omega\subset R^N$ s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$, m-dimenzionální uzavřenou varietu $M\subset\partial\Omega$ a funkci $d_M(x)=\mathrm{dist}(x,M)$. Sobolevův mocninný váhový prostor $W^{1,p}(\Omega,d_M,\varepsilon)$ s $p\geq 1$ a mocninou ε je množina takových funkcí u na Ω, pro jejichž distributivní derivace D^α řádu $|\alpha|\leq 1$ (α je N-rozměrný multiindex) platí

$$\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(x)|^p \, d_M^{\varepsilon}(x) \, dx < \infty .$$

Zajímá nás nyní existence slabého řešení okrajové úlohy pro parciální diferenciální rovnici

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x) \, D^{\beta}u(x)) = f(x) \quad \text{v } \Omega ,$$

kde operátor na levé straně je eliptický a pravá strana f obsahuje singularity nebo degenerace (např. pro Dirichletův problém můžeme uvažovat $f = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f_o$ s $f_o,\ldots,f_N \in L_2(\Omega, d_M, \varepsilon)$). V práci [20] je dokázána existence slabého řešení $u \in W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ příslušného lineárního Dirichletova problému pro případ $M = \partial\Omega$, přičemž mocnina musí být ovšem dostatečně blízká nule. Pro jednobodovou množinu $M = \{x_o\}$, $x_o \in \partial\Omega$, je analogický výsledek dokázán v [10]. Pozornost těmto problémům je věnována i v monografii [22], kde je navíc řešena Neumannova úloha za předpokladu $M = \{x_o\}$, $x_o \in \partial\Omega$ a $N \geq 3$. Toto omezení má hlubší souvislost s používanou metodou a větami o vnoření, tedy koneckonců s aplikací Hardyho nerovnosti. Proto popsaný výsledek týkající se Neumannovy úlohy, jak je naznačeno v [17] a [18], lze poměrně snadno zobecnit pro variety $M \subset \partial\Omega$ splňující $N-m \geq 3$, $m = \dim M$. Pro úplnost je potřeba ještě připomenout práci [7], která pojednává o smíšeném problému.

Tolik pokud jde o lineární diferenciální operátor. V případě nelineárního operátoru jsou nejčastěji používané a nejlépe rozvinuté topologické metody, využívající neváhových Sobolevových prostorů $W^{k,p}(\Omega)$ (p souvisí s nelinearitou) (viz např. [2],[19]), zatímco přenesení nejužívanější teorie monotonních operátorů na váhový případ ztroskotávalo. Není totiž k dispozici zobecnění odpovídající zobecněnému Laxovu-Milgramovu lemmatu pro lineární operátor. V práci se podařilo tyto potíže vhodným způsobem obejít.

Cílem disertace je vyšetřovat existenci slabého řešení Dirichletova problému pro nelineární diferenciální operátor, Neumannova a Stokesova problému pro lineární operátor, a to na omezené oblasti. Příslušné diferenciální operátory jsou přitom eliptické v obvyklém smyslu, pravé strany a okrajové podmínky mohou obsahovat singularity nebo degenerace, jež zabraňují aplikaci obvyklých Sobolevových prostorů a naopak indukují použití prostorů s vahou.

Metody, jichž se v práci používá, jsou analogiemi metod, které se uplatňují při aplikaci klasických Sobolevových prostorů na řešení eliptických rovnic. Jsou to metody teorie funkcí a funkcionálně analytické metody, založené na abstraktních výsledcích teorie lineárních i nelineárních operátorů, tj. především na teorii monotonních operátorů a na variačních přístupech. Zvláštní pozornost je věnována problémům spojeným s geometrií hranice uvažované oblasti. Proto se užívá některých metod diferenciální geometrie. Aby se autor vyhnul technickým komplikacím, vyšetřuje pouze diferenciální rovnice 2.řádu, i když většinu použitých metod lze aplikovat i na rovnice vyšších řádů.

Práce je rozdělena podle druhu zkoumaných problémů na čtyři hlavní části.

První část je věnována vhodným popisům hranice oblastí, nezbytným technickým prostředkům a vlastnostem váhových prostorů. Je zde rovněž formulována modifikovaná verze metody pseudomonotonních operátorů. Tato verze vyžaduje slabší předpoklady kladené na vyšetřované operátory.

V druhé části je věnována pozornost existenci slabého řešení (ve váhových prostorech) Dirichletova problému. Z metodických důvodů je uveden nejprve již dříve řešený lineární případ, pro který se však podrobněji studuje problematika velikosti intervalu exponentů ε. V souvislosti s charakteristikou duálního prostoru $[W_0^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)]^*$ je vyšetřována řešitelnost Dirichletova problému pro rovnici

$$\Delta u + u = 0$$

rovněž v prostoru $W_0^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$, $p > 1$, který pro $p \neq 2$ již není Hilbertův.

Snad nejhlubším výsledkem celé práce je důkaz existence slabého řešení nelineárního Dirichletova problému. Pro technickou komplikovanost se uvažuje pouze případ $M = \partial\Omega$, ačkoliv popsaný postup lze aplikovat i pro obecnější množiny M. Operátor, který obdržíme z popisu úlohy, je zobrazením prostoru $W_0^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}, \varepsilon)$ do duálu prostoru $W_0^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}, -\varepsilon(p-1))$. Proto vhodným izomorfismem těchto prostorů (pro $p > 1$ a ε dostatečně blízké 0) převedeme daný problém na vyšetřování surjektivity operátoru, který je již zobrazením daného prostoru $W_0^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}, \varepsilon)$ do jeho duálu $[W_0^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}, \varepsilon)]^*$. Zavedením podoblastí s kladnou vzdáleností od hranice se řeší Dirichletova úloha na podprostorech funkcí, které splývají se Sobolevovými prostory vez váhy. Limitní přechod k hledanému řešení umožňuje modifikovaná metoda pseudomonotonních operátorů z předešlé části. Přitom klíčovým bodem jsou zde odhady norem řešení na podprostorech prováděné v "blízkosti" hranice. Charakter obdržených výsledků přibližme pro Dirichletův problém

$$(1)\quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

kde $p > 1$ a $\Omega \subset R^N$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí. Jestliže pravá strana bude nyní tvaru

$$f = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f_o , \qquad f_o, f_1, \dots, f_N \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega, d_{\partial\Omega}, \varepsilon),$$

potom existuje slabé řešení $u \in W_o^{1,p}(\Omega, d_{\partial\Omega}, \varepsilon)$ úlohy (1), kdykoliv je $\varepsilon \in \left(\frac{-p+1}{c^{1/p}p-1} , \frac{p-1}{c^{1/p}p+1} \right)$. Konstanta $c \geqq 1$ zde závisí na geometrii oblasti Ω, přičemž pro Ω konvexní je $c = 1$. Poznamenejme ještě, že metoda vypracovaná pro nelineární úlohu dává v případě použití na lineární operátor lepší výsledky (tj. větší interval přípustných exponentů ε) než metoda založená na zobecněném Laxově-Milgramově lemmatu.

Ve třetí části se vyšetřuje ve váhových prostorech existence slabého řešení Neumannova problému

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\sum_{|\alpha|, |\beta| \leqq 1} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha\beta} D^{\beta} u) = f \qquad \text{v } \Omega , \\ &\sum_{|\alpha|, |\beta| = 1} a_{\alpha\beta} n_{\alpha} D^{\beta} u = g \qquad \text{na } \partial\Omega , \end{aligned}$$

kde n_α jsou složky vnější normály n k hranici $\partial\Omega$, D^α značí diferenciální operátor s multiindexem α. Koeficienty $a_{\alpha\beta}$ jsou přitom takové, že bilineární forma

$$a(u,v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqq 1} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}(x)\, D^{\beta}u(x)\, D^{\alpha}v(x)\, dx$$

je omezená na prostoru $W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ a je $W^{1,2}(\Omega)$-eliptická. Jestliže $N-m \geqq 3$ ($m = \dim M$) a jestliže oblast Ω s částí hranice M budou takové, že můžeme užít vět o vnoření z [1] a [25], potom obdobně jako v [22] se dokáže následující tvrzení:

Existuje interval I, $0 \in \operatorname{int} I$, takový, že pro každé $\varepsilon \in I$ má Neumannův problém (2) slabé řešení $u \in W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$, kdykoliv $F \in [W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^*$. Zde je

$$F(v) = \int_\Omega fv\, dx + \int_{\partial\Omega} gv\, dS .$$

Komplikace nastávají, jestliže $N-m = 1$ nebo $N-m = 2$. V práci jsou dokázána pro tyto situace tvrzení obdobná předcházejícímu. V prvém případě překonáme potíže při vyšetřování elipticity bilineární formy $a(.,.)$ ve složkách (viz např. [12], [22]) volbou vhodné testovací funkce a aplikací upravených Hilbertových integrálních nerovností. V případě $N-m = 2$ se pomocí Fourierových řad využije obou předchozích metod.

Zvláštní pozornost je věnována při aplikaci uvedených metod geometrii hranice oblasti $\Omega \subset R^N$, při jejímž popisu jsou vhodným prostředkem metody diferenciální geometrie. Je-li $M = \partial\Omega$ hladká varieta, lze i v případě obecného N postupovat poměrně jednoduše. K značným technickým potížím může ovšem dojít tehdy, když hranice $\partial\Omega$ hladká není. Proto jsou v práci podrobněji rozpracovány případy $N = 2$ s $M = \partial\Omega$ a $N = 2$ s $M = \{x_0\}$, $x_0 \in \partial\Omega$, tak, aby byl patrný další postup při případném zobecňování.

Konečně v poslední části je dokázána (pro ε dostatečně blízká nule) existence slabého řešení Stokesova problému (viz např. [28]) ve váhových prostorech. S tím je spojeno i vyšetřování vlastností operátorů divergence a gradientu.

Nakonec poznamenejme, že při aplikaci váhových prostorů na okrajové úlohy obdržíme výsledky, které rozšiřují klasické a zahrnují je, položíme-li $\varepsilon = 0$.

Disertace přispívá k prohloubení znalostí týkajících se aplikací váhových prostorů při vyšetřování parciálních diferenciálních rovnic. Obdržené výsledky je možno použít při popisu vlastností řešení různých "klasických" okrajových úloh, např. při hledání odhadů zachycujících chování řešení v okolí různých význačných částí hranice, jako jsou stěny, hrany, vrcholy, při odhadu rychlosti konvergence nějaké přibližné metody.

Užití váhových prostorů rovněž rozšiřuje třídu okrajových úloh, pro které jsme schopni vyšetřovat existenci řešení.

S E Z N A M   Z N A Č E N Í

Číslo v prvém sloupci udává odstavec, ve kterém se daný symbol zavádí. Význam běžných symbolů, které užíváme bez předchozího zavedení, je možné nalézt v [13] nebo [22].

1.1.	$W^{k,p}(\Omega, \sigma)$	Sobolevův váhový prostor s obecnou vahou
1.1.	$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$	multiindex
1.1.	$\lvert\alpha\rvert = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$	velikost multiindexu
1.1.	D^α	diferenciální operátor s multiindexem α
1.2.1.	$\lVert u\rVert_{k,p,\sigma}$	norma prostoru $W^{k,p}(\Omega, \sigma)$
1.2.1.	$d_M(x)$	vzdálenost bodu x od množiny $M \subset \partial\Omega$
1.2.1.	$W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$	Sobolevův prostor s mocninnou vahou
1.2.1.	$\lVert u\rVert_{M,p,\varepsilon}$	norma prostoru $W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$
1.2.1.	$d(x)$	vzdálenost bodu x k hranici $\partial\Omega$
1.2.1.	$\lVert u\rVert_{p,\varepsilon}$, $\lVert u\rVert_{M,\varepsilon}$, $\lVert u\rVert_\varepsilon$	zkrácené zápisy normy
1.2.2.	supp u	nosič funkce u
1.2.2.	$C_0^\infty(\Omega)$	množina hladkých funkcí s nosičem v Ω
1.2.2.	$W_0^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$	Sobolevův váhový prostor
1.2.2.	$C^\infty(\overline{\Omega})$	množina nekonečně diferencovatelných funkcí v Ω se stejnoměrně spojitými derivacemi v Ω
1.2.2.	$C_M^\infty(\Omega)$	prostor hladkých funkcí s blíže určeným nosičem
1.2.2.	$W_M^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$	Sobolevův váhový prostor
1.2.3.	$L_p(\Omega, d_M, \varepsilon)$	Lebesgueův váhový prostor
1.2.3.	$\lvert u\rvert_{M,p}$,	norma prostoru $L_p(\Omega, d_M, \varepsilon)$
1.2.3.	$\lvert u\rvert_{p,\varepsilon}$, $\lvert u\rvert_{M,\varepsilon}$, $\lvert u\rvert_\varepsilon$	zkrácené zápisy normy
3.1.1.	$\mathcal{C}^{0,1}$	oblasti s lipschitzovskou hranicí

3.1.2.	$\mathcal{Q}^{0,1}(x_o)$	oblasti lipschitzovské v okolí bodu x_o
3.1.3.	$Q^{0,1}(M)$	třída oblastí
3.1.3.	M	uzavřená varieta dimenze m hranice
3.2.1.	$\varkappa_i(t)$, $\varkappa_i(\alpha(t))$, $i=1,\dots,N-1$	hlavní křivosti
3.2.1.	$n(x)$	vektor vnitřní normály k hranici $\partial\Omega$
3.2.2.	ψ	zobrazení popisující "okolí" hranice
3.2.2.	Jac ψ	Jakobián zobrazení ψ
3.2.2.	∇u	gradient funkce u
3.3.1.	$\dot{\alpha}(t)$	derivace vektorové funkce α (tečný vektor ke křivce α v bodě $\alpha(t)$)
3.3.1.	$[\alpha]$	geometrický obraz křivky α
3.3.3.	$R^+_{i,j}$, $R^-_{i,j}$	funkce popisující "osu zobecněného kužele"
3.3.3.	$\mathcal{V}^+_{i,j}$, $\mathcal{V}^-_{i,j}$, $\mathcal{U}_{i,j}$, M_i, $\sigma_{i,j}$	množiny z okolí po částech hladké hranice $\partial\Omega$
4.2.1.	$\hookrightarrow$	spojité vnoření
4.2.4.	Ω_n	podoblast Ω bez hraničního pásku šířky $\infty \frac{1}{n}$
4.2.5.	$\lVert u \rVert_{p,\varepsilon}$	norma prostoru $W_o^{1,2}(\Omega,d,\varepsilon)$
4.3.1.	$V_{p,\varepsilon}$	prostor $W_o^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon)$
4.3.3.	$[L_p(\Omega,d_M,\varepsilon)]^*$	prostor duální k $L_p(\Omega,d_M,\varepsilon)$
4.3.3.	$\lVert\cdot\rVert_{*,M,p,}$	norma duálního prostoru
4.4.1.	$L_p(\partial\Omega)$	Lebesgueův prostor
5.1.	V^*	duál Banachova prostoru V
5.1.	$\langle\cdot,\cdot\rangle$	dualita Banachových prostorů V, V^*
6.	Ker	jádro operátoru
7.1.1.	$\lVert u\rVert$	norma Sobolevova prostoru $W^{1,2}(\Omega)$
7.1.1.	$W^{-1,2}(\Omega)$	duál prostoru $W_o^{1,2}(\Omega)$
7.1.2.	$\lvert u\rvert_\infty$	norma prostoru $L_\infty(\Omega)$

7.1.3.	$\|f\|_{-1,-\varepsilon}$	norma prostoru $[W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^*$
8.2.1.	J^*	adjungovaný operátor k izomorfismu J
8.2.2.	S	nelineární operátor
8.5.	Δ	Laplaceův operátor
9.1.	$\\|.\\|_*$	zkrácený zápis normy příslušného duálního prostoru
10.3.1.	$\\|v\\|_{-\varepsilon;X}$	norma $\\|v\\|_{\partial\Omega,2,-\varepsilon}$ na podoblasti X
10.3.1.	$a_k(.,.)$	bilineární forma vztažená na množinu V_k
10.4.3.	$a_X(.,.)$	bilineární forma vztažená na množinu X
11.2.2.	$C^\infty(\Omega)$	množina nekonečně diferencovatelných funkcí v Ω
11.2.2.	$\mathfrak{M}$	množina $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega, r, \varepsilon)$
11.2.2.	2Ω	"prodloužení" množiny Ω
11.2.2.	$\bar{u}$	"symetrické prodloužení" funkce u
11.2.2.	$A(r), A_1(r), \ldots$	koeficienty Fourierovy řady
12.1.	$L_2^o(\Omega, d_M, \varepsilon)$	Lebesgueův prostor
12.1.	$\\|\vec{u}\\|_{M,\varepsilon}$	norma prostoru $[W_o^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)]^N$
12.1.	$\\|\\|\vec{u}\\|\\|_{M,\varepsilon}$	ekvivalentní norma k normě $\\|\vec{u}\\|_{M,\varepsilon}$
12.1.	D_ε	Sobolevův váhový prostor s nulovou divergencí
12.1.	div, grad	operátory divergence a gradientu
12.1.	$D_\varepsilon^\perp$	ortogonální doplněk k D_ε
12.1.	$H_{/R}$	faktorprostor Hilbertova prostoru H podle R
12.1.	$\|p\|_{H_{/R}}$	norma faktorprostoru
12.2.	$\{const\}$	prostor konstant
12.2.	$\{d_M^{-\varepsilon/2} const\}$	lineární prostor generovaný funkcí $d_M^{-\varepsilon/2}$
12.3.2.	$\\|P\\|_{\mathcal{L}(.,.)}$	operátorová norma lineárního operátoru P
12.4.	$\vec{\nu}(x)$	vektor vnější normály k $\partial\Omega$ v bodě x

1. DEFINICE A OZNAČENÍ

1.1. PROSTORY FUNKCÍ S OBECNOU VÁHOU

Sobolevův váhový prostor

(1.1) $W^{k,p}(\Omega, \sigma)$,

kde

$k \geqq 0$ je celé číslo,

$p \geqq 1$ je reálné číslo,

Ω je oblast v R^N s hranicí $\partial\Omega$,

σ je nezáporná (skoro všude kladná) funkce v Ω nazývaná váhou,

je množina všech funkcí $u = u(x)$ definovaných skoro všude v Ω, jejichž zobecněné (ve smyslu distribucí) derivace $D^\alpha u$ řádu $|\alpha| \leqq k$ splňují nerovnost

$$\int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, \sigma(x) \, dx < \infty .$$

Přitom $\alpha = (\alpha_1, \dots , \alpha_N)$, kde α_i je celé nezáporné, značí multiindex, $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$ a $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$.

Tento prostor je normovaný lineární, jestliže jej opatříme normou

$$\|u\|_{k,p,\sigma} = \Big(\sum_{|\alpha| \leqq k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, \sigma(x) \, dx \Big)^{\frac{1}{p}} .$$

Dokonce je možné uvažovat pro každý multiindex jinou váhu σ_α . Jedna z mála monografií zabývajících se vlastnostmi takovýchto prostorů s obecnou vahou σ je [12]. Většina výsledků, které budeme v dalším používat, je v této knize uvedena. Pokud to bude možné, převezmeme i zde zavedené značení.

V předkládané práci budeme ovšem pracovat s konkrétnějšími vahami σ , které budou mocninného typu a lokálně integrovatelné v Ω . Příslušné váhové prostory budou proto Banachovými prostory (viz např. [12]). Rovněž operátory, které budeme vyšetřovat, jsou druhého řádu, vystačíme proto s váhovými prostory $W^{1,p}(\Omega, \sigma)$, $L_p(\Omega, \sigma)$.

1.2. PROSTORY FUNKCÍ S MOCNINNOU VAHOU

1.2.1. Prostor $W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$

Nechť $M \subset \partial\Omega$ a nechť

$$d_M(x) = \mathrm{dist}(x,M) = \inf_{y\in M} |x - y|$$

značí vzdálenost bodu $x \in \Omega$ od části hranice M. Váhu $\sigma = d_M^{\varepsilon}$ budeme nazývat mocninnou vahou*) a příslušný Sobolevův prostor s $k = 1$, $p > 1$, budeme značit

$$W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon) .$$

Tedy

$$W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon) = \Big\{ u = u(x);\ \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|^p d_M^{\varepsilon}\, dx < \infty,\ i=1,\dots,N,$$

$$\int_\Omega |u|^p d_M^{\varepsilon}\, dx < \infty \Big\} .$$

Tento prostor bude opatřen normou

$$(1.2)\qquad \|u\|_{M,p,\varepsilon} = \Big(\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\Big|^p d_M^{\varepsilon}(x)dx + \int_\Omega |u(x)|^p d_M^{\varepsilon}(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{p}} .$$

Jestliže bude $M = \partial\Omega$, potom budeme zkráceně psát

$$d_{\partial\Omega}(x) = d(x), \quad \|\cdot\|_{\partial\Omega,p,\varepsilon} = \|\cdot\|_{p,\varepsilon} .$$

Bude-li navíc $p = 2$, budeme značit

$$\|\cdot\|_{M,2,\varepsilon} = \|\cdot\|_{M,\varepsilon} \quad \text{pro obecné } M \subset \partial\Omega ,$$

$$\|\cdot\|_{\partial\Omega,2,\varepsilon} = \|\cdot\|_{\varepsilon} .$$

V případě, že by mohlo dojít k nedorozumění, užijeme nezkráceného způsobu značení.

*) Trochu nepřesně budeme v dalším vahou nazývat i funkci d_M.

1.2.2. Prostory $W_o^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$, $W_M^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$

Symbolem

$$\operatorname{supp} u$$

značíme nosič funkce u (definované sk. všude v $\Omega \subset R^N$), tj. uzávěr (v Euklidově normě) množiny

$$\{x \in \Omega ;\ u(x) \neq 0\} .$$

Dále budeme značit

$$C_o^\infty(\Omega)$$

množinu všech funkcí nekonečně diferencovatelných v Ω s vlastností $\operatorname{supp} u \subset \Omega$.

Zřejmě $C_o^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$. Uzávěr množiny $C_o^\infty(\Omega)$ vzhledem k normě (1.2) budeme značit

$$W_o^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon) .$$

Pro úplnost definujme ještě prostor blíže charakterizující funkce, jejichž stopy jsou nulové na množině M (vlastnosti množiny M budou upřesněny v kapitole 4). Nechť $C^\infty(\overline{\Omega})$ značí množinu všech nekonečně diferencovatelných funkcí v Ω, jejichž všechny derivace $D^\alpha u$ jsou omezené a stejnoměrně spojité v Ω. Definujme množinu

$$C_M^\infty(\Omega)$$

jako množinu všech funkcí $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ splňujících

$$\operatorname{supp} u \cap \overline{M} = \emptyset .$$

Uzávěr množiny $C_M^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ vzhledem k normě (1.2) označíme

$$W_M^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon) .$$

1.2.3. Prostor $L_p(\Omega, d_M, \varepsilon)$

Jestliže v odstavci 1.2 položíme $k = 0$ a $\sigma = d_M^\varepsilon$, obdržíme Lebesgueův váhový prostor

$$L_p(\Omega, d_M, \varepsilon) = \{u = u(x);\ \int_\Omega |u(x)|^p\, d_M^\varepsilon(x)\, dx < \infty\}$$

opatřený normou

$$|u|_{M,p,} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, d_M^{\varepsilon}(x) \, dx \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Obdobně jako v odstavci 1.3.1 označme

$$|u|_{\partial\Omega,p,\varepsilon} = |u|_{p,\varepsilon} , \qquad |u|_{M,2,\varepsilon} = |u|_{M,\varepsilon} ,$$

$$|u|_{\partial\Omega,2,\varepsilon} = |u|_{\varepsilon} .$$

Poznámka. Bude-li $\varepsilon = 0$, potom příslušné Sobolevovy a Lebesgueovy prostory jsou obvyklými prostory bez váhy ($W^{1,p}(\Omega)$, $W_o^{1,p}(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, atd.).

I. TECHNICKÉ PROSTŘEDKY A ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI VÁHOVÝCH PROSTORŮ

2. N E R O V N O S T I

V celé práci budeme neustále užívat Hölderovy nerovnosti. Při práci s váhovými prostory se rovněž neobejdeme bez Hardyho nerovnosti, na níž jsou založeny věty o vnoření Sobolevových váhových prostorů stejně jako mnoho nezbytných odhadů. Konečně další skupinou nerovností jsou nerovnosti odvozené z Hilbertových integrálních nerovností. Budou nezbytné při vyšetřování Neumannova problému.

2.1. HÖLDEROVA NEROVNOST

Nechť $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$, $p,q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom pro funkce $f \in L_p(a,b)$, $g \in L_q(a,b)$ platí nerovnost

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leqq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} . \tag{2.1}$$

Častěji budeme užívat její následující zobecnění.

Nechť $\Omega \subset R^N$ je měřitelná podmnožina a $p,q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom pro funkce $f \in L_p(\Omega)$ a $g \in L_q(\Omega)$ platí

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| \leqq \int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leqq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} . \tag{2.2}$$

V druhé z nerovností nastává rovnost právě tehdy, když pro nějaká čísla $A,B \geqq 0$, $A^2+B^2 > 0$, je

$$A\,|f(x)|^p = B\,|g(x)|^q \quad \text{skoro všude v } \Omega .$$

2.2. HARDYHO NEROVNOST

Hardyho nerovnost je nejdůležitějším nástrojem při vyšetřování váhových prostorů. Zobecněná Hardyho nerovnost je uvedena a dokázána v [12], nicméně v našem případě vystačíme s tvrzením, které obsahuje pouze váhy mocninného typu. O tyto nerovnosti se opírá většina odhadů a především pak věty o vnoření, které uvedeme v odst. 4.2.

Jestliže $-\infty < a < b \leqq +\infty$, $p > 1$, $\alpha < p-1$ a jestliže $f \in L_p((a,b),\ x-a, \alpha)$, potom platí

$$(2.3)_1 \quad \int_a^b \left[\int_a^x |f(t)|\, dt\right]^p (x-a)^{\alpha-p}\, dx \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{p}{|\alpha - p+1|} \right)^p \int_a^b |f(x)|^p\, (x-a)^{\alpha}\, dx .$$

Je-li $-\infty < a < b \leqq +\infty$, $\alpha > p-1$, potom pro každou funkci $f \in L_p((a,b),\ x-a, \alpha)$ platí

$$(2.3)_2 \quad \int_a^b \left[\int_x^b |f(t)|\, dt\right]^p (x-a)^{\alpha-p}\, dx \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{p}{|\alpha - p+1|} \right)^p \int_a^b |f(x)|^p\, (x-a)^{\alpha}\, dx .$$

2.3. HILBERTOVY INTEGRÁLNÍ NEROVNOSTI A NEROVNOSTI Z NICH ODVOZENÉ

2.3.1. Hilbertovy integrální nerovnosti

Předpokládejme, že $p,q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, a že $K(\xi, \eta)$ je nezáporné jádro, homogenní stupně -1 (tj. $K(\xi t, \eta t) = t^{-1} K(\xi, \eta)$ pro $t > 0$) splňující podmínku

$$\int_0^\infty K(\xi, 1)\, \xi^{-\frac{1}{p}}\, d\xi = \int_0^\infty K(1, \eta)\, \eta^{-\frac{1}{q}}\, d\eta = k .$$

Potom platí

$$\int_0^\infty \int_0^\infty K(\xi, \eta)\, f(\xi)\, g(\eta)\, d\xi\, d\eta \leqq$$

$$\leqq k \left(\int_0^\infty |f|^p\, d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty |g|^q\, d\eta \right)^{\frac{1}{q}} ,$$

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty K(\xi, \eta)\, f(\xi)\, d\xi \right)^p d\eta \leqq k^p \int_0^\infty |f|^p\, d\xi ,$$

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty K(\xi,\eta)\, g(\eta)\, d\eta \right)^q d\xi \leqq k^q \int_0^\infty |g|^q\, d\eta \,.$$

(Důkaz viz [5].)

2.3.2. Odvozené nerovnosti

Nechť $0 \leqq \omega_1 < \omega_2 \leqq +\infty$, $\alpha < 1$. Potom platí

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(\int_\eta^{\omega_2} u(\xi)\, \xi^{\alpha-1}\, d\xi \right) u(\eta)\, d\eta \leqq \tag{2.4}$$

$$\leqq \frac{2}{1-\alpha} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |u(\eta)|^2\, \eta^\alpha\, d\eta \,,$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(\int_\eta^{\omega_2} u(\xi)\, \xi^{\alpha-1}\, d\xi \right)^2 \eta^{-\alpha}\, d\eta \leqq \tag{2.5}$$

$$\leqq \left(\frac{2}{1-\alpha} \right)^2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} |u(\eta)|^2\, \eta^\alpha\, d\eta \,.$$

<u>Důkaz</u>: Položme v Hilbertových nerovnostech

$$K(\xi,\eta) = \begin{cases} \xi^{\alpha/2-1} \cdot \eta^{-\alpha/2} & \text{pro } \xi > \eta \,, \\ 0 & \text{pro } \xi \leqq \eta \,, \end{cases}$$

a dále $p = q = 2$,

$$f(\xi) = g(\xi) = \begin{cases} u(\xi)\, \xi^{\frac{\alpha}{2}} & \text{pro } \xi \in (\omega_1, \omega_2) \,, \\ 0 & \text{pro } \xi \notin (\omega_1, \omega_2) \,. \end{cases}$$

Pro $\omega_1 = 0$ je důkaz zřejmý. Pro $\omega_1 \neq 0$ můžeme na intervalu $(0, \omega_1)$ položit $u \equiv 0$.

2.4. JINÉ NEROVNOSTI

Nechť $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\delta > 0$. Potom pro všechna $a, b \in R$ platí nerovnost

$$ab \leq \frac{\delta}{p} |a|^p + \frac{1}{q\,\delta^{1/(p-1)}} |b|^q \; . \tag{2.6}$$

Nechť $p \geq 1$. Potom pro všechna $a, b \in R$ platí nerovnost

$$|a + b|^p \leq 2^{p-1} \left(|a|^p + |b|^p \right) . \tag{2.7}$$

Dále budeme užívat Cauchyovu nerovnost

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^2 \right)^{1/2} \tag{2.8}$$

a obecnější nerovnost

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{N} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{N} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.9}$$

s $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tuto nerovnost nazýváme rovněž Hölderovou, neboť je vlastně diskrétním případem (2.1).

3. POPIS OBLASTI

Při vyšetřování existence slabého řešení okrajových úloh pro parciální diferenciální rovnice požadujeme obvykle vhodné podmínky omezující uvažovanou oblast. Nejčastěji užívaná je podmínka lipschitzovskosti hranice, s kterou vystačíme v případě Dirichletova problému a Stokesovy úlohy a v případě, že váhu vztahujeme k celé hranici. Pro Neumannův problém je ovšem situace jiná. Jednak již pro váhu $d^{\varepsilon}_{\partial\Omega} = d^{\varepsilon}$ musíme uvažovat oblasti s "hladší" hranicí, jednak pro obecnější váhy d^{ε}_{M}, $M \subset \partial\Omega$, jsou vlastnosti a popis hranice ještě složitější. Proto budeme této problematice věnovat patřičnou pozornost.

3.1. PODMÍNKA LIPSCHITZOVSKOSTI

3.1.1. Oblast s lipschitzovskou hranicí

Řekneme, že $\Omega \subset R^N$ je oblast s lipschitzovskou hranicí, jestliže je omezená a její hranici lze lokálně popsat lipschitzovskou funkcí, tj. jsou-li splněny následující podmínky:

(i) Existuje konečný počet m souřadnicových systémů

$$(y_i', y_{iN}),\ y_i' = (y_{i1}, \dots, y_{iN-1})$$

a stejný počet lipschitzovských funkcí $a_i = a_i(y_i')$ definovaných na (N-1)-dimenzionálních krychlích

$$\Delta_i = \{ y_i';\ |y_{ij}| \leqq \delta \ \text{ pro } j = 1,2,\dots,N-1 \}$$

(i= 1,2,...,m) tak, že pro každý bod $x \in \partial\Omega$ lze nalézt alespoň jedno $i \in \{1,2,\dots,m\}$ s vlastností

$$x = (y_i', y_{iN}),\ y_{iN} = a_i(y_i') .$$

(ii) Existuje kladné číslo $\beta < 1$ takové, že pro množinu

$$U_i = \{ (y_i', y_{iN});\ y_i' \in \Delta_i,\ a_i(y_i') - \beta < y_{iN} < a_i(y_i') + \beta \}$$

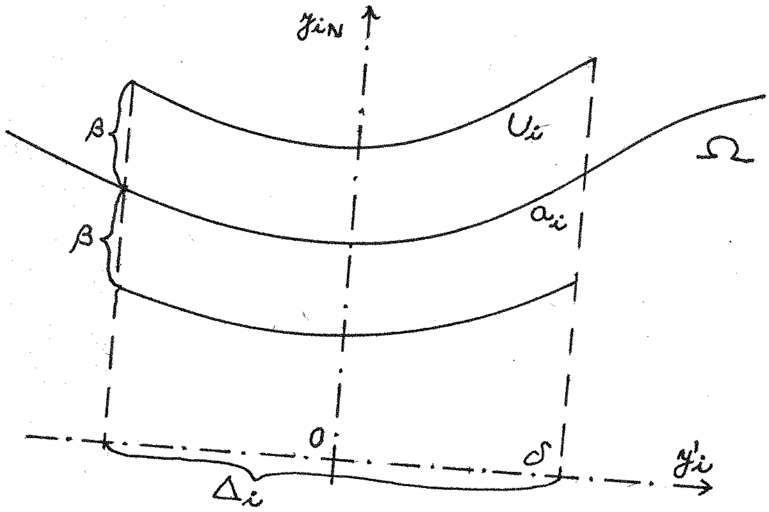
platí

$$U_i \cap \Omega = \{ (y_i', y_{iN});\ y_i' \in \Delta_i,\ a_i(y_i') - \beta < y_{iN} < a_i(y_i') \} ,$$

$$U_i \cap \partial\Omega = \{(y_i', y_{iN});\ y_i' \in \Delta_i,\ y_{iN} = a_i(y_i')\} \ .$$

(Viz obrázek č.1.)

Obr. č.1



Připomeňme, že funkce $a_i: \Delta_i \longrightarrow R$ je lipschitzovská, jestliže existuje konstanta $C > 0$, pro kterou platí

$$|a_i(y_i') - a_i(z_i')| \leqq C\ |y_i' - z_i'| \ ,$$

kdykoliv $y_i', z_i' \in \Delta_i$.

Budeme říkat, že Ω je třídy $\mathcal{C}^{0,1}$, a psát $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, jestliže Ω bude oblast s lipschitzovskou hranicí.

3.1.2. Oblast třídy $\mathcal{R}^{0,1}(x_0)$

Řekneme, že omezená oblast $\Omega \subset R^N$ je třídy $\mathcal{R}^{0,1}(x_0)$, a píšeme $\Omega \in \mathcal{R}^{0,1}(x_0)$, jestliže jsou splněny následující podmínky:

(i) Platí podmínka (ii)odstavce 3.1.1.

(ii) Platí podmínka (i) odstavce 3.1.1, ve které uvažujeme funkce a_i spojité (tj. nemusí být lipschitzovské).

(iii) Funkce $a_i = a_i(y_i')$, která (ve smyslu lokálního souřadnicového systému (y_i', y_{iN})) popisuje hranici $\partial\Omega$ v nějakém okolí bodu x_0, je lipschitzovská.

První dvě podmínky říkají, že oblast Ω je třídy $\mathcal{C}^0$, tj. oblast se spojitou hranicí. Podmínkou(iii) vyžadujeme navíc lipschitzovskost hranice v okolí bodu x_0.

3.1.3. Oblast třídy $Q^{0,1}(M)$

Nechť $\Omega \subset R^N$ je omezená oblast, $m = 0,\dots,N-1$. Položme $Q = (0,1)^N$ a $Q(m) = \{ x \in \overline{Q};\ x_{m+1} = \dots = x_N = 0 \}$.

Řekneme, že uzavřená množina $M \subset \partial\Omega$ je varieta dimenze m a že Ω je třídy $Q^{0,1}(M)$ (píšeme $\Omega \in Q^{0,1}(M)$), jestliže existuje konečné otevřené pokrytí $\{U_i\}_{i=0}^{s}$ množiny $\overline{\Omega}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) $M \subset \bigcup_{i=1}^{s} U_i$.

(ii) Existuje $\delta > 0$ takové, že $d_M(x) \geqq \delta$ pro $x \in U_0$.

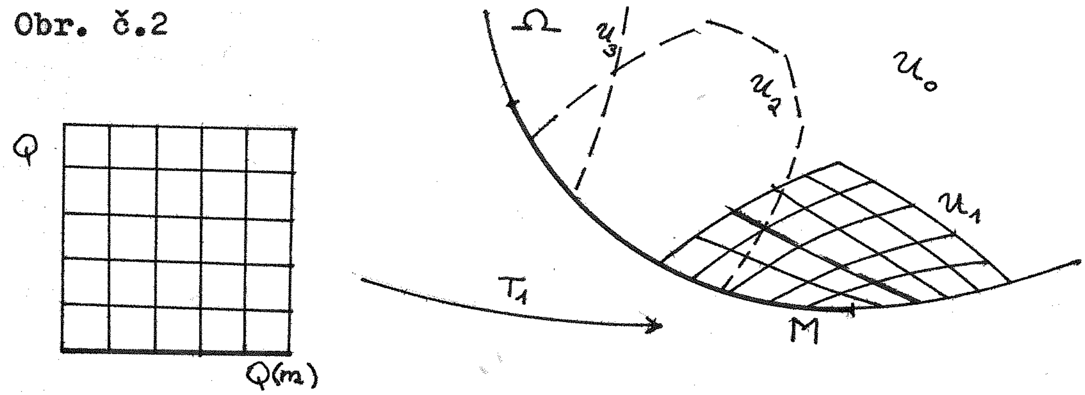
(iii) Existují čísla $c_2 \geqq c_1 > 0$ a systém vzájemně jednoznačných zobrazení $T_i:\ Q \to \Omega \cap U_i$, $i = 1,\dots,s$, takových, že je splněno

$$T_i(Q(m)) = \overline{M \cap U_i}$$

a

$$c_1|x-y| \leqq |T_i(x) - T_i(y)| \leqq c_2|x-y|, \quad x,y \in Q,\ i = 1,\dots,s .$$

Obr. č.2

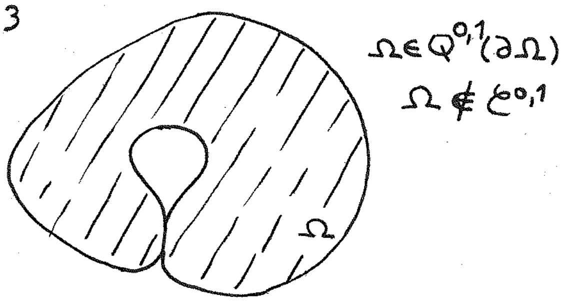


<u>Příklady</u>. Je-li oblast $\Omega \subset R^N$ omezený kužel s vrcholem x_0, potom $\Omega \in Q^{0,1}(M)$ s $M = \{x_0\}$.

Je-li oblast $\Omega = (0,1)^N$, $M = \{x \in \partial\Omega;\ x_N = 0\}$, potom $\Omega \in Q^{0,1}(M)$.

<u>Poznámka</u>. Bude-li $M = \partial\Omega$ a $\Omega \in Q^{0,1}(M)$, nemusí být oblast Ω třídy $\mathcal{E}^{0,1}$, neboť nemusí být splněna podmínka (ii) odstavce 3.1.1 (viz obrázek č.3).

Obr. č.3



3.2. OBLAST S HLADKOU HRANICÍ

3.2.1. Některé pojmy diferenciální geometrie

V kapitole 10 při řešení Neumannova problému budeme potřebovat vhodný popis oblasti s hladkou hranicí (tj. oblasti, jejíž hranice je hladká varieta). Proto připomeneme nejprve některé základní pojmy a tvrzení diferenciální geometrie. Podrobněji je možné se s nimi seznámit v [29].

Nechť $\Omega \subset R^N$ je omezená oblast s hladkou hranicí. Pro $x \in \partial\Omega$ budeme značit $v_1(x), \dots , v_{N-1}(x)$ jednotkové tečné vektory k $\partial\Omega$ v bodě x, které mají směry hlavních křivostí. Dále $\varkappa_1(x), \dots , \varkappa_{N-1}(x)$ bodou značit odpovídající hlavní křivosti v bodě x. Přitom vektorová pole $x \longrightarrow v_i(x)$, $i=1,\dots,N-1$, na $\partial\Omega$ jsou hladká, stejně tak jsou hladké funkce $x \longrightarrow \varkappa_i(x)$, $i=1,\dots,N-1$. Z vlastností směrů hlavních křivostí plyne, že vektory $v_1(x), \dots , v_{N-1}(x)$ jsou (pro každý bod $x \in \partial\Omega$) navzájem kolmé.

Hranici $\partial\Omega$ můžeme nyní lokálně popisovat křivočarými ortogonálními souřadnicemi, jejichž směry budou směry hlavních křivostí. Tedy budeme popisovat hranici $\partial\Omega$ lokálními difeomorfismy tvaru $\omega : \overline{U} \subset R^{N-1} \longrightarrow \partial\Omega$, kde U je jednoduše souvislá oblast a kde značíme $x = \omega(t)$ pro $t \in U$. Tyto difeomorfismy budou splňovat rovnice

$$(3.1) \qquad \frac{\partial \omega(t)}{\partial t_i} = v_i(\omega(t)) \quad \text{pro } t \in U,\ i= 1,\dots,N-1 .$$

Poměrně jednoduše lze ukázat, že můžeme uvažovat takové difeomorfismy ω_k a oblasti $U_k \subset R^{N-1}$, $k= 1,\dots,r$, které splňují vztahy

$$\bigcup_{k=1}^{r} \alpha_k(\overline{U}_k) = \partial\Omega \ , \qquad \alpha_k(U_k) \cap \alpha_j(U_j) = \emptyset \ \text{ pro } k \neq j,$$

$$U_k \cap U_j = \emptyset \ \text{ pro } k \neq j.$$

Označme $n(x)$ jednotkový vektor vnitřní normály k hranici v bodě $x \in \partial\Omega$ a připomeňme rovnost

$$(3.2) \qquad \frac{\partial n(\alpha(t))}{\partial t_i} = - \varkappa_i(\alpha(t)) \, v_i(\alpha(t)) \ , \ i = 1,\dots,N-1 \ , \quad t \in U \ .$$

Přitom hranice $\partial\Omega$ je hladká a omezená, křivosti jsou rovněž omezené a v některém bodě $x \in \partial\Omega$ je alespoň jedna z nich nenulová (jinak by $\partial\Omega$ byla nadrovina). Existuje proto číslo $\omega > 0$ splňující nerovnost

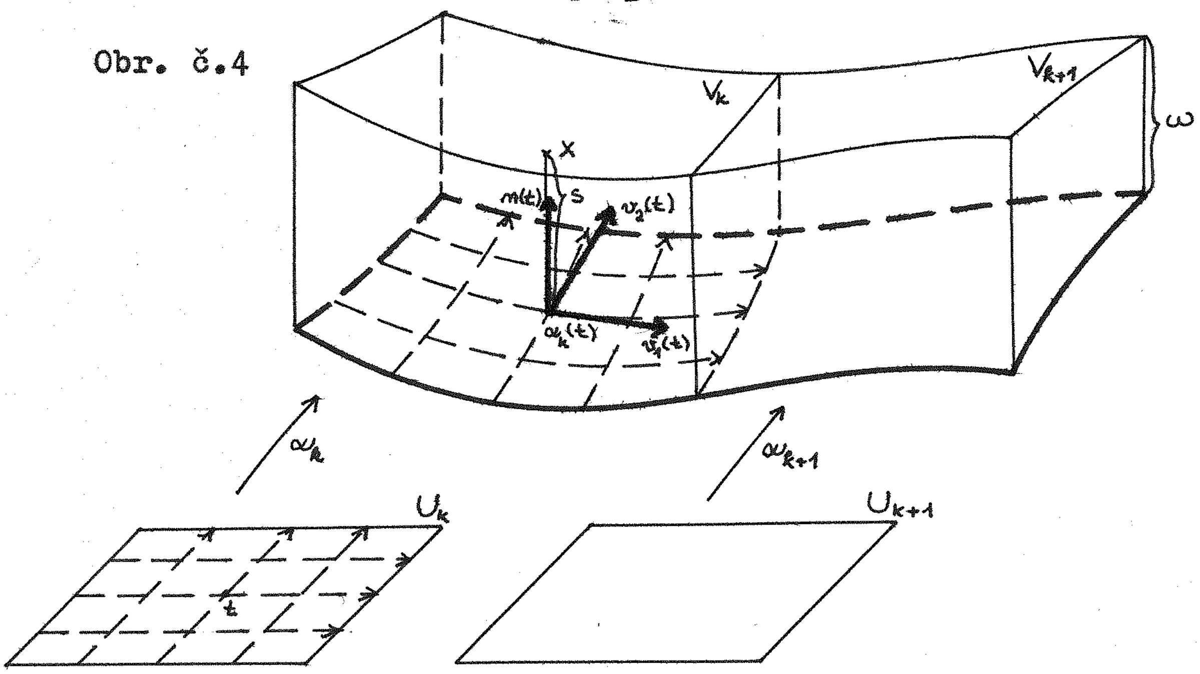
$$(3.3) \qquad 0 < \omega < \frac{1}{\max\limits_{x \in \partial\Omega} \ (\max\limits_{i=1,\dots,N-1} |\varkappa_i(x)| \,)}$$

a dále takové, že skoro každý bod $x \in \overline{\Omega}$ (ve smyslu Lebesgueovy míry v R^N) s $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) < \omega$ má jednoznačné vyjádření tvaru

$$(3.4) \qquad x = \alpha_k(t) + s \, n(\alpha_k(t)) \ .$$

Navíc $s = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ (viz [29]).

Obr. č.4



K tomu je ovšem nutné předpokládat, že pro $t \in \overline{U}_k$ a $s \in (-\omega, 0)$ je $x \notin \overline{\Omega}$, tj. oblast Ω leží na jedné straně hranice $\partial\Omega$. Nejednoznačnost může nastat pouze tehdy, když

$$x \in \alpha_k(\partial U_k) \cap \alpha_\ell(\partial U_\ell) \quad \text{pro nějaká } k, \ell .$$

3.2.2. Vlastnosti zobrazení popisujícího hranici

Vztahem (3.4) definujme zobrazení $\psi: (t,s) \longrightarrow x$ na množině $[\bigcup_{k=1}^{r} \overline{U}_k] \times \langle 0, \omega \rangle$, které je vhodným popisem "okolí" hranice $\partial\Omega$. Zdůrazníme některé jeho vlastnosti, které budeme užívat v kapitole 10.

Obraz množiny $U_k \times \langle 0, \omega)$ zobrazení ψ označíme V_k, $k = 1, \dots, r$, a položíme $V_0 = \{ x \in \Omega;\ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \omega \}$. Zřejmě

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{k=0}^{r} \overline{V}_k , \quad V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{pro } i \neq j .$$

Pro jednoduchost budeme dále užívat zkráceného zápisu

$$u(x) = u(\alpha_k(t) + s\, n(\alpha_k(t))) = u(t,s) ,$$

kde u je nějaká funkce definovaná na množině $V = \bigcup_{k=1}^{r} \overline{V}_k$.

Stejně tak budeme psát $\varkappa_i(t)$ místo $\varkappa_i(\alpha_k(t))$ a $v_i(t)$, resp. $n(t)$ místo $v_i(\alpha_k(t))$, resp. $n(\alpha_k(t))$.

Protože vzhledem k vztahům (3.1) a (3.2) je

$$\frac{\partial\psi}{\partial t_i}(t,s) = v_i(t) - s\, \varkappa_i(t)\, v_i(t) , \quad i = 1, \dots, N-1 ,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}(t,s) = n(t) ,$$

odvodíme pro Jakobián zobrazení ψ vztah (zde $s \in \langle 0, \omega)$)

$$\left| [\mathrm{Jac}\, \psi](t,s) \right| = \left| \det \Big((1 - s\, \varkappa_1(t)) v_1(t), \dots, (1 - s\, \varkappa_{N-1}(t)) v_{N-1}(t), n(t) \Big) \right| =$$

$$= \left| \prod_{i=1}^{N-1} (1-s\varkappa_i(t)) \right| \cdot \left| \det \left(v_1(t),\dots,v_{N-1}(t),\ n(t) \right) \right| =$$

$$= \prod_{i=1}^{N-1} (1-s\varkappa_i(t)).$$

Jako důsledek nerovností (3.3) dostaneme

$$(3.5) \quad \begin{cases} 0 < C_i \leqq 1-s\varkappa_i(t) \leqq D_i & \text{pro každé } i=1,\dots,N-1, \\ & t \in \bigcup_{k=1}^{r} U_k,\ s \in \langle 0,\omega), \\ C < \left| [\operatorname{Jac} \psi] (t,s) \right| < D & \text{pro každé } t \in \bigcup_{k=1}^{r} U_k,\ s \in \langle 0,\omega), \end{cases}$$

kde $C,D,C_i,D_i > 0$ jsou vhodné konstanty.

Nakonec potřebujeme odvodit vztah pro skalární součin gradientů dvou funkcí vyjádřený v zavedených křivočarých souřadnicích.

Lemma 3.1. V bodech x množiny V, kdy $x = \psi(t,s)$, platí

$$\nabla u(x) . \nabla w(x) =$$

$$(3.6) \quad = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{(1-s\varkappa_i(t))^2} \frac{\partial u(t,s)}{\partial t_i} \frac{\partial w(t,s)}{\partial t_i} +$$

$$+ \frac{\partial u(t,s)}{\partial s} \frac{\partial w(t,s)}{\partial s} .$$

Důkaz. Stačí zjistit, čemu se rovnají součty $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial t_r}{\partial x_i} \frac{\partial s}{\partial x_i}$, $\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial t_r}{\partial x_i} \frac{\partial t_q}{\partial x_i}$, $r,q=1,\dots,N-1$, $\sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial s}{\partial x_i})^2$ a užít věty o derivování složené funkce.

Značme v_j^ℓ, n^ℓ ℓ-tou složku vektorů v_j, n. Nyní derivováním v (3.4) a užitím (3.1) a (3.2) dostaneme pro každé $i=1,\dots,N$ soustavu lineárních rovnic

$$(3.7) \quad \delta_{\ell i} = \sum_{j=1}^{N-1} (1-s\varkappa_j(t)) v_j^\ell(t) \frac{\partial t_j}{\partial x_i} + n^\ell(t) \frac{\partial s}{\partial x_i} , \quad =1,\dots,N,$$

s neznámými $\frac{\partial t_j}{\partial x_i}$, $\frac{\partial s}{\partial x_i}$. Pro jednoduchost budeme předpokládat (bez újmy na obecnosti), že báze $v_1(t),\dots,v_{N-1}(t),n(t)$ je kladně orientovaná. Potom bude, jak jsme již spočetli, determinant soustavy roven součinu $\prod_{i=1}^{N-1}(1-s\,\varkappa_i(t))$. Protože dále determinant matice je roven determinantu matice transponované a součin determinantů matic je roven determinantu součinu těchto matic, obdržíme řešením (3.7)

$$\frac{\partial t_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial t_\ell}{\partial x_i} = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N-1}(1-s\,\varkappa_i(t))\,.\,\prod_{\substack{i=1\\ i\neq \ell}}^{N-1}(1-s\,\varkappa_i(t))\,.\,\big|[\mathrm{Jac}\,\psi](t,s)\big|^{-1}\,.$$

$$.\ \det\Bigg[\begin{array}{c} \\ \\ \\ i\text{-tý} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \\ & & 0 & & \\ v_1(t),\dots,v_{k-1}(t), & & \vdots & ,v_{k+1}(t),\dots,n(t) & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}^T .$$

$$.\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ i\text{-tý} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} & & 0 & & \\ & & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \\ & & 0 & & \\ v_1(t),\dots,v_{\ell-1}(t), & & \vdots & ,v_{\ell+1},\dots,n(t) & \\ & & 0 & & \end{pmatrix}\Bigg] =$$

$$= \det \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \qquad\qquad \ell\text{-tý} \end{matrix} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ k\text{-tý} \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & v_1^i & & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & & \\ & & 1 & v_\ell^i & & & 0 & & \\ & 0 & & \vdots & 1 & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & & \\ v_1^i & \dots & & 1 & v_{\ell+1}^i & \dots & v_k^i & \dots & n^i \\ & & & v_{k+1}^i & & & & 1 & \\ & 0 & & \vdots & & 0 & & & \ddots \\ & & & n^i & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} .$$

$$\cdot\ \left[(1-s\,\varkappa_k(t))\,(1-s\,\varkappa_\ell(t))\right]^{-1} =$$

$$= \left[(1-s\,\varkappa_k(t))\,(1-s\,\varkappa_\ell(t))\right]^{-1} \cdot \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} v_k^i\, v_\ell^i & \text{pro } k \neq \ell\,, \\ \sum_{i=1}^{N} \Big(1-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N-1} (v_j^i)^2\Big) & \text{pro } k=\ell\,. \end{cases}$$

Tedy
$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial t_k}{\partial x_i}\frac{\partial t_\ell}{\partial x_i} = \frac{1}{(1-s\,\varkappa_k(t))^2}\,\delta_{k\ell}\,.$$

Obdobně
$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial t_k}{\partial x_i}\frac{\partial s}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial s}{\partial x_i}\right)^2 = 1\,.$$

3.3. ROVINNÁ OBLAST S PO ČÁSTECH HLADKOU HRANICÍ

3.3.1. Po částech hladká křivka

V případě $N = 2$ lze hranice oblastí, které budeme uvažovat, popisovat křivkami.

Prostou uzavřenou kživkou po částech třídy $\mathcal{C}^2$ budeme nazývat spojité zobrazení

$$\omega : \bigcup_{j=0}^{q} \langle t_j, t_{j+1}\rangle \longrightarrow R^2\,,$$

které je dvakrát spojitě diferencovatelné na každém intervalu $\langle t_j, t_{j+1}\rangle$ (v krajních bodech diferencovatelné zprava resp. zleva), přičemž $\omega(t_o) = \omega(t_{q+1})$ a $\omega(t) \neq \omega(t')$ pro všechna $t, t' \in \langle t_o, t_{q+1})$, $t \neq t'$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že tečný vektor $\dot\omega(t) = \left(\frac{d\,\omega_1(t)}{dt}, \frac{d\,\omega_2(t)}{dt}\right)$ ke křivce ω v bodě $\omega(t)$, $t \neq t_j$, $j=0,\dots,q+1$, má jednotkovou délku, tj. $|\dot\omega(t)| = 1$. Dále $n(t)$ bude značit vektor normály $(-\dot\omega_2(t), \dot\omega_1(t))$ v bodě $\omega(t)$, tedy jeho směr je volen tak, abychom jej obdrželi pootočením tečného vektoru $\dot{\alpha}(t)$ o pravý úhel v kladném smyslu. Podobně budeme v bodech $\alpha(t)$, $t = t_j$ s $j=0,\dots,q+1$, uvažovat tečné vektory $\dot{\alpha}^+(t)$, $\dot{\alpha}^-(t)$ a normálové vektory $n^+(t)$, $n^-(t)$ zprava resp. zleva. Dále bude užitečné položit

$$\dot{\alpha}^-(t_o) = \dot{\alpha}^-(t_{q+1}), \quad \dot{\alpha}^+(t_{q+1}) = \dot{\alpha}^+(t_o),$$

$$n^-(t_o) = n^-(t_{q+1}), \quad n^+(t_o) = n^+(t_{q+1}).$$

Stejně tak budeme podle potřeby intervaly $\langle t_o-\delta, t_o\rangle$, $\langle t_{q+1}, t_{q+1}+\delta\rangle$ nahrazovat intervalem $\langle t_{q+1}-\delta, t_{q+1}\rangle$ resp. $\langle t_o, t_o+\delta\rangle$. Pro křivost $\varkappa(t)$ křivky α v bodě $t \neq t_j$ platí

$$\varkappa(t) = \ddot{\alpha}(t).n(t) ,$$

tedy $\varkappa$ je spojitá omezená funkce (symbol . značí skalární součin). Obdobně v bodech $t = t_j$ budeme uvažovat křivosti $\varkappa^+(t_j)$, $\varkappa^-(t_j)$ zprava resp. zleva. Pokud nebude hrozit nedorozumění, nebudeme v dalším pro bod $t = t_j$ zdůrazňovat, že uvažujeme veličiny zprava nebo zleva a znaky +,- budeme vynechávat. Vztah (3.2) v případě křivky je znám jako Frenetova formule

$$\dot{n}(t) = -\varkappa(t)\,\dot{\alpha}(t) .$$

(V bodě $t = t_j$ podle dohody vynecháváme znaky + a - .)

3.3.2. Oblast s konvexními rohy

Přistupme nyní k popisu oblasti, pro kterou budeme v kapitole 10 vyšetřovat Neumannův problém.

Nechť $\Omega \subset R^2$ je omezená oblast, jejíž hranici můžeme psát ve tvaru

$$\partial\Omega = \bigcup_{i=0}^{r} [\alpha_i] ,$$

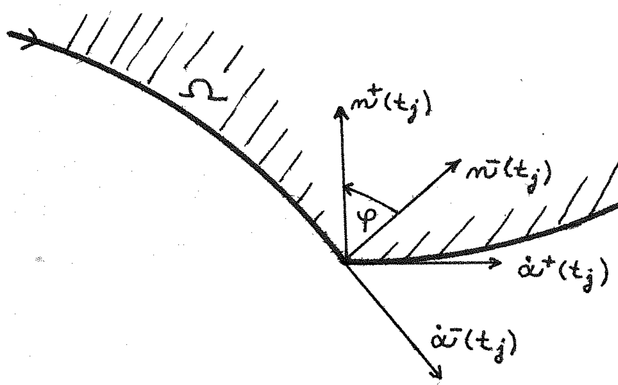
kde $[\alpha_i]$ značí geometrický obraz $\alpha_i(\langle t_{i,o}, t_{i,q+1}\rangle)$

křivky α_i, $i=0,\ldots,r$. Přitom tyto křivky

$$\alpha_i : \bigcup_{j=0}^{q_i} \langle t_{i,j}, t_{i,j+1} \rangle \longrightarrow R^2 \ , \ i=0,\ldots,r \ ,$$

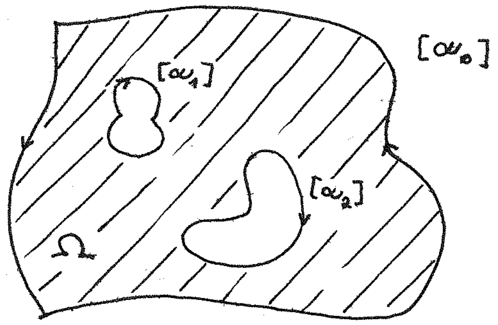
budou prosté uzavřené a po částech třídy $\mathcal{C}^2$ s vlastností $[\alpha_i] \cap [\alpha_j] = \emptyset$ pro $i \neq j$. Můžeme dále předpokládat, že α_i jsou orientované tak, aby $n_i(t)$ byl vektor vnitřní normály oblasti Ω v bodě hranice $\alpha_i(t)$.

Dále budeme předpokládat, že v bodech $\alpha_i(t_{i,j})$ ($i=0,\ldots,r$, $j=0,\ldots,q_{i+1}$) vektor $n_i^+(t_{i,j})$ dostaneme otočením vektoru $n_i^-(t_{i,j})$ o úhel $\varphi \in \langle 0, \pi)$ v kladném smyslu (viz obr. č.5). Tato podmínka zaručuje, že $n_i^-(t_{i,j}) \neq -n_i^+(t_{i,j})$ a že tedy oblast Ω je lipschitzovská (v odstavci 10.4.5 je zmínka o obecnějších oblastech, pro které tuto nerovnost nevyžadujeme). Rovněž vylučuje takové oblasti, které by v okolí bodu $\alpha_i(t_{i,j})$ tvořily "zobecněný kužel" s úhlem při vrcholu větším než π.



Obr. č.5

Příklad přípustné oblasti Ω je znázorněn na obrázku č.6.



Obr. č.6

3.3.3. Další popis oblasti

Označme
$$M_i = \{ x \in \bar{\Omega} ;\ \mathrm{dist}(x, [\alpha_i]) \leq \omega \}$$
množinu těch bodů z $\bar{\Omega}$, jejichž vzdálenost od části hranice $[\alpha_i]$ je nejvýše ω. Vezmeme $\omega > 0$ dostatečně malé tak, aby platilo $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro $i \neq j$ a aby

$$\omega < \inf_{\substack{i=0,\dots,r \\ t \in \langle t_{i,o}, t_{i,q+1} \rangle}} \frac{1}{|\varkappa_i(t)|} .$$

Označme dále
$$\sigma_{i,j} = \{ x \in R^2 ;\ x = \alpha_i(t) + s\, n_i(t),\ t \in \langle t_{i,j}, t_{i,j+1} \rangle ,\ s \in \langle 0, \omega \rangle \}$$

a položme
$$\sigma_{i,-1} = \sigma_{i,q_i} .$$

Podobně jako v odstavci 3.2.1 má každý prvek $x \in \sigma_{i,j}$ jednoznačné vyjádření pomocí křivočarých souřadnic $t \in \langle t_{i,j}, t_{i,j+1} \rangle$, $s \in \langle 0, \omega \rangle$, tedy platí-li pro nějaká $t, u \in \langle t_{i,j}, t_{i,j+1} \rangle$ a $s, v \in \langle 0, \omega \rangle$
$$x = \alpha_i(t) + s\, n_i(t) = \alpha_i(u) + v\, n_i(u) ,$$

potom nutně $t = u$ a $s = v$. Přitom vzdálenost bodu x od části hranice $\alpha_i[\langle t_{i,j}, t_{i,j+1} \rangle]$ je rovna jeho vzdálenosti od bodu $\alpha_i(t)$, tedy číslu s.

Obecně ovšem nemůžeme tvrdit, že každý prvek $x \in M_i$ má jednoznačné vyjádření ve tvaru $\alpha_i(t) + s\, n_i(t)$. Potíže nastávají v okolí bodů $\alpha_i(t_{i,j})$, jestliže $n_i^-(t_{i,j}) \neq n_i^+(t_{i,j})$. Zabývejme se proto tímto případem podrobněji a uvažujme křivky $\beta^+_{i,j}$, $\beta^-_{i,j}$ dané předpisem

$$\beta^{+}_{i,j}(t) = \alpha_i(t) + R^{+}_{i,j}(t)\, n_i(t)\ , \quad t \in \langle t_{i,j}, t_{i,j}+\delta^{+}_{i,j}\rangle\ ,$$

$$\beta^{-}_{i,j}(u) = \alpha_i(u) + R^{-}_{i,j}(u)\, n_i(u)\ , \quad u \in \langle t_{i,j}-\delta^{-}_{i,j},\ t_{i,j}\rangle\ .$$

Zde funkce $R^{+}_{i,j}$ a $R^{-}_{i,j}$ jsou voleny tak, aby geometrické obrazy těchto křivek byly totožné,tj.

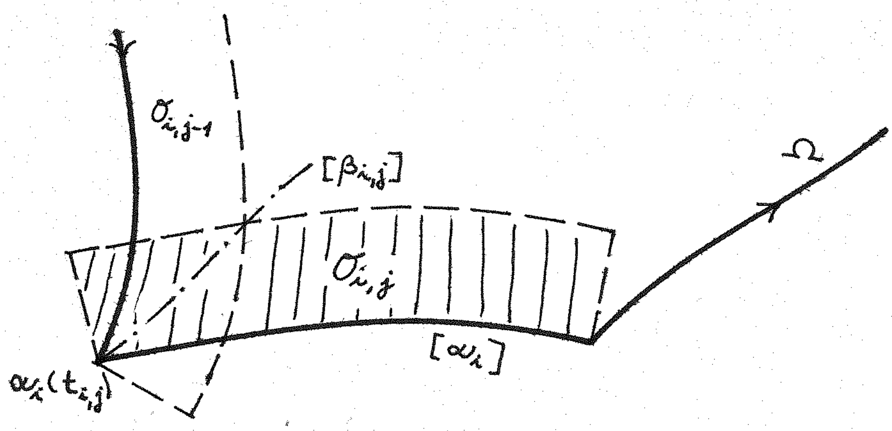
$$[\beta^{+}_{i,j}] = [\beta^{-}_{i,j}] = [\beta_{i,j}] =$$

$$= \{ x \in \mathcal{O}_{i,j} \cap \mathcal{O}_{i,j-1};\ \mathrm{dist}(x, \alpha_i[\langle t_{i,j-1}, t_{i,j}\rangle]) =$$

$$= \mathrm{dist}(x, \alpha_i[\langle t_{i,j}, t_{i,j+1}\rangle]) \ .$$

(Přitom je ovšem podstatné, že vektory $n^{-}_{i}(t_{i,j})$, $n^{+}_{i}(t_{i,j})$ svírají úhel menší než π, v důsledku čehož jsou $R^{+}_{i,j}$, $R^{-}_{i,j}$ funkce a nikoliv mnohoznačná zobrazení.)

Obr. č.7



V bodech t,u, pro které $\beta^{+}_{i,j}(t) = \beta^{-}_{i,j}(u)$ máme $R^{+}_{i,j}(t) = R^{-}_{i,j}(u) = R$. Budeme-li nyní chápat u a R jako funkce proměnné t dané rovností

$$\alpha_i(t) + R\, n_i(t) = \alpha_i(u) + R\, n_i(u)\ ,$$

pak z věty o implicitních funkcích je pro vhodné $\delta^+_{i,j} > 0$ funkce

$$t \longrightarrow R(t) = R^+_{i,j}(t) \ , \ t \in \langle t_{i,j}, t_{i,j} + \delta^+_{i,j} \rangle$$

spojitě diferencovatelná (v bodě $t_{i,j}$ diferencovatelná zprava). Podobně je spojitě diferencovatelná funkce

$$u \longrightarrow R^-_{i,j}(u) \ , \ u \in \langle t_{i,j} - \delta^-_{i,j}, t_{i,j} \rangle \ .$$

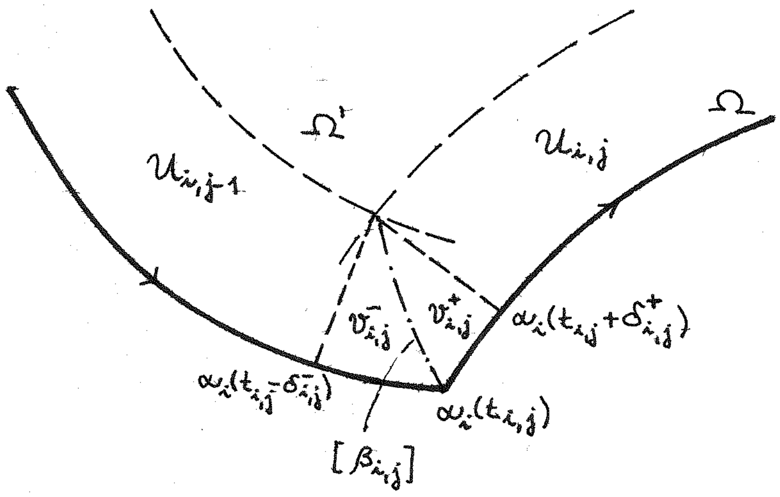
Dále zřejmě existují konstanty $\lambda, c > 0$ takové, že platí

$$\lambda \leqq \dot{R}^+(t_{i,j}) \leqq c \ , \tag{3.8}$$

neboť tečné vektory křivek $\alpha_i(t)$ a $\alpha_i(t) + R(t)\, n_i(t)$ v bodě $\alpha_i(t_{i,j})$ svírají nějaký úhel $\varphi \in (0, \pi/2)$. V odstavci 10.4.5 budeme pouze předpokládat, aby $\lambda \geqq 0$, $c > 0$.

Označme konečně (viz obrázek č.8)

Obr. č.8



$$\vartheta^+_{i,j} = \{ x \in \mathcal{O}_{i,j};\ x = \alpha_i(t) + s n_i(t),\ t \in \langle t_{i,j}, t_{i,j} + \delta^+_{i,j} \rangle ,$$
$$s \in \langle 0, R^+_{i,j}(t) \rangle \} \quad ,$$

$$\vartheta^-_{i,j} = \{ x \in \mathcal{O}_{i,j-1};\ x = \alpha_i(u) + v n_i(u),\ u \in \langle t_{i,j} - \delta^-_{i,j}, t_{i,j} \rangle ,$$
$$v \in \langle 0, R^-_{i,j}(u) \rangle \} \quad ,$$

$$\mathcal{U}_{i,j} = \left\{ x \in \sigma_{i,j};\ x = \alpha_i(t) + sn_i(t),\ t \in \langle t_{i,j} + \delta^+_{i,j}, t_{i,j+1} - \delta^-_{i,j+1} \rangle \right\}.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme pro ω dostatečně malé předpokládat, že je splněna rovnost

$$R^+_{i,j}(t_{i,j} + \delta^+_{i,j}) = R^-_{i,j}(t_{i,j} - \delta^-_{i,j}) = \omega\ ,\quad i=0,\dots,r,\ j=0,\dots,q_i\ .$$

V případě, že $n^-_i(t_{i,j}) = n^+_i(t_{i,j})$, položíme $\delta^+_{i,j} = \delta^-_{i,j} = 0$ a $\vartheta^+_{i,j} = \vartheta^-_{i,j} = \emptyset$. Potom zřejmě platí

$$M_i = \bigcup_{j=0}^{n_i} (\mathcal{U}_{i,j} \cup \vartheta^-_{i,j} \cup \vartheta^+_{i,j})\ .$$

Pro zjednodušení zápisu ještě označme $\Omega' = \Omega \setminus \bigcup_{i=0}^{r} M_i$,

$T_{i,j} = t_{i,j} + \delta^+_{i,j}$, $P_{i,j} = t_{i,j} - \delta^-_{i,j}$.

3.3.4. Derivace podle křivočarých souřadnic

Jako zvláštní případ obdržíme z lemmatu 3.1 rovnost

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{1}{(1-s\varkappa(t))^2}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s} \tag{3.9}$$

a navíc řešením rovnic (3.7) v bodě $x = \alpha(t) + sn(t)$ dostaneme vztah mezi parciálními derivacemi podle složek pravoúhlého souřadnicového systému a podle zavedených křivočarých souřadnic:

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}(x) = b_{(0,1)}\frac{\partial z}{\partial t}(t,s) + c_{(0,1)}\frac{\partial z}{\partial s} + d_{(0,1)}z(t,s)\ ,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}(x) = b_{(1,0)}\frac{\partial z}{\partial t}(t,s) + c_{(1,0)}\frac{\partial z}{\partial s}(t,s) + d_{(1,0)} \cdot z(t,s), \tag{3.10}$$

$$z(x) = b_{(0,0)}\frac{\partial z}{\partial t}(t,s) + c_{(0,0)}\frac{\partial z}{\partial s}(t,s) + d_{(0,0)}z(t,s)\ ,$$

kde

$$b_{(1,0)} = \frac{n_2(t)}{1-s\,\varkappa(t)} , \quad b_{(0,1)} = \frac{-n_1(t)}{1-s\,\varkappa(t)} , \quad b_{(0,0)} = 0 ,$$

$$c_{(1,0)} = -\dot{\alpha}_2(t) , \quad c_{(0,1)} = \dot{\alpha}_1(t) , \quad c_{(0,0)} = 0 ,$$

$$d_{(1,0)} = 0 , \quad d_{(0,1)} = 0 , \quad d_{(0,0)} = 1$$

(zde indexy u písmen α a n značí na rozdíl od předchozího složky vektoru) .

3.4. VLASTNOSTI VZDÁLENOSTI d_M

3.4.1. Ekvivalentní váhy

Při aplikaci váhových prostorů na řešení okrajových problémů je výhodné pracovat s dostatečně diferencovatelnými vahami. Vzdálenost d_M ne vždy tuto podmínku splňuje, jestliže uvažujeme rovnice vyšších řádů. Nicméně můžeme postupovat tak, že vezmeme funkci ϑ s ní ekvivalentní, tj. funkci splňující nerovnosti

$$c_1\, d_M(x) \leqq \vartheta(x) \leqq c_2\, d_M(x) ,$$

s $c_1, c_2 > 0$, která má pro sk. všechna $x \in \Omega$ omezené všechny derivace až do požadovaného řádu. Existence dokonce hladké funkce ϑ je dokázána např. v [27].

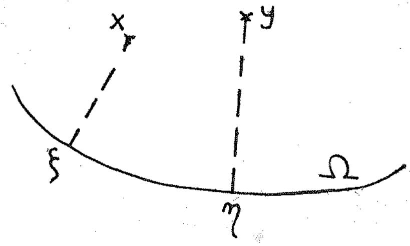
V práci se zabýváme pouze problémy, které obsahují operátory 2.řádu. V tomto případě stačí, když d_M bude sk. všude jednou diferencovatelná. Jak uvidíme v následujícím odstavci, tato vlastnost je splněna, je-li množina $M \subset \partial\Omega$ uzavřená. Protože jak pro obecnou funkci ϑ, tak pro funkci d_M lze v dalším postupovat naprosto analogicky, budeme dále pracovat pouze s touto vzdáleností d_M. V odhadech, které budeme provádět, se pak nevyskytnou další konstanty. Některé z nich budou proto nejlepší možné.

3.4.2. Diferencovatelnost vzdálenosti d_M

Dále budeme předpokládat, že M je uzavřená množina. Protože je rovněž omezená a funkce d_M je spojitá, pro x a y z Ω existují ξ a η z množiny M tak, že

$$d_M(x) = |x-\xi| \quad \text{a} \quad d_M(y) = |y-\eta| .$$

Obr. č.9



Z trojúhelníkové nerovnosti nyní máme

$$|x-\xi| \geqq |y-\xi| - |x-y|$$

a

$$|x-\eta| \leqq |y-\eta| + |x-y| .$$

Protože

$$|x-\eta| \geqq d_M(x) \quad \text{a} \quad |y-\xi| \geqq d_M(y) ,$$

obdržíme konečně

$$d_M(x) - d_M(y) \geqq -|x-y| \quad \text{a} \quad d_M(x) - d_M(y) \leqq |x-y| ,$$

tedy d_M je lipschitzovská funkce s konstantou lipschitzovskosti 1. Je proto diferencovatelná sk. všude a $|\nabla d_M(x)| \leqq 1$ pro sk. všechna $x \in \Omega$. (Lipschitzovskost implikuje absolutní spojitost po všech přímkách, z definice Beppo-Leviho prostorů pak plyne $d_M \in W^{1,\infty}(\Omega)$.)

Ukážeme ještě, že dokonce platí

$$(3.11) \qquad |\nabla d_M(x)| = 1 \quad \text{pro sk. všechna } x \in \Omega .$$

Především pro sk. všechna $x \in \Omega$ existuje právě jediné $\xi \in M$ tak, že $d_M(x) = |x-\xi|$. Kdyby totiž existovaly $\xi_1, \xi_2 \in M$ s touto vlastností, potom derivace funkce d_M ve směru $\xi_1 - x$ i $\xi_2 - x$ by byla rovna jedné. Totiž pro $t \geqq 0$

$$d_M(x+t(\xi_1-x)) = |\xi_1-(x+t(\xi_1-x))| = |1-t| \cdot |\xi_1-x| =$$

$$= |1-t| \, d_M(x) ,$$

a proto

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{d_M(x+t(\xi_1-x)) - d_M(x)}{t\,|\xi_1-x|} = 1 \quad ,$$

obdobně pro směr ξ_2-x. Protože směry ξ_1-x a ξ_2-x jsou různé, nutně $|\nabla d_M(x)| > 1$, což je spor s předchozím. Tvrzení (3.11) pak plyne z toho, že derivace funkce d_M v bodě x a ve směru $x-\xi$ je rovna jedné.

4. ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI VÁHOVÝCH PROSTORŮ

4.1. HUSTOTA HLADKÝCH FUNKCÍ

V tomto odstavci uvedeme některé výsledky o hustotě množiny hladkých funkcí v Sobolevových váhových prostorech, které budeme dále užívat. Tyto výsledky jsou i s důkazy a pro obecné typy vah uvedeny v [12].

Věta 4.1. Nechť Ω je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí a nechť $M = \partial\Omega$, $d_M(x) = d(x)$. Potom množina $C^\infty(\overline{\Omega})$ je hustá v prostoru $W^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$ pro $\varepsilon > -1$, tedy platí

$$W^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon) = \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}, \tag{4.1}$$

kde uzávěr množiny $C^\infty(\overline{\Omega})$ na pravé straně uvažujeme vzhledem k normě (1.2).

Poznámka. V případě $\varepsilon \geqq 0$ platí (4.1) i pro oblast se spojitou hranicí (viz [22]).

Věta 4.2. Nechť Ω je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí a nechť $M = \partial\Omega$, $d_M(x) = d(x)$. Potom pro $\varepsilon \leqq -1$ platí

$$W^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon) = W_0^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon) ,$$

tj. množina $C_0^\infty(\Omega)$ je hustá v prostoru $W^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$.

4.2. VĚTY O VNOŘENÍ

Všechna tvrzení uvedená v tomto odstavci je možné i s důkazy nalézt v [12] nebo [22]. Omezili jsme se přitom na výběr takových tvrzení, která jsou pro nás nezbytná a která budeme v práci dále užívat. (V [12] a [22] jsou ovšem další a mnohdy velmi pěkná zobecnění, která přesahují rámec této práce.)

4.2.1. Věty o vnoření v případě $M = \partial\Omega$

<u>Věta</u> 4.3. Nechť Ω je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, $M = \partial\Omega$, $d_M(x) = d(x)$, $p > 1$. Je-li $\varepsilon > p-1$, potom platí

$$W^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon) \hookrightarrow L_p(\Omega,d,\varepsilon-p) ,$$

tj.

$$|u|^p_{p,\varepsilon-p} \leq c\, \|u\|^p_{p,\varepsilon} \quad \text{pro každé } u \in W^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon) ,$$

kde konstanta $c = c(\Omega, \frac{p}{|\varepsilon-p+1|}) > 0$.

<u>Věta</u> 4.4. Nechť Ω je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, $M = \partial\Omega$, $d_M(x) = d(x)$, $p > 1$. Je-li $\varepsilon \neq p-1$, potom platí

$$W^{1,p}_o(\Omega,d,\varepsilon) \hookrightarrow L_p(\Omega,d,\varepsilon-p) ,$$

tj.

$$|u|^p_{p,\varepsilon-p} \leq c\, |||u|||^p_{p,\varepsilon} \quad \text{pro každé } u \in W^{1,p}_o(\Omega,d,\varepsilon) ,$$

kde konstanta $c = c(\Omega, \frac{p}{|\varepsilon-p+1|}) > 0$.

<u>Věta</u> 4.5. Nechť Ω je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, $M = \partial\Omega$, $d_M(x) = d(x)$, $p > 1$. Je-li $\varepsilon \leq p-1$, potom platí

$$W^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon) \hookrightarrow L_p(\Omega,d,-1+\omega)$$

s libovolným $\omega > 0$.

<u>Věta</u> 4.6. Nechť Ω je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí, $M = \partial\Omega$, $d_M(x) = d(x)$, $p > 1$. Nechť dále $\varepsilon > p-1$ resp. $\varepsilon \neq p-1$. Je-li $\varepsilon_1 > \varepsilon$, potom vnoření

$$W^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon) \hookrightarrow L_p(\Omega,d,\varepsilon_1-p)$$

resp.

$$W^{1,p}_o(\Omega,d,\varepsilon) \hookrightarrow L_p(\Omega,d,\varepsilon_1-p)$$

je kompaktní. (Tj. každá omezená množina v $W^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon)$ resp. v $W^{1,p}_o(\Omega,d,\varepsilon)$ je relativně kompaktní v prostoru $L_p(\Omega,d,\varepsilon_1-p)$.)

4.2.2. Věta o vnoření v případě $M = \{x_o\}$, $x_o \in \partial\Omega$

Věta 4.7. Nechť $\Omega \in \mathcal{R}^{0,1}(x_o)$ (definici $\mathcal{R}^{0,1}(x_o)$ viz odstavec 3.1), $x_o \in \partial\Omega$, $M = \{x_o\}$, $p > 1$. Jestliže $\varepsilon > p-N$, potom platí

$$W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon) \hookrightarrow L_p(\Omega, d_M, \varepsilon - p) .$$

4.2.3. Věta o vnoření v případě dim $M = m$

Rozumná omezení, která jsou potřebná klást na oblast Ω a část její hranice M, byla popsána v odstavci 3.1.3.

Věta 4.8. Nechť oblast $\Omega \subset R^N$ je třídy $Q^{0,1}(M)$ a nechť $M \subset \partial\Omega$ je varieta dimenze m, $p \geqq 1$.

(i) Jestliže $0 \leqq m \leqq N-1$, $\varepsilon \neq p+m-N$, potom platí

$$W_M^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon) \hookrightarrow L_p(\Omega, d_M, \varepsilon - p)$$

a existuje konstanta $c = c_1(\Omega, M) + p\,|\varepsilon - p - m + N|^{-1} c_2(\Omega, M, \varepsilon, p) > 0$ taková, že je splněna nerovnost

$$(4.2) \qquad |u|_{M,p,\varepsilon-p} \leqq c\, \|u\|_{M,p,\varepsilon}$$

pro všechna $u \in W_M^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$.

(ii) Jestliže $0 \leqq m < N-1$, $\varepsilon \in R$, potom existuje konstanta $c = c(\Omega, M, \varepsilon, p) > 0$ taková, že nerovnost (4.2) platí pro každé $u \in W_o^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$.

(iii) Jestliže $0 \leqq m \leqq N-1$, $\varepsilon > p+m-N$, potom platí

$$W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon) \hookrightarrow L_p(\Omega, d_M, \varepsilon - p)$$

a existuje taková konstanta $c = c_1(\Omega, M) + p\,|\varepsilon - p - m + N|^{-1} \cdot c_2(\Omega, M, \varepsilon, p) > 0$, že nerovnost (4.2) platí pro všechna $u \in W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$.

Zabývejme se podrobněji konstantou c z odhadu (4.2), a uvažujme proto, že $c = c(\Omega, M, \varepsilon, p)$ je funkce v proměnné ε. Z důkazu tvrzení (i) a (iii) (viz [25], [1]), která jsou založena na vhodném popisu hranice, a užitím Hardyho nerovnosti plyne, že funkci $c(\Omega, M, \cdot, p)$ lze vybrat tak, aby byla omezená a spojitá na libovolném omezeném intervalu.

V kapitole 7 nás bude ještě zajímat závislost konstanty $c(\Omega, M, \varepsilon, p)$ z části (ii) na ε, jestliže bude $p = 2$ a $N-m = 2$. V tomto případě je totiž $p+m-N = 0$ a nemůžeme proto užít tvrzení (i) nebo (ii) pro hodnoty ε z nějakého okolí nuly. Ukážeme dále, že pro všechna $\varepsilon \in R$ bude $c(\Omega, M, \varepsilon, 2) \leqq \mathrm{const} < < +\infty$.

Užitím vzájemně jednoznačného a lipschitzovského zobrazení T krychle $(0,1)^N$ a okolí nějaké části množiny M (viz odstavec 3.1.3) je tento problém převeden na odhad výrazu

$$\int_{(0,1)^N} \tilde{u}^2 \, d_{Q(N-2)}^{\varepsilon-2} \, dy ,$$

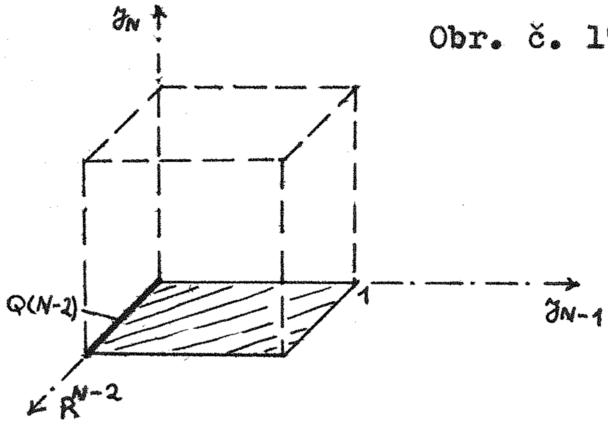
kde $\tilde{u}(y) = u(T^{-1}(y))$ pro $y \in (0,1)^N$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$\tilde{u}(y_1, \dots, y_{N-1}, 0) = 0 ,$$

$$Q(N-2) = \{ y \in (0,1)^N ;\ y_{N-1} = y_N = 0 \} ,$$

neboť $u \in W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ (viz obr. č. 10).

Obr. č. 10



Dále se můžeme omezit pouze na odhady v okolí množiny Q(N-2), stačí proto místo oblasti $(0,1)^N$ uvažovat množinu

$$K = (0,1)^N \cap \{ y \in R^N ;\ y_{N-1}^2 + y_N^2 < 1 \} ,$$

abychom odstranili nepříjemnosti související se zavedením polárních souřadnic r, φ v rovině $y_1 = \dots = y_{N-2} = 0$.

Konečně platí

$$|\tilde{u}(y_1,\dots,y_{N-2},r,\varphi)|^2 = \Big|\int_0^{\varphi} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\varphi}(y_1,\dots,y_{N-2},r,\xi)\,d\xi\Big|^2 \leqq$$

$$\leqq \varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\varphi}(y_1,\dots,y_{N-1},r,\xi)\Big|^2 d\xi$$

a dále

$$\int_K \tilde{u}^2\, d^{\varepsilon-2}_{Q(N-2)}\, dy \leqq \frac{\pi^2}{8} \int_{(0,1)^{N-2}} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big|\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\varphi}(y_1,\dots,y_{N-2},r,\xi)\Big|^2 .$$

$$.r^{\varepsilon-1}\, d\xi\, dr\, dy_1 \dots dy_{N-2} \leqq \frac{\pi^2}{8} \int_K |\nabla\tilde{u}(y)|^2\, d^{\varepsilon}_{Q(N-2)}(y)\, dy \ ,$$

neboť

$$\Big(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_{N-1}}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y_N}\Big)^2 = \Big(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\Big)^2 + \frac{1}{r^2}\Big(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\varphi}\Big)^2 .$$

Tento odhad nahrazuje úlohu Hardyho nerovnosti užitou v důkazech tvrzení (i) a (iii) věty 4.8.

4.2.4. Hardyho nerovnost v okolí hranice a pro konvexní oblast

Věty o vnoření poskytují odhady norem Lebesgueových váhových prostorů normami Sobolevových váhových prostorů. Konstanty v těchto odhadech závisí na geometrii oblasti Ω a obecně je nelze přesněji určit tak, aby byly nejlepší možné. V tomto odstavci ukážeme nejlepší možný odhad v případě konvexní oblasti a funkcí s nulovými stopami na její hranici. Rovněž nás budou zajímat odhady v "pásku" okolo hranice, které užíváme při vyšetřování nelineárního Dirichletova problému.

Existuje dostatečně veliké číslo n_0 a posloupnost $\{\Omega_n\}_{n>n_0}$ oblastí s lipschitzovskou hranicí taková, že jsou splněny inkluze

$$(4.3) \qquad \{x\in\Omega;\ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) > \frac{1+n^{-1}}{n}\} \subset \Omega_n \subset$$

$$\subset \{x\in\Omega;\ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) > \frac{1}{n}\} .$$

(Existence je zřejmá. Dokonce můžeme vybrat za Ω_n mnohostěny.)

Věta 4.9. Nechť $p>1$, $\varepsilon<p-1$. Potom existuje konstanta $c=c(\Omega,p)>0$ taková, že nerovnost

$$(4.4) \qquad \int_{\mathcal{O}} |u(x)|^p\, d^{\varepsilon-p}(x)\,dx \leq c\,\Big(\frac{p}{|\varepsilon-p+1|}\Big)^p \int_{\mathcal{O}} |\nabla u(x)|^p d^{\varepsilon}(x)dx$$

platí pro všechna $u\in W_0^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon)$, kde $\mathcal{O}\equiv\Omega$ nebo $\mathcal{O}\equiv\Omega\setminus\Omega_n$.
Navíc, je-li Ω konvexní, potom je $c=1$.

Důkaz. Aplikujeme-li stejně jako v důkazech vět o vnoření rozklad jednotky a Hardyho nerovnost (2.3), obdržíme (4.4) v případě $\mathcal{O}\equiv\Omega$ (viz např. [12],[22]). Bude-li $\mathcal{O}\equiv\Omega\setminus\Omega_n$, postupujeme analogicky s tím, že nerovnost (2.3) je splněna pro každý interval (a,b) s toutéž konstantou $[p/|\varepsilon-p+1|]^p$. (Tento výsledek je rovněž obsažen v odstavci 4.2.3, kdy uvažujeme prostory funkcí na množině $\Omega\setminus\Omega_n$ a váha i stopy funkcí jsou vztažené k množině $M=\partial\Omega$.)

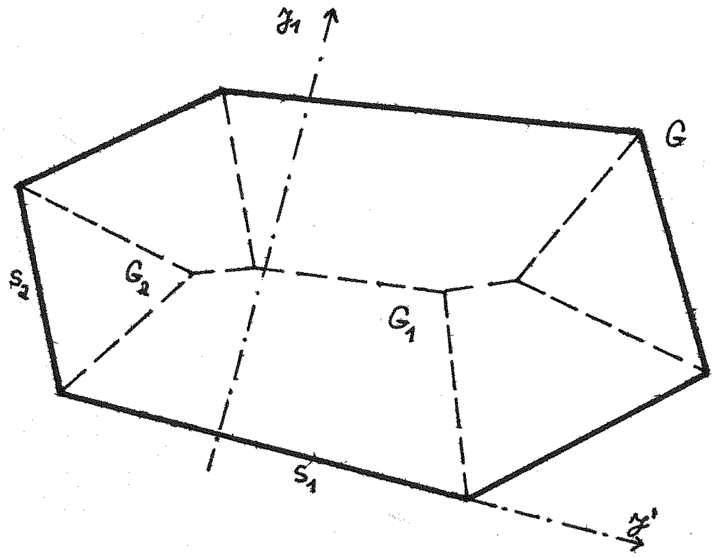
V dalším dokážeme ve dvou krocích nerovnost (4.4) pro $\mathcal{O}\equiv\Omega$, kde bude Ω konvexní. Důkaz pro $\mathcal{O}\equiv\Omega\setminus\Omega_n$ je obdobný a nebudeme jej proto rozepisovat.

První krok. Dokazujme nerovnost (4.4) pro $\mathcal{O}\equiv G$ a $u\in C_0^\infty(\mathrm{int}\ G)$, kde G je uzavřený konvexní mnohostěn. Nechť $s_1,\dots,s_n$ jsou stěny tohoto mnohostěnu. Rozložme nyní polyhedron G na uzavřené mnohostěny $G_1,\dots,G_n$ tak, že $x\in G$ je prvkem G_i, právě když $\mathrm{dist}(x,\partial G)=\mathrm{dist}(x,s_i)$. Tedy je

$G=\bigcup_{i=1}^{n} G_i$, $\mathrm{int}\ G_i\cap \mathrm{int}\ G_j=\emptyset$ pro $i\neq j$, a G_i obsahuje stěnu s_i (viz obr. č.11).

Nerovnost (4.4) stačí proto ukázat pouze pro $\mathcal{O}\equiv G_1$. Existuje ortogonální matice $A\in R^{N\times N}$, vektor $y_0\in R^N$ a souřadnicový systém y takový, že $y=Ax+y_0$, s_1 náleží do nadroviny $y_1 = 0$ a G_1 leží v poloprostoru $y_1 \geqq 0$.

Obr. č.11



Označme $y = (y_1, y') \in R \times R^{N-1}$, $Ps_1 = \{ y' \in R^{N-1};\ (0, y') \in s_1 \}$, $R(y') = \max \{ y_1;\ y = (y_1, y') \in G_1,\ y' \in Ps_1 \}$. Užitím Hardyho nerovnosti (2.3) odvodíme

$$\mathcal{J} = \int_{G_1} |u(x)|^p\, d_G^{\varepsilon-p}(x)\, dx = \int_{Ps_1} \int_0^{R(y')} |u(y_1, y')|^p\, y_1^{\varepsilon-p} dy_1 dy' \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{p}{|\varepsilon - p + 1|} \right)^p \int_{Ps_1} \int_0^{R(y')} \left| \frac{\partial u}{\partial y_1}(y_1, y') \right|^p y_1^{\varepsilon} dy_1 dy' \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{p}{|\varepsilon - p + 1|} \right)^p \int_{G_1} \left(\sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial y_i}(y_1, y') \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} y_1^{\varepsilon}\ dy_1\ dy' \ .$$

Protože A je ortonormální, dostáváme pro $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial y_i} \right|^2 \quad \text{v } G$$

a konečně

$$\mathcal{J} \leq \left(\frac{p}{|\varepsilon-p+1|} \right)^p \int_{G_1} |\nabla u(x)|^p \, d_G^{\varepsilon}(x) \, dx \, .$$

Druhý krok. Vzhledem k hustotě množiny funkcí $C_o^{\infty}(\Omega)$ v prostoru $W_o^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$ stačí nerovnost (4.4) dokázat pro libovolné $u \in C_o^{\infty}(\Omega)$. Protože takováto funkce u má kompaktní nosič v Ω, existuje pro každé dostatečně veliké přirozené číslo n konvexní mnohostěn $G^{(n)}$ s vlastnostmi

$$\operatorname{supp} u \subset G^{(n)} \subset \Omega, \quad \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \frac{1}{n} \text{ pro všechna } x \in \partial G^{(n)}.$$

Vzhledem k prvnímu kroku platí

$$\int_{G^{(n)}} |u(x)|^p \, d_{\partial G^{(n)}}^{\varepsilon-p}(x) \, dx \leq$$

$$\leq \left(\frac{p}{|\varepsilon-p+1|} \right)^p \int_{G^{(n)}} |\nabla u(x)|^p \, d_{\partial G^{(n)}}^{\varepsilon}(x) \, dx \, ,$$

kde můžeme položit $d_{\partial G^{(n)}}(x) = 0$ pro $x \in \Omega \setminus G^{(n)}$ a integrovat pak přes celé Ω místo přes množinu $G^{(n)}$. Protože dále $d_{\partial G^{(n)}} \leq d_{\partial\Omega}$ a $d_{\partial G^{(n)}}(x) \longrightarrow d_{\partial\Omega}(x)$ skoro všude v Ω, obdržíme pro $\sigma \equiv \Omega$ nerovnost (4.4) aplikací Lebesgueovy věty o konvergenci.

4.2.5. Ekvivalentnost norem

Nechť $M = \partial\Omega$, $d_M(x) = d(x)$. Pro $u \in W_o^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$ položme

$$|||u|||_{p,\varepsilon} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \, d^{\varepsilon}(x) \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \, ,$$

kde ∇ značí gradient, tj. $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$.

Věta 4.10. Nechť $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$, $p>1$ a $\varepsilon \neq p-1$. Potom $|||\cdot|||_{p,\varepsilon}$ je norma prostoru $W_o^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$ ekvivalentní s $\|\cdot\|_{p,\varepsilon}$, tj. existují konstanty $c_1, c_2 > 0$ takové, že platí

$$c_1 \|u\|_{p,\varepsilon} \leqq |||u|||_{p,\varepsilon} \leqq c_2 \|u\|_{p,\varepsilon}$$

pro každé $u \in W_o^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$.

Důkaz lze nalézt např. v [12]. V případě $\varepsilon < p-1$ plyne ihned z věty 4.9.

4.3. IZOMORFISMUS VÁHOVÝCH PROSTORŮ

4.3.1. Izomorfismus J

Lemma 4.11. Nechť $p \geqq 1$. Potom zobrazení J definované vztahem $J(u) = d_M^{\alpha} u$ je izometrický izomorfismus prostorů $L_p(\Omega, d_M, \varepsilon)$ a $L_p(\Omega, d_M, \varepsilon - \alpha p)$.

Důkaz. Pro každé $u \in L_p(\Omega, d_M, \varepsilon)$ platí

$$|d_M^{\alpha} u|_{M,p,\varepsilon-\alpha p} = |u|_{M,p,\varepsilon}$$

a pro každé $v \in L_p(\Omega, d_M, \varepsilon - \alpha p)$

$$|d_M^{-\alpha} v|_{M,p,\varepsilon} = |v|_{M,p,\varepsilon-\alpha p} .$$

Daleko důležitější pro nás bude izomorfismus Sobolevových váhových prostorů v případě $M = \partial\Omega$ a $d_M(x) = d(x)$, který využijeme především při vyšetřování nelineárního Dirichletova problému.

Lemma 4.12. Nechť $p>1$, $\varepsilon \neq p-1$. Potom zobrazení J definované vztahem $J(u) = d^{\alpha} u$ je izomorfismus prostorů $W_o^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$ a $W_o^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon - \alpha p)$ kdykoliv $\alpha \neq \frac{\varepsilon - p + 1}{p}$.

Důkaz. Zřejmě zobrazení J je prosté, lineární a dále spojité, neboť užitím věty 4.8 (tvrzení(i)) obdržíme

$$\|d^{\alpha}u\|^p_{p,\,\varepsilon-\alpha p} \leqq 2^{p-1} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p d^{\varepsilon}\,dx + 2^{p-1}|\alpha|^p N \int_{\Omega} |u|^p d^{\varepsilon-p} dx +$$

$$+ \int_{\Omega} |u|^p\, d^{\varepsilon}\, dx \leqq \mathrm{const}\,\|u\|^p_{p,\varepsilon}$$

(podle odstavce 3.4.2 platí $\left|\frac{\partial d}{\partial x_i}\right| \leqq 1$, $i=1,\dots,N$, sk. všude v Ω). Analogicky pro všechna $v \in W^{1,p}_{o}(\Omega, d, \varepsilon-\alpha p)$ platí

$$\|d^{-\alpha}v\|^p_{p,\varepsilon} \leqq 2^{p-1} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p d^{\varepsilon-\alpha p}\, dx +$$

$$+ 2^{p-1} N\, |\alpha|^p \int_{\Omega} |v|^p\, d^{\varepsilon-\alpha p-p}\, dx + \int_{\Omega} |v|^p\, d^{\varepsilon-\alpha p}\, dx \leqq$$

$$\leqq \mathrm{const}\, \|v\|^p_{p,\,\varepsilon-\alpha p} \quad ,$$

když $\varepsilon-\alpha p \neq p-1$. Tím je důkaz hotov.

Protože máme k dispozici věty o vnoření i pro obecnější váhy d^{ε}_{M}, dokážeme ještě

Lemma 4.13. (i) Nechť $p>1$, $0 \leqq m \leqq N-1$. Jestliže $\varepsilon \neq p+m-N$ a $\alpha \neq \frac{\varepsilon-p-m+N}{p}$, potom zobrazení J definované vztahem $J(u) = d^{\alpha}_{M}\,u$ je izomorfismus prostorů $W^{1,p}_{M}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ a $W^{1,p}_{M}(\Omega, d_M, \varepsilon-\alpha p)$, resp. izomorfismus prostorů $W^{1,p}_{o}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ a $W^{1,p}_{o}(\Omega, d_M, \varepsilon-\alpha p)$.

(ii) Nechť $p>1$, $0 \leqq m < N-1$. Potom zobrazení J, $J(u) = d^{\alpha}_{M}\,u$, je izomorfismus prostorů $W^{1,p}_{o}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ a $W^{1,p}_{o}(\Omega, d_M, \varepsilon-\alpha p)$.

(iii) Nechť $p>1$, $0 \leqq m \leqq N-1$. Potom zobrazení J, $J(u) = d_M^{\alpha} u$, je izomorfismus prostorů $W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ a $W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon - \alpha p)$, jestliže $\varepsilon > p(1+\alpha)+m-N$ pro $\alpha \geqq 0$ nebo $\varepsilon > p+m-N$ pro $\alpha < 0$.

<u>Důkaz</u>. V případě (i) obdržíme užitím tvrzení (i) věty 4.8 pro $\varepsilon \neq p+m-N$

$$\|d_M^{\alpha} u\|^p_{M,p,\varepsilon-\alpha p} \leqq 2^{p-1}\Big[\|u\|^p_{M,p,\varepsilon} + N|\alpha|^p \int_\Omega |u|^p d_M^{\varepsilon-p}\, dx\Big] \leqq$$

$$\leqq \text{const } \|u\|^p_{M,p,\varepsilon}$$

a pro $\varepsilon - \alpha p \neq p+m-N$

$$\|d_M^{-\alpha} v\|^p_{M,p,\varepsilon} \leqq 2^{p-1}\Big[\|v\|^p_{M,p,\varepsilon-\alpha p} + N|\alpha|^p \int_\Omega |v|^p \cdot d_M^{\varepsilon-\alpha p-p}\, dx\Big] \leqq$$

$$\leqq \text{const } \|v\|^p_{M,p,\varepsilon-\alpha p},$$

přičemž tyto odhady platí jak pro funkce $u \in W_M^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$, $v \in W_M^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon - \alpha p)$, tak pro funkce $u \in W_0^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$, $v \in W_0^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon - \alpha p)$.

V případě (ii) lze postupovat stejně a můžeme užít tvrzení (ii) věty 4.8 o vnoření.

Nakonec dokážeme část (iii). Podobně jako v důkazu bodu (i) potřebujeme, aby platilo

$$W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon) \hookrightarrow L_p(\Omega, d_M, \varepsilon - p)$$

a

$$W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon - \alpha p) \hookrightarrow L_p(\Omega, d_M, \varepsilon - \alpha p - p).$$

Z tvrzení (iii) věty 4.8 tedy plynou omezení

$$p+m-N < \varepsilon \quad \text{a} \quad \varepsilon - \alpha p > p+m-N.$$

4.3.2. Němyckého operátory

Definice. Řekneme, že funkce $h: \Omega \times R^s \longrightarrow R$ splňuje Carathéodoryho podmínky, jestliže restrikce

$$h(\cdot , \xi_1, \dots, \xi_s) : \Omega \longrightarrow R$$

je měřitelná pro všechna $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s) \in R^s$ a jestliže restrikce

$$h(x, \cdot) : R^s \longrightarrow R$$

je spojitá v ξ pro skoro všechna $x \in \Omega$.

Lemma 4.14. Nechť funkce $h: \Omega \times R^s \longrightarrow R$ splňuje Carathéodoryho podmínky a nechť příslušný Němyckého operátor

$$H: (u_1, \dots, u_s) \longrightarrow h(x, u_1, \dots, u_s)$$

je zobrazením prostoru $\prod_{i=1}^{s} L_{p_i}(\Omega, d_M, \varepsilon_i)$ do prostoru $L_q(\Omega, d_M, \varepsilon)$, $1 \leq p_i, q < \infty$. Potom operátor

$$H: \prod_{i=1}^{s} L_{p_i}(\Omega, d_M, \varepsilon_i) \longrightarrow L_q(\Omega, d_M, \varepsilon)$$

je spojitý.

Důkaz. Protože $J : L_q(\Omega) \longrightarrow L_q(\Omega, d_M, \varepsilon)$, $J(u) = d_M^{-\frac{\varepsilon}{q}} u$,

$J_i : L_{p_i}(\Omega) \longrightarrow L_{p_i}(\Omega, d_M, \varepsilon_i)$, $J_i(u) = d_M^{-\varepsilon_i/p_i} u$, $i=1, \dots, s$,

jsou izomorfismy, zobrazení

$$(\psi_1, \dots, \psi_s) \longrightarrow J^{-1} h(x, J_1 \psi_1, \dots, J_s \psi_s)$$

je Němyckého operátor prostoru $\prod_{i=1}^{s} L_{p_i}(\Omega)$ do $L_q(\Omega)$ a je proto spojité (viz např. [30]). Tudíž vyšetřovaný operátor

$$H: (J_1 \psi_1, \dots, J_s \psi_s) \longrightarrow h(x, J_1 \psi_1, \dots, J_s \psi_s)$$

je rovněž spojitý, jestliže jej chápeme jako zobrazení váhového prostoru $\prod_{i=1}^{s} L_{p_i}(\Omega, d_M, \varepsilon_i)$ do váhového prostoru $L_q(\Omega, d_M, \varepsilon)$.

Poznámka. Vlastnosti Němyckého operátoru pro ještě obecnější typ vah je možné nalézt v [16].

4.4. VĚTY O STOPÁCH

Věty o stopách na hranici nejsou pro váhy d_M^ε s obecnější varietou M podrobněji rozpracovány. Všimněme si proto jen některých speciálních případů, s kterými se setkáme v dalších kapitolách.

4.4.1. Případ $M = \partial\Omega$

Pro váhy mocninného typu, které zde uvažujeme, platí pro $|\varepsilon| \geqq 1$ rovnost $W^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon) = \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)$. Přitom pro $\varepsilon \leqq -1$ mají funkce z prostoru $W^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)$ nulovou stopu na hranici $\partial\Omega$ (viz např. [12],[22]). Naopak pro $\varepsilon \geqq 1$ funkce z tohoto prostoru nemusí stopu zanechávat (viz opět [12],[22]).

Věta 4.15. Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí a $\varepsilon \in (-1,1)$. Potom platí

$$W^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon) \hookrightarrow L_2(\partial\Omega) .$$

Je-li $p > 1$ a $\varepsilon \in (-1, p-1)$, potom je

$$W^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon) \hookrightarrow L_p(\partial\Omega) .$$

Důkaz je uveden v [22](Chap.6, §2.) pro $0 \leqq \varepsilon < p-1$. Protože však množina funkcí $C^\infty(\overline{\Omega})$ je hustá v $W^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$ pro $\varepsilon > -1$, lze tento důkaz aplikovat pro všechna $\varepsilon \in (-1, p-1)$.

4.4.2. Případ $M = \{x_o\}$, $x_o \in \partial\Omega$

Věta 4.16. Nechť Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí, $M = \{x_o\}$, $x_o \in \partial\Omega$, $p > 1$. Je-li $\varepsilon \geqq 0$, $\varepsilon > p-N$, potom platí

$$W^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon) \hookrightarrow L_p(\partial\Omega, d_M, \varepsilon - p + 1) .$$

Důkaz je uveden v [22]. Omezení $\varepsilon \geqq 0$ souvisí opět s hustotou množiny funkcí $C^\infty(\overline{\Omega})$ v uvažovaném prostoru.

5. METODA PSEUDOMONOTONNÍCH OPERÁTORŮ

5.1. METODA PSEUDOMONOTONNÍCH OPERÁTORŮ PRO JEDNU POSLOUPNOST

Při vyšetřování nelineárního Dirichletova problému nelze užít obvyklého postupu s pseudomonotonními operátory. Nicméně lze aplikovat jisté zjemnění této metody, které v abstraktní formě dále popíšeme.

Budeme vyšetřovat řešitelnost operátorové rovnice

(5.1) $\qquad Su = g\,,$

kde S bude nelineární operátor z reflexivního (reálného) Banachova prostoru V do duálu V^* a kde $g \in V^*$.

Nechť V_m, $m \in \mathbb{N}$, jsou uzavřené podprostory prostoru V takové, že $V_m \subset V_n$ pro $m \leqq n$ a že množina $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_m$ je hustá ve V. Definujme prvek $g_m \in V_m^*$ vztahem $\langle g_m, v\rangle = \langle g, v\rangle$ pro všechna $v \in V_m$ a nechť S_m značí restrikci operátoru S na množinu V_m. Předpokládejme, že rovnice

$(5.1)_m$ $\qquad S_m u_m = g_m\,,\ m \in \mathbb{N},$

mají řešení $u_m \in V_m$ (tj. $\langle Su_m, v\rangle = \langle g, v\rangle$ pro každé $v \in V_m$), která splňují podmínku

(5.2) $$\begin{cases} u_m \longrightarrow u & \text{slabě ve } V\,, \\ S_m & \text{je slabě konvergentní ve } V^* \text{ (pro } m \longrightarrow \infty). \end{cases}$$

<u>Věta</u> 5.1. Nechť řešení u_m rovnice $(5.1)_m$ splňují podmínku (5.2) a nechť platí

(5.3) $$\liminf_{n\to+\infty} \langle Su_m, u_m - v\rangle \geqq \langle Su, u-v\rangle \quad \text{pro všechna } v \in V.$$

Potom u je řešením rovnice (5.1).

Důkaz. Protože $Su_m = S_m u_m = g_m$ na V_m, užitím (5.2) obdržíme $Su_m \longrightarrow g$ slabě ve V^*. Máme tedy $\langle Su_m, u_m \rangle = \langle g, u_m \rangle \longrightarrow \langle g, u \rangle$, což spolu s konvergencí $\langle Su_m, u \rangle \longrightarrow \langle g, u \rangle$ dává

$$(5.4) \qquad \langle Su_m, u_m - u \rangle \longrightarrow 0 .$$

Ze vztahů (5.5) a (5.4) konečně plyne

$$\liminf \langle Su_m, u-v \rangle \geqq \langle Su, u-v \rangle \quad \text{pro všechna} \quad v \in V ,$$

tudíž

$$\langle g, u-v \rangle \geqq \langle Su, u-v \rangle \quad \text{pro všechna} \quad v \in V.$$

Z této nerovnosti plyne $Su = g$.

Objasníme nyní rozdíl od metody pseudomonotonních operátorů. Operátor S je pseudomonotonní, jestliže pro každou posloupnost $\{u_m\}_m$ slabě konvergující k u (v prostoru V) platí nerovnost (5.3). V našem případě stačí, když operátor S splňuje (5.3) pouze pro jednu, ačkoliv speciální, posloupnost $\{u_m\}_m$.

5.2. MODIFIKOVANÉ LERAYOVY-LIONSOVY PODMÍNKY

Pro konkrétní operátor S je ověření podmínky (5.3) zpravidla nepohodlné a obtížné. Budeme proto postupovat analogicky jako při vyšetřování pseudomonotonie, kdy jsou na operátory kladeny silnější (tzv. Lerayovy-Lionsovy) podmínky (viz např. [19], Ch.2,§2). Přeformulujme tyto podmínky tak, aby v nich vystupovala pouze jediná slabě konvergentní posloupnost $\{u_m\}_m$, která je předmětem našich úvah.

Předpokládejme, že operátor S můžeme psát ve tvaru $Sv = S(v,v)$, kde zobrazení

$$(w,v) \longrightarrow S(w,v)$$

je zobrazením prostoru $V \times V$ do V^* a které splňuje následující podmínky (u_m zde značí řešení rovnice $(5.1)_m$ mající vlastnost (5.2)):

(5.5) Pro libovolné $w \in V$ je $v \longrightarrow S(w,v)$ omezený hemispojitý operátor z V do V^* (tj. pro všechna $u,h \in V$ a pro libovolnou posloupnost $\{t_n\}_n$, $t_n \longrightarrow 0$, konverguje $S(w,u+t_n h) \longrightarrow S(w,u)$ slabě ve V^*) splňující nerovnost

$$\langle S(w,w) - S(w,v), w-v \rangle \geqq 0$$

pro každé $v \in V$.

(5.6) Pro libovolné $v \in V$ je $w \longrightarrow S(w,v)$ omezený hemispojitý operátor z V do V^*.

(5.7) Jestliže

$$\lim_{m \to +\infty} \langle S(u_m,u_m) - S(u_m,u), u_m-u \rangle = 0 ,$$

potom existuje podposloupnost $\{u_{m_k}\}_k \subset \{u_m\}_m$, pro kterou

$$S(u_{m_k},v) \longrightarrow S(u,v) \quad \text{slabě ve } V^*$$

kdykoliv $v \in V$.

(5.8) Jestliže $S(u_m,v) \longrightarrow \psi$ slabě ve V^*, potom

$$\lim_{m \to +\infty} \langle S(u_m,v),u_m \rangle = \langle \psi,u \rangle .$$

<u>Lemma</u> 5.2. Nechť $u_m \in V_m$, $m \in \mathbb{N}$, jsou taková řešení rovnic $(5.1)_m$ s operátorem S, že jsou splněny podmínky (5.2) a (5.5)--(5.8). Potom existuje podposloupnost $\{u_{m_k}\}_k$, pro kterou platí

$$\liminf_{k \to +\infty} \langle Su_{m_k}, u_{m_k}-v \rangle \geqq \langle Su,u-v \rangle$$

kdykoliv $v \in V$.

<u>Důkaz</u>. Připomeňme, že z podmínky (5.2) plyne $\langle S(u_m,u_m),u_m-u \rangle \longrightarrow 0$ (viz(5.4)). Protože posloupnost $\{S(u_m,u)\}_m$ je omezená ve V^*, můžeme vybrat takovou podposloupnost $\{m_k\}_k$, že $S(u_{m_k},u) \longrightarrow \varphi$ slabě ve V^*. Užijeme-li nyní podmínku (5.8), obdržíme $\langle S(u_{m_k},u),u_{m_k} \rangle \longrightarrow \langle \varphi,u \rangle$,

tedy $\langle S(u_{m_k},u),u_{m_k}-u\rangle \longrightarrow 0$.

Vezmeme-li v úvahu tuto a dříve odvozenou konvergenci $\langle S(u_{m_k},u_{m_k}),u_{m_k}-u\rangle \longrightarrow 0$, máme zaručeno splnění předpokladů v podmínce (5.7). Pro vybranou podposloupnost (kterou i za cenu menší nepřesnosti budeme značit stejně) pak konverguje $S(u_{m_k},v) \longrightarrow S(u,v)$ slabě ve V^* pro všechna $v \in V$.

Aplikujeme-li opět podmínku (5.8), bude

$$\langle S(u_{m_k},v),u_{m_k}\rangle \longrightarrow \langle S(u,v),u\rangle$$

pro každé $v \in V$ a tedy

(5.9) $\quad \langle S(u_{m_k},v),u_{m_k}-u\rangle \longrightarrow 0 \quad$ pro všechna $v \in V$.

Vzhledem k (5.5) platí

$$\langle S(u_{m_k},u_{m_k}) - S(u_{m_k},w),u_{m_k}-w\rangle \geqq 0$$

pro všechna $w \in V$ a užitím substituce $w = (1-t)u + tv$, kde $t \in \langle 0,1\rangle$, v této nerovnosti dostaneme

$$t\langle S(u_{m_k},u_{m_k}),u-v\rangle \geqq -\langle S(u_{m_k},u_{m_k}),u_{m_k}-u\rangle +$$
$$+ \langle S(u_{m_k},w),u_{m_k}-u\rangle + t\langle S(u_{m_k},w),u-v\rangle \quad .$$

Nyní vezmeme v úvahu vztahy (5.4),(5.9), a protože $S(u_{m_k},w) \longrightarrow S(u,w)$ slabě ve V^*, získáme z poslední nerovnosti

$$\liminf \langle S(u_{m_k},u_{m_k}),u-v\rangle \geqq$$
$$\geqq \liminf \langle S(u_{m_k},w),u-v\rangle = \langle S(u,w),u-v\rangle \quad .$$

Opět užitím (5.4) můžeme psát

$$\liminf \langle S(u_{m_k},u_{m_k}),u_{m_k}-v\rangle \geqq \langle S(u,(1-t)u+tv), u-v\rangle \quad .$$

Konečně limitním přechodem $t \longrightarrow 0_+$ a aplikací podmínky (5.5) obdržíme požadovanou nerovnost.

Hlavní výsledek této abstraktní části zformulujme v následující větě.

<u>Věta</u> 5.3. Nechť jsou splněny předpoklady lemmatu 5.2. Potom u je řešením rovnice (5.1).

<u>Důkaz</u>. Podposloupnost $\{u_{m_k}\}_k$ z tvrzení lemmatu 5.2 splňuje podmínku (5.3). Tedy pro tuto podposloupnost jsou splněny všechny předpoklady věty 5.1.

6. ZOBECNĚNÉ LAXOVO-MILGRAMOVO LEMMA

Při vyšetřování slabých řešení lineárních okrajových problémů využíváme v celé práci následující zobecněné Laxovo-Milgramovo lemma, které spolu s důkazem je možné nalézt v [22].

Lemma 6.1. Nechť E a F jsou Hilbertovy prostory a nechť $a(\cdot,\cdot)$ je bilineární forma definovaná na prostoru $E \times F$. Nechť existují kladné konstanty m_1, m_2, m_3 takové, že

(i) pro všechna $u \in E$ a $v \in F$ platí

$$|a(u,v)| \leqq m_1 \|u\|_E \|v\|_F ,$$

(ii) pro všechna $u \in E$ platí

$$\sup_{\|v\|_F \leqq 1} a(u,v) \geqq m_2 \|u\|_E , \tag{6.1}$$

(iii) pro všechna $v \in F$ platí

$$\sup_{\|u\|_E \leqq 1} a(u,v) \geqq m_3 \|v\|_F . \tag{6.2}$$

Potom pro každý funkcionál $f \in F^*$ existuje právě jeden prvek $u \in E$ takový, že rovnost

$$a(u,v) = \langle f,v \rangle$$

platí pro všechna $v \in F$ a dále

$$\|u\|_E \leqq \frac{1}{\min(m_3,m_2)} \|f\|_{F^*} .$$

Ještě obecnější verze tohoto lemmatu pro Banachovy prostory je uvedena a dokázána v [26]. Ještě než ji vyslovíme, zavedeme pojem nedegenerovanosti bilineární formy.

<u>Definice</u>. Bilineární forma $a(.,.)$ je nedegenerovaná, jestliže lineární formy $a(u,.) \in F^*$, $a(.,v) \in E^*$ jsou nulové pouze pro nulové prvky $u = O_E$, $v = O_F$.

<u>Lemma</u> 6.2. Nechť E a F jsou Banachovy prostory, F je reflexivní a nechť $a(.,.)$ je omezená nedegenerovaná bilineární forma na prostoru $E \times F$.

(i) Jestliže každý omezený lineární funkcionál na F má jednoznačnou reprezentaci tvaru $f(v) = a(u,v)$ pro nějaké pevné $u \in E$, potom existují konstanty $m_1, m_2 > 0$ takové, že

$$(6.1) \qquad \sup_{\|v\|_F \leq 1} a(u,v) \geq m_1 \|u\|_E$$

platí pro všechna $u \in E$ a

$$(6.2) \qquad \sup_{\|u\|_E \leq 1} a(u,v) \geq m_2 \|v\|_F$$

platí pro všechna $v \in F$. Navíc prostor E je reflexivní.

(ii) Jestliže existuje konstanta $m_1 > 0$ taková, že nerovnost

$$\sup_{\|v\|_F \leq 1} a(u,v) \geq m_1 \|u\|_E$$

platí pro všechna $u \in E$, potom každé $f \in F$ resp. $g \in E$ má jednoznačnou reprezentaci tvaru $f(v) = a(u,v)$ pro nějaké $u \in E$ resp. tvaru $g(u) = a(u,v)$ pro nějaké $v \in F$. Dále E je reflexivní a existuje konstanta $m_2 > 0$ taková, že je splněna nerovnost

$$\sup_{\|u\|_E \leq 1} a(u,v) \geq m_2 \|v\|_F$$

pro všechna $v \in F$.

Poznamenejme, že jsou-li splněny nerovnosti (6.1) a (6.2), forma $a(.,.)$ je nedegenerovaná. V konkrétních aplikacích je naopak ověřování nedegenerovanosti bilineární formy prakticky převedeno na vyšetření nerovností (6.1) a (6.2). Proto v celé práci vystačíme s tvrzením lemmatu 6.1, pouze v odstavci 8.5.2 budeme potřebovat lemma 6.2.

Užitečné bude zavést pojem elipticity ve složkách, který budeme často užívat.

<u>Definice</u>. Řekneme, že spojitá bilineární forma a: $E \times F \longrightarrow R$ je eliptická v první složce resp. eliptická v druhé složce, jestliže je splněna nerovnost (6.1) resp. (6.2)

II. D I R I C H L E T Ů V P R O B L É M

7. DIRICHLETŮV PROBLÉM PRO LINEÁRNÍ OPERÁTOR

7.1. EXISTENCE A JEDNOZNAČNOST SLABÉHO ŘEŠENÍ

7.1.1. Formulace problému

Uvažujme (prozatím formálně) Dirichletův problém

$$(7.1)\quad \begin{cases} \sum\limits_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x)\, D^{\beta}u(x)) = f(x) \quad v\ \Omega, \\ u = \varphi \quad \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

kde α, β značí multiindexy a D^{α}, D^{β} příslušné diferenciální operátory.

Budeme předpokládat, že oblast Ω je omezená a s lipschitzovskou hranicí. Dále koeficienty rovnice $a_{\alpha\beta}$ budou splňovat podmínku

$$(7.2)\qquad d_M^{2-|\alpha|-|\beta|}\, a_{\alpha\beta} \in L_{\infty}(\Omega)$$

a rovnice z problému (7.1) bude eliptická v obvyklém smyslu, tj. pro diferenciální bilineární formu

$$a(u,v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}\, D^{\beta}u\, D^{\alpha}v\, dx$$

bude platit

$$(7.3)\qquad a(u,u) \geq \lambda \|u\|^2 \,, \quad \lambda > 0 \,,$$

pro každé $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ ($\|\cdot\| = \|\cdot\|_{2,0}$ značí normu prostoru $W^{1,2}(\Omega)$). Podmínka (7.3) je splněna např. tehdy, když platí

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} a_{\alpha\beta}(x)\, \xi_{\alpha}\xi_{\beta} \geq \lambda |\xi|^2$$

pro skoro všechna $x \in \Omega$ a všechna $\xi = (\xi_{(1,0,\dots,0)}, \dots , \xi_{(0,\dots,0,1)}, \xi_{(0,\dots,0)}) \in R^{N+1}$.

Pro pravé strany $f \in [W_o^{1,2}(\Omega)]^* = W^{-1,2}(\Omega)$ a $\varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ má pak problém (7.1), jak plyne z (obvyklého) Laxova-Milgramova lemmatu, právě jedno slabé řešení $u \in W^{1,2}(\Omega)$. To je však zvláštní případ obecnějšího problému, kdy pro pravé strany platí

$$f \in [W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^* \ , \quad \varphi \in W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$$

a kde pro uzavřenou varietu $M \subset \partial\Omega$ je $\dim M = m$. Tímto problémem se budeme dále zabývat. Předpokládejme proto v této části, že oblast Ω je třídy $Q^{0,1}(M)$ (viz odstavec 3.1.3).

<u>Definice</u>. Řekneme, že funkce $u \in W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ je slabým řešením problému (7.1), jestliže

$$u - \varphi \in W_o^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$$

a jestliže pro každé $v \in W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)$ platí rovnost

$$a(u,v) = \langle f,v \rangle \ .$$

(Vzhledem k hustotě množiny funkcí $C_o^\infty(\Omega)$ v $W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)$ můžeme uvažovat, že testovací funkce $v \in C_o^\infty(\Omega)$.)

Místo nehomogenní úlohy je ovšem výhodné pracovat s příslušným problémem homogenním. Položíme proto $w = u - \varphi$. Funkce u pak bude slabým řešením problému (7.1) právě tehdy, když bude platit

$$(7.4) \quad \begin{cases} w \in W_o^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon) \ , \\ a(w,v) = \langle \tilde{f}, v \rangle \quad \text{pro každé } v \in W_o^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon) \ , \end{cases}$$

kde $\langle \tilde{f}, v \rangle = \langle f,v \rangle + a(\varphi, v)$. Jak dále uvidíme, vlastnosti bilineární formy $a(.,.)$ (její spojitost ve vhodných váhových prostorech) zaručují, že $\tilde{f} \in [W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^*$.

Užitím Hölderovy nerovnosti a věty 4.8 o vnoření obdržíme pro $\varepsilon \neq 2+m-N$, $\varepsilon \neq N-2-m$ (podrobněji $\varepsilon \in R$ pro

$m < N-1$ a $\varepsilon \neq 1,-1$ pro $m = N-1$)

$$\left|\int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\beta u\, D^\alpha v\, dx\right| \leqq \left(\int_\Omega |a_{\alpha\beta}| d_M^{2-|\alpha|-|\beta|} |D^\beta u|^2 d_M^{\varepsilon+2|\beta|-2} dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_\Omega |a_{\alpha\beta}|\, d_M^{2-|\alpha|-|\beta|}\, |D^\alpha v|^2\, d_M^{-\varepsilon+2|\alpha|-2}\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqq$$

$$\leqq \text{const}\ \|u\|_{M,\varepsilon}\ \|v\|_{M,-\varepsilon}\ ,$$

tedy existuje konstanta $A > 0$ taková, že

$$|a(u,v)| \leqq A\, \|u\|_{M,\varepsilon}\, \|v\|_{M,-\varepsilon}$$

kdykoliv $u \in W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$, $v \in W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)$ (s přípustnou hodnotou ε). Bilineární forma

$$a:\ W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon) \times W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon) \longrightarrow R$$

je proto pro přípustné hodnoty ε omezená (spojitá). Protože tato forma je zobrazením kartézského součinu obecně různých prostorů, nabízí se jako prostředek vyšetřování existence a jednoznačnosti řešení problému (7.4) zobecněné Laxovo-Milgramovo lemma. Klíčovým bodem je proto elipticita příslušné bilineární formy v obou jejích složkách.

7.1.2. Elipticita

Zřejmě stačí ukázat elipticitu formy $a(.,.)$ v prvé složce, v případě druhé složky je postup stejný. Budeme proto ke každému $u \in W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ hledat takové $v \in W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)$, aby platilo

$$\|v\|_{M,-\varepsilon} \leqq c_1\, \|u\|_{M,\varepsilon}\ , \tag{7.5}$$

$$a(u,v) \geqq c_2\, \|u\|^2_{M,\varepsilon}\ , \tag{7.6}$$

kde konstanty $c_1, c_2 > 0$ nezávisí na funkci u a ani na funkci v.

Pro libovolné $u \in W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ položme $v = u d_M^\varepsilon$. Dostaneme (pro $\varepsilon \neq 0$)

$$\|v\|^2_{M,-\varepsilon} = \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial(ud^\varepsilon_M)}{\partial x_k} \right|^2 d_M^{-\varepsilon}\, dx + \int_\Omega (ud^\varepsilon_M)^2\, d_M^{-\varepsilon}\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 d^\varepsilon_M\, dx + \int_\Omega u^2 d^\varepsilon_M\, dx + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega u^2 \left| \frac{\partial d_M}{\partial x_k} \right|^2 .$$

$$. \, d_M^{\varepsilon-2}\, dx + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega u \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial d_M}{\partial x_k} d_M^{\varepsilon-1}\, dx \leqq$$

$$\leqq \|u\|^2_{M,\varepsilon} + \varepsilon^2 \int_\Omega u^2 d_M^{\varepsilon-2}\, dx + 2\varepsilon \int_\Omega |u| \Big(\sum_{k=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} .$$

$$. \Big(\sum_{k=1}^{N} \left| \frac{\partial d_M}{\partial x_k} \right|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} d_M^{\varepsilon-1}\, dx ,$$

kde jsme užili toho, že $|\nabla d_M| = 1$ skoro všude v Ω (viz odstavec 3.4), a nerovnosti (2.8). Užitím Hölderovy nerovnosti a věty 4.8 o vnoření máme konečně pro přípustná ε (pro $m = N-1$ musí být $\varepsilon \neq -1, 1$)

$$\|v\|^2_{M,-\varepsilon} \leqq \|u\|^2_{M,\varepsilon} (1 + \varepsilon^2 c^2) + 2\varepsilon \Big(\int_\Omega u^2 d_M^{\varepsilon-2}\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} .$$

$$. \Big(\sum_{k=1}^{N} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 d^\varepsilon_M\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \leqq (1 + 2\varepsilon c + \varepsilon^2 c^2) \|u\|^2_{M,\varepsilon} .$$

Zbývá dokázat nerovnost (7.6). Platí

$$a(u, ud^\varepsilon_M) = a(ud_M^{\frac{\varepsilon}{2}}, ud_M^{\frac{\varepsilon}{2}}) + B(\varepsilon) ,$$

kde

$$B(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ |\beta| \leqq 1}} \int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\beta u . u . D^\alpha d_M\, d_M^{\varepsilon-1}\, dx \; -$$

$$- \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\substack{|\alpha|\leq 1\\|\beta|=1}} \int_\Omega a_{\alpha\beta}\, u\, D^\beta u\, D^\alpha d_M\, d_M^{\varepsilon-1}\, dx -$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{4} \sum_{\substack{|\alpha|=1\\|\beta|=1}} \int_\Omega a_{\alpha\beta}\, u^2\, D^\alpha d_M\, D^\beta d_M\, d_M^{\varepsilon-2}\, dx \ .$$

<u>Lemma</u> 7.1. Nechť $\varepsilon \neq -1,1$, je-li $m = N-1$. Potom

$$(7.7) \qquad a(ud_M^{\frac{\varepsilon}{2}}, ud_M^{\frac{\varepsilon}{2}}) \geq \lambda\,(1 - |\varepsilon|\,c - \frac{\varepsilon^2}{4}\,c^2)\, \|u\|^2_{M,\varepsilon} \ .$$

<u>Důkaz</u>. Vzhledem k (7.3) obdržíme

$$a(ud_M^{\frac{\varepsilon}{2}}, ud_M^{\frac{\varepsilon}{2}}) \geq \lambda\, \|ud_M^{\frac{\varepsilon}{2}}\|^2 \ .$$

Dále užitím Hölderovy nerovnosti a vlastností váhy ($|\nabla d_M| = 1$ skoro všude v Ω)

$$\|ud_M^{\frac{\varepsilon}{2}}\|^2 = \sum_{k=1}^{N} \int_\Omega \Big[\Big|\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big|^2 d_M^\varepsilon + \varepsilon u\, \frac{\partial u}{\partial x_k}\, \frac{\partial d_M}{\partial x_k}\, d_M^{\varepsilon-1} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{4}\, u^2 \Big|\frac{\partial d_M}{\partial x_k}\Big|^2 d_M^{\varepsilon-2} \Big]\, dx + \int_\Omega u^2 d_M^\varepsilon\, dx \geq$$

$$\geq \|u\|^2_{M,\varepsilon} - |\varepsilon| \Big(\int_\Omega u^2 d_M^{\varepsilon-2}\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big|^2 d_M^\varepsilon\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} -$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{4} \int_\Omega u^2 d_M^{\varepsilon-2}\, dx \ .$$

Z věty o vnoření plyne ihned nerovnost (7.7)

<u>Lemma</u> 7.2. Nechť $\varepsilon \neq -1,1$, je-li $m = N-1$. Potom platí

$$|B(\varepsilon)| \leqq \left[|\varepsilon| c A_1 + |\varepsilon| c^2 A_2 + \frac{\varepsilon^2}{4} c^2 A_1 \right] \|u\|^2_{M,\varepsilon} ,$$

kde

$$A_1 = \Big(\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ |\beta|=1}} |a_{\alpha\beta}|^2_\infty \Big)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \Big[\Big(\sum_{|\alpha|=1} | d_M \, a_{\alpha,(0,\dots,0)}|^2_\infty \Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{|\beta|=1} | d_M \, a_{(0,\dots,0),\beta}|^2_\infty \Big)^{\frac{1}{2}} \Big] .$$

<u>Důkaz</u>. Vícenásobným užitím nerovnosti (2.8) můžeme psát

$$\Big| \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ |\beta|=1}} \int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\beta u \, u \, D^\alpha d_M \, d_M^{\varepsilon-1} \, dx \Big| \leqq$$

$$\leqq \sum_{|\beta|=1} \int_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|=1} |a_{\alpha\beta}|^2_\infty \Big)^{\frac{1}{2}} |u| \, |D^\beta u| \, d_M^{\varepsilon-1} \, dx \leqq$$

$$\leqq \Big(\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ |\beta|=1}} |a_{\alpha\beta}|^2_\infty \Big)^{\frac{1}{2}} \int_\Omega |u| \Big(\sum_{|\beta|=1} |D^\beta u|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} d_M^{\varepsilon-1} \, dx \leqq$$

$$\leqq \Big(\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ |\beta|=1}} |a_{\alpha\beta}|^2_\infty \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega u^2 d_M^{\varepsilon-2} \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{|\beta|=1} \int_\Omega |D^\beta u|^2 d_M^\varepsilon \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} .$$

Obdobně

$$\Big| \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ |\beta|=1}} \int_\Omega a_{\alpha\beta} u^2 D^\beta d_M \, D^\alpha d_M \, d_M^{\varepsilon-2} \, dx \Big| \leqq \Big(\sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ |\beta|=1}} |a_{\alpha\beta}|^2_\infty \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \int_\Omega u^2 d_M^{\varepsilon-2} \, dx$$

a

$$\left| \sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega a_{\alpha,(0,\dots,0)}\, u^2\, D^\alpha d_M\, d_M^{\varepsilon-1}\, dx \right| \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{|\alpha|=1} | d_M\, a_{\alpha,(0,\dots,0)}|_\infty^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \int_\Omega u^2 d_M^{\varepsilon-2}\, dx \quad .$$

Tedy

$$|B(\varepsilon)| \leq |\varepsilon| \Big(\sum_{\substack{|\alpha|=1\\|\beta|=1}} |a_{\alpha\beta}|_\infty^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_\Omega u^2 d_M^{\varepsilon-2}\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} .$$

$$\cdot \Big(\sum_{k=1}^N \int_\Omega \Big| \frac{\partial u}{\partial x_k} \Big|^2 d_M^\varepsilon\, dx \Big)^{\frac{1}{2}} + \frac{|\varepsilon|}{2} \Big[\Big(\sum_{|\alpha|=1} | d_M a_{\alpha,(0,\dots,0)}|_\infty^2 \Big)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \Big(\sum_{|\beta|=1} | d_M a_{(0,\dots,0),\beta}|_\infty^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big] \int_\Omega u^2 d_M^{\varepsilon-2}\, dx +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{4} \Big(\sum_{\substack{|\alpha|=1\\|\beta|=1}} |a_{\alpha\beta}|_\infty^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \int_\Omega u^2 d_M^{\varepsilon-2}\, dx \quad ,$$

což spolu s větou 4.8 dává požadovaný odhad.

Lemma 7.3. Nechť jsou splněny podmínky (7.2) a (7.3). Potom existuje interval I_1, $0 \in \operatorname{int} I_1$, takový, že bilineární forma $a(\cdot,\cdot)$ je eliptická v první složce kdykoliv $\varepsilon \in I_1$.

Důkaz. Vzhledem k vlastnostem konstanty c z věty 4.8 existuje interval I_1 (dostatečně malý a obsahující nulu) takový, že pro každé $\varepsilon \in I_1$ je výraz

$$\Big[\lambda \big(1 - |\varepsilon| c - \frac{\varepsilon^2}{4} c^2\big) - \big(|\varepsilon|\, cA_1 + |\varepsilon| c^2 A_2 + \frac{\varepsilon^2}{4} c^2 A_1 \big) \Big] =$$

$$= \Big[\lambda - |\varepsilon|\, c(\lambda + A_1 + cA_2) - \varepsilon^2 \frac{c^2}{4} (\lambda + A_1) \Big] \tag{7.8}$$

kladný, a je proto splněna nerovnost (7.6). Protože nerovnost (7.5) již byla dokázána dříve, lemma 7.3 je dokázané.

Abychom obdrželi pokud možno nejlepší odhady, nevyužívali jsme v tomto odstavci záměrně tvrzení věty 4.13 o izomorfismu váhových prostorů.

Analogicky při vyšetřování elipticity v druhé složce pokládáme $u = vd_M^{-\varepsilon}$, přičemž tato elipticita bude zaručena pro $-\varepsilon \in I_2$, $0 \in \text{int } I_2$.

7.1.3. Existence a jednoznačnost

Protože $W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ a $W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)$ jsou Hilbertovy prostory a protože pro dostatečně malá $|\varepsilon|$ splňuje bilineární forma

$$a: W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon) \times W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon) \longrightarrow R$$

předpoklady zobecněného Laxova-Milgramova lemmatu 6.1, je přímým důsledkem tohoto lemmatu následující věta.

<u>Věta</u> 7.4. Existuje interval $I = I_1 \cap (-I_2)$, $0 \in \text{int } I$, takový, že pro libovolné $\varepsilon \in I$ a pravé strany $f \in [W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^*$, $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ existuje právě jedno slabé řešení $u \in W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ problému (7.1). Navíc platí

$$\|u\|_{M,\varepsilon} \leqq \text{const} \left(\|f\|_{-1,-\varepsilon} + \|\varphi\|_{M,\varepsilon} \right) .$$

7.2. VELIKOST INTERVALU MOCNIN

Věta 7.1 zaručuje existenci intervalu I s danými vlastnostmi. Tento interval jsme obdrželi tak, že jsme vyšetřovali elipticitu bilineární formy a prováděli k tomu potřebné odhady. Jak ukážeme v odstavci 7.2.1, nezaručuje tato metoda maximalitu intervalu I. Nicméně pro některé speciální oblasti Ω a Laplaceův operátor jsou známy lepší výsledky. Na druhé straně ukážeme v odstavci 7.2.2, že pro každý sebemenší interval I lze nalézt oblast Ω a koeficienty $a_{\alpha\beta}$ problému (7.1) tak, že neplatí tvrzení věty 7.1.

To nás opravňuje k tomu, že nejenom v tomto, ale i v nelineárním a Neumannově problému se spokojíme s tvrzeními obdobnými větě 7.1.

7.2.1. Příklady

V [22] můžeme nalézt řadu příkladů, z nichž ten, který dále popíšeme, ukazuje na neúplnost námi použité metody.

<u>Příklad</u> 7.1. Nechť $\Omega = (0,1)^2$, $M = \{x = (x_1,x_2) \in \partial\Omega;\ x_2 = 0\}$, tj. $d_M(x) = x_2$,

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx \ .$$

Potom bilineární forma

$$a:\ W_o^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon) \times W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon) \longrightarrow R$$

je eliptická v obou složkách pro $\varepsilon \in (-1,1)$. Pro $u \in C_o^\infty(\Omega)$ je totiž

$$a(u, ux_2^\varepsilon) = \int_\Omega \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2 \right) x_2^\varepsilon \ dx +$$

$$+ \varepsilon \int_\Omega x_2^{\varepsilon-1}\, u \frac{\partial u}{\partial x_2}\, dx \ ,$$

kde integrací per partes obdržíme

$$\varepsilon \int_\Omega x_2^{\varepsilon-1}\, u \frac{\partial u}{\partial x_2}\, dx = \frac{\varepsilon}{2}(1-\varepsilon) \int_\Omega x_2^{\varepsilon-2}\, u^2\, dx \ .$$

Je-li $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, potom

$$\frac{\varepsilon}{2}(1-\varepsilon) \int_\Omega x_2^{\varepsilon-2}\, u^2\, dx \geqq 0$$

a forma $a(.,.)$ je eliptická v první složce. Je-li $\varepsilon < 0$, potom z Hardyho nerovnosti (2.3) dostáváme

$$\frac{|\varepsilon|}{2}(1-\varepsilon)\int_{\Omega} x_2^{\varepsilon-2} u^2 \, dx \leqq \frac{2|\varepsilon|}{1-\varepsilon} \int_{\Omega} x_2^{\varepsilon} \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|^2 dx \; .$$

Protože $\frac{2|\varepsilon|}{1-\varepsilon} < 1$ pro $\varepsilon > -1$ (předpokládáme $\varepsilon < 0$), je bilineární forma a(.,.) eliptická v první složce i pro $\varepsilon \in (-1,0)$, tedy celkově pro $\varepsilon \in (-1,1)$. Vzhledem k symetrii je eliptická v druhé složce rovněž pro $\varepsilon \in (-1,1)$. Pro tento příklad můžeme tedy ve větě 7.4 vzít dokonce interval $I = (-1,1)$.

Poznamenejme, že odhad intervalu I, který obdržíme pomocí vztahu (7.8), je ve srovnání s tímto velmi hrubý. Totéž můžeme říci o příkladu následujícím.

<u>Příklad</u> 7.2. Nechť $\Omega \subset R^N$ je omezená konvexní oblast, $M = \partial\Omega$. Uvažujme problém (7.1) s operátorem, pro který bude

$$a(u,v) = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \, dx + \int_{\Omega} u\, v \, dx \; .$$

Pro $\varepsilon < 1$ užitím věty 4.9, nerovnosti 2.8 a vztahu $|\nabla d| = 1$ skoro všude v Ω obdržíme

$$a(u,ud^{\varepsilon}) \geqq \|u\|_{\varepsilon}^2 - |\varepsilon| \left(\sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^2 d^{\varepsilon} \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} u^2 \, d^{\varepsilon-2} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \geqq$$

$$\geqq \left(1 - \frac{2|\varepsilon|}{1-\varepsilon}\right) \|u\|_{\varepsilon}^2 \; .$$

Bilineární forma a(.,.) je tedy eliptická v první složce pro $\left(1-\frac{2|\varepsilon|}{1-\varepsilon}\right) > 0$, tj. pro $\varepsilon \in (-1, \frac{1}{3})$. Vzhledem k symetrii je eliptická v druhé složce pro $\varepsilon \in (-\frac{1}{3}, 1)$. Můžeme proto ve větě 7.1 položit $I = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Stejný interval $I = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ obdržíme, jestliže budeme uvažovat problém (7.1) s bilineární formou

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \quad .$$

Jak uvidíme v odstavci 8.5.2, metoda vypracovaná pro lineární operátory je jemnější a dává lepší výsledek (interval $I = (-1,1)$).

7.2.2. Libovolně malý interval mocnin

V tomto odstavci ukážeme, že pro libovolně malou mocninu váhy umíme nalézt takový Dirichletův problém, který není řešitelný ve váhovém prostoru s touto mocninou.

Uvažujme proto Dirichletův problém

$$(7.9)_\delta \quad \begin{cases} - u''(x) + \delta(\delta-1)\, x^{-2}u(x) = f(x) & \text{pro } x \in (0,1), \\ \qquad u(0) = u(1) = 0 \quad . \end{cases}$$

Odpovídající bilineární forma

$$(7.10) \qquad a(u,v) = \int_0^1 u'v' \, dx + \delta(\delta-1) \int_0^1 x^{-2} u \, v \, dx$$

je omezená na $W_0^{1,2}((0,1)) \times W_0^{1,2}((0,1))$, neboť je splněna podmínka (7.2). Dále je tato forma $W_0^{1,2}((0,1))$-eliptická pro $|\delta(\delta-1)| < \frac{1}{4}$, neboť užitím Hardyho nerovnosti

$$\int_0^1 |u(x)|^2 x^{\varepsilon-2} \, dx \leqq \frac{4}{|1-\varepsilon|^2} \int_0^1 |u'(x)|^2 x^{\varepsilon} \, dx, \quad \varepsilon \neq 1,$$

kde vezmeme $\varepsilon = 0$, obdržíme

$$a(u,u) \geqq (1-4\,|\delta(\delta-1)|) \int_0^1 |u'|^2 \, dx \quad .$$

Nechť $I(\delta)$ značí dále interval (obsahující nulu) všech hodnot ε takový, že bilineární forma

$$a: \; W_0^{1,2}((0,1), x, \varepsilon) \times W_0^{1,2}((0,1), x, -\varepsilon) \longrightarrow R$$

definovaná vztahem (7.10) je eliptická v první i v druhé složce a tedy problém $(7.9)_\delta$ je slabě řešitelný v prostoru $W_0^{1,2}((0,1), x, \varepsilon)$.

Lemma 7.5. Pro každé libovolně malé $|\varepsilon|$, $\varepsilon \neq 0$, existuje takové δ, že $\varepsilon \notin I(\delta)$.

Důkaz. Pro $\varepsilon \neq 0$ dostatečně malé položme $\delta = \frac{1-\varepsilon}{2}$, tedy je splněna podmínka $|\delta(\delta-1)| < \frac{1}{4}$. Předpokládejme, že pravá strana f problému $(7.9)_\delta$ má tvar

$$f(x) = \begin{cases} x^{\delta-2}(-\ln x)^{\omega-1}\left[2\omega\delta-\omega-\omega(\omega-1)(-\ln x)^{-1}\right] & \text{pro } x\in(0,1/2)\ , \\ -w''(x) + \delta(\delta-1)\, x^{-2}\, w(x) & \text{pro } x\in\langle 1/2,1)\ , \end{cases}$$

kde $\omega \neq 0$, $|\omega| < \frac{1}{2}$ a w je funkce dvakrát spojitě diferencovatelná na intervalu (1/3,4/3) a w(1)=0,
$w(x) = x^\delta(-\ln x)^\omega$ pro $x\in(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. Potom je

$$f\in\left[W_0^{1,2}((0,1), x, -\varepsilon)\right]^* .$$

Skutečně máme

$$\left|\int_0^1 f(x)v(x)\,dx\right| \leqq \text{const}\left(\int_0^1 |v'(x)|^2 x^{-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

pro každé $v\in W_0^{1,2}((0,1), x, -\varepsilon)$, neboť pomocí Hardyho a Hölderovy nerovnosti odhadneme

$$\left|\int_0^{\frac{1}{2}} x^{\delta-2}(-\ln x)^{\omega-1}v(x)\,dx\right| \leqq \frac{4}{|1-\varepsilon|^2}\left(\int_0^1 |v'(x)|^2 x^{-\varepsilon}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

$$\cdot\left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^{-1}(-\ln x)^{2\omega-2}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \text{const}\ \|v\|_{-\varepsilon} \quad .$$

Protože problém $(7.9)_\delta$ je lineární, má jednoznačné řešení u ve smyslu distribucí, přičemž snadno nalezneme

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0 , \\ x^{\delta}(-\ln x)^{\omega} & \text{pro } x \in (0, \tfrac{1}{2}\rangle , \\ w(x) & \text{pro } x \in (\tfrac{1}{2}, 1\rangle . \end{cases}$$

Stačí ukázat, že $u \notin \overset{\circ}{W}{}^{1,2}((0,1), x, \varepsilon)$. Protože však $2\delta - 2 + \varepsilon = -1$, $2\omega > -1$, platí pro $x \in (0, \frac{1}{2})$ rovnost

$$u'(x) = \delta x^{\delta-1}(-\ln x)^{\omega} - x^{\delta-1}(-\ln x)^{\omega-1}\,\omega$$

a dále

$$\|u\|_{\varepsilon}^{2} \geqq |||u|||_{\varepsilon}^{2} = \int_0^1 |u'(x)|^2 x^{\varepsilon}\, dx \geqq$$

$$\geqq \text{const} \int_0^{1/2} x^{2\delta-2+\varepsilon} (-\ln x)^{2\omega}\, dx = +\infty .$$

Tedy platí $\varepsilon \notin I(\frac{1-\varepsilon}{2})$ pro $\varepsilon \neq 0$ a $|\varepsilon|$ dostatečně malé.

7.3. CHARAKTERISTIKA DUÁLU K PROSTORU $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$, $p > 1$

7.3.1. Dvě různé charakteristiky

Uvedeme dvě charakteristiky duálu k váhovému prostoru $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$, $p > 1$. U druhé z nich musíme opět předpokládat, že exponent ε náleží dostatečně malému okolí nuly.

Jako v předešlém bude $\Omega \subset R^N$ omezená oblast s lipschitzovskou hranicí a číslo $q > 1$ bude splňovat vztah $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(i) Funkcionál F je prvkem prostoru $[\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega, d_M, \frac{-\varepsilon}{p-1})]^*$ právě tehdy, když existují funkce

(7.11) $f_0, f_1, \dots, f_N \in L_p(\Omega, d_M, \varepsilon)$

takové, že

$$(7.12) \qquad F = - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + f_o \quad .$$

(Zde $\frac{\partial}{\partial x_i}$ značí derivaci ve smyslu distribucí.) Navíc

$$\| F \|_{*} = \inf \left(\sum_{i=0}^{N} \| f_i \|_{M,p,\varepsilon}^{p} \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

kde infimum se bere přes všechny takové N+1-tice funkcí (7.11), že F lze psát ve tvatu (7.12).

(ii) Pro každé $g \in W_o^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ je

$$F_g(v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + g\, v \right) dx \ , \quad v \in W_o^{1,q}(\Omega, d_M, \frac{-\varepsilon}{p-1}),$$

omezený lineární funkcionál na prostoru $W_o^{1,q}(\Omega, d_M, \frac{-\varepsilon}{p-1})$.
Naopak existuje interval I, $0 \in \operatorname{int} I$, že pro $\varepsilon \in I$ má každý funkcionál $F \in [W_o^{1,q}(\Omega, d_M, \frac{-\varepsilon}{p-1})]^*$ jednoznačné vyjádření tvaru

$$F(v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + g\, v \right) dx \ , \quad v \in W_o^{1,q}(\Omega, d_M, \frac{-\varepsilon}{p-1}),$$

s funkcí $g \in W_o^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$. Dále existuje konstanta $K = K(\Omega, M, p, \varepsilon) > 0$ taková, že platí

$$K \| g \|_{M,p,\varepsilon} \leq \| F \|_{*} \leq \| g \|_{M,p,\varepsilon} \quad .$$

Tvrzení (i) ihned plyne z tvrzení (ii), ovšem pouze pro dostatečně malá $|\varepsilon|$. Pro ostatní hodnoty ε je pak tvrzení (i) speciálním případem charakteristiky duálů váhových prostorů s obecnou vahou, která je uvedena např. v [16].

Důkaz části (ii) provedeme v následujícím odstavci. Pro $p \neq 2$ je přitom uvažovaný problém ekvivalentní s vyšetřováním řešitelnosti lineární Dirichletovy úlohy v prostorech, které nejsou Hilbertovy.

Poznámka. V dalších kapitolách budeme užívat především první charakteristiku (i). Obvykle však bude zaměněna úloha indexů p a q, tj. bude

$$F \in [W_o^{1,p}(\Omega, d_M, -\varepsilon(p-1))]^* \quad a \quad f_o, \dots, f_N \in L_q(\Omega, d_M, \varepsilon).$$

7.3.2. Důkaz tvrzení (ii)

Pro $\varepsilon = 0$ představuje tvrzení (ii) známý klasický výsledek (viz např. [13], str. 259), který je pro naše další úvahy nezbytný.

První část tvrzení, která říká, že F_g je omezený lineární funkcionál na prostoru $W_o^{1,q}(\Omega, d_M, -\varepsilon/p-1)$, plyne ihned z Hölderovy nerovnosti. Nepředpokládá proto žádná omezení exponentu ε.

Druhá část tvrzení je ekvivalentní s řešitelností rovnice

$$(7.13) \qquad a(g,v) = \langle F,v \rangle \;, \qquad v \in W_o^{1,q}(\Omega, d_M, \tfrac{-\varepsilon}{p-1})$$

ve váhovém prostoru $W_o^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$, kde $a(.,.)$ je bilineární forma daná vztahem

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega u\, v\, dx \quad .$$

Tato forma je omezená na prostoru

$$W_o^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon) \times W_o^{1,q}(\Omega, d_M, \tfrac{-\varepsilon}{p-1}) \;,$$

neboť užitím Hölderovy nerovnosti okamžitě obdržíme

$$|a(u,v)| \leq \text{const} \; \|u\|_{M,p,\varepsilon} \; \|v\|_{M,q,-\varepsilon/p-1}$$

Stačí proto vyšetřit elipticitu bilineární formy $a(.,.)$ ve složkách a užít zobecněného Laxova-Milgramova lemmatu.

Omezíme se dále na elipticitu v první složce, stejným způsobem lze postupovat i v případě druhé složky.

Lemma 7.6. Pro dostatečně malá $|\varepsilon|$ je bilineární forma

$$a: W_o^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon) \times W_o^{1,q}(\Omega, d_M, \frac{-\varepsilon}{p-1}) \longrightarrow R$$

eliptická v první složce, tj. existuje konstanta $m > 0$ taková, že pro každé $u \in W_o^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ platí nerovnost

$$(7.14) \qquad \sup_{\|v\|_{M,q,\frac{-\varepsilon}{p-1}} \leq 1} a(u,v) \geq m \|u\|_{M,p,\varepsilon} .$$

Důkaz. Pro $\varepsilon = 0$, jak jsme již poznamenali, je důkaz existence řešitelnosti rovnice (7.13) dostatečně známý výsledek. Aplikujeme-li nyní tvrzení lemmatu 6.2 na bilineární formu

$$a: W_o^{1,p}(\Omega) \times W_o^{1,q}(\Omega) \longrightarrow R ,$$

obdržíme nerovnost

$$(7.15) \qquad \sup_{\|\eta\|_{q,o} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx + \int_\Omega \xi \eta \, dx \right| \geq m_1 \|\xi\|_{p,o} , \quad \xi \in W_o^{1,p}(\Omega) ,$$

s nějakou konstantou $m_1 > 0$ (elipticita formy $a(.,.)$ v první složce).

Je-li nyní $|\varepsilon|$ dostatečně malé, potom z věty 4.8 plyne, že zobrazení $u \to \xi$, $\xi = u\, d_M^{-\varepsilon/p}$, je izomorfismus prostorů $W_o^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ a $W_o^{1,p}(\Omega)$ a že zobrazení $v \to \eta$, $\eta = v\, d_M^{\varepsilon/p}$, je izomorfismus prostorů $W_o^{1,q}(\Omega, d_M, \frac{-\varepsilon}{p-1})$ a $W_o^{1,q}(\Omega)$. Pro bilineární formu

$$A: W_o^{1,p}(\Omega) \times W_o^{1,q}(\Omega) \longrightarrow R$$

definovanou vztahem

$$A(\xi, \eta) = A(u d_M^{-\varepsilon/p}, v d_M^{\varepsilon/p}) = a(u,v)$$

pak dostáváme užitím Hölderových nerovností (2.9) a (2.2), vztahu $|\nabla d_M| = 1$ skoro všude v Ω a věty 4.8 o vnoření odhad

$$A(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\partial\xi}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega \xi\eta\,dx -$$

$$-\frac{\varepsilon}{p}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \xi\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\,d_M^{-1}\frac{\partial d_M}{\partial x_i}\,dx + \frac{\varepsilon}{p}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\partial\xi}{\partial x_i}\eta\,d_M^{-1}\frac{\partial d_M}{\partial x_i}\,dx -$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{p^2}\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \xi\eta\,d_M^{-2}\left|\frac{\partial d_M}{\partial x_i}\right|^2 dx \geqq a(\xi,\eta) -$$

$$-\frac{|\varepsilon|}{p}N^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |\xi|^p d_M^{-p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} -$$

$$-\frac{|\varepsilon|}{p}N^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \left|\frac{\partial\xi}{\partial x_i}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |\eta|^q d_M^{-q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} -$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{p^2}\left(\int_\Omega |\xi|^p d_M^{-p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |\eta|^q d_M^{-q}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \geqq$$

$$\geqq a(\xi,\eta) - \frac{|\varepsilon|}{p}\left[c(p)N^{\frac{1}{p}} + c(q)N^{\frac{1}{q}}\right]\|\xi\|_p\,\|\eta\|_q -$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{p^2}c(p)c(q)\,\|\xi\|_p\,\|\eta\|_q\ .$$

Vzhledem k nerovnosti (7.15) můžeme proto ke každému $\xi\in W_0^{1,p}(\Omega)$ nalézt takové $\eta\in W_0^{1,q}(\Omega)$, že s vhodnými konstantami $c_1, c_2 > 0$ platí vztah

$$A(\xi,\eta) \geqq \left[\frac{m_1}{2} - |\varepsilon|c_1 - \varepsilon^2 c_2\right]\|\xi\|_p\,\|\eta\|_q\ .$$

Pro libovolné $u = \xi\, d_M^{\varepsilon/p} \in W_0^{1,p}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ umíme proto nalézt takové $v = \eta\, d_M^{-\varepsilon/p}$, že je splněna nerovnost

$$a(u,v) = A(\xi, \eta) \geqq m_2 \|\xi\|_p \|\eta\|_q \geqq m \|u\|_{M,p,\varepsilon} \|v\|_{M,q,-\varepsilon/p-1} .$$

Odtud plyne tvrzení lemmatu.

Poznámka. Jak uvidíme později (věta 8.11), pro konvexní oblast Ω a pro $p=2$ platí tvrzení (ii) dokonce tehdy, je-li $I = (-1,1)$.

8. DIRICHLETŮV PROBLÉM PRO NELINEÁRNÍ OPERÁTOR

8.1. FORMULACE PROBLÉMU

8.1.1. Úvod

V této kapitole budeme uvažovat nelineární Dirichletův problém

$$(8.1)\quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x,u,\nabla u) + a_0(x,u,\nabla u) = f & v\ \Omega, \\ u = \varphi & na\ \partial\Omega. \end{cases}$$

V celé kapitole budeme předpokládat, že oblast $\Omega \subset R^N$ je omezená s lipschitzovskou hranicí a že je $M = \partial\Omega$, $d_M = d$. Pro jednoduchost značení budeme psát

$$W_0^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon) = V_{p,\varepsilon}.$$

Pro pravé strany problému (8.1) budeme dále předpokládat, že platí

$$\varphi \in W^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon) \quad a \quad f \in [V_{p,-\varepsilon(p-1)}]^*$$

(tj. $f = f_0 - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ s $f_0,\dots,f_N \in L_{\frac{p}{p-1}}(\Omega,d,\varepsilon)$).

Poznamenejme ještě, že dále bude $p,q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\varepsilon \in (-1,p-1)$, a nebudeme proto tato omezení vždy vypisovat.

8.1.2. Koeficienty nehomogenního problému

Budeme předpokládat, že funkce

$$a_i : \Omega \times R \times R^N \longrightarrow R, \; i=0,\dots,N,$$

splňují Carathéodoryho podmínky (viz odstavec 4.3.2) a následující nerovnosti (8.2)-(8.4).

Existují čísla $p>1$, $\sigma\in(0,p-1)$, $\varepsilon\in(-1,p-1)$, nezáporné funkce $k\in L_q(\Omega,d,\varepsilon)$, $\ell\in L_1(\Omega,d,\varepsilon)$ ($q>1$, $1/p+1/q=1$) a kladné konstanty $\alpha_0,\dots,\alpha_3$ takové, že platí

$$(8.2)\qquad |a_i(x,\eta,\xi)|\leq\alpha_0\,(|\xi|^{p-1}+|\eta|^{p-1}+k(x)),\quad i=0,1,\dots,N,$$

$$(8.3)\qquad \sum_{i=1}^{N}a_i(x,\eta,\xi)\,\xi_i+a_0(x,\eta,\xi)\eta\geq\alpha_1|\xi|^p-\alpha_2|\eta|^{p-\sigma}-\alpha_3\,\ell(x),$$

$$(8.4)\qquad \sum_{i=1}^{N}[a_i(x,\eta,\xi)-a_i(x,\eta,\xi')]\,(\xi_i-\xi_i')>0$$

pro skoro všechna $x\in\Omega$ a všechna $\eta\in R$, $\xi,\xi'\in R^N$, $\xi\neq\xi'$.

Poznamenejme, že parametry p a ε jsou stejné jako u pravých stran f,φ problému (8.1). Tedy charakter pravých stran je omezen koeficienty rovnice a naopak.

8.1.3. Koeficienty homogenního problému

Protože je výhodné pracovat namísto s nehomogenním problémem s problémem homogenním, položíme

$$b_i(x,\eta,\xi)=a_i(x,\eta+\varphi(x),\xi+\nabla\varphi(x))$$

pro skoro všechna $x\in\Omega$ a všechna $\eta\in R$, $\xi\in R^N$. Tím převedeme problém (8.1) na homogenní Dirichletovu úlohu

$$(8.5)\quad\begin{cases}-\sum_{i=1}^{N}\dfrac{\partial}{\partial x_i}b_i(x,v,\nabla v)+b_0(x,v,\nabla v)=f & v\ \Omega,\\ v=0 & \text{na } \partial\Omega,\end{cases}$$

kde $v=u-\varphi$. Zřejmě funkce $b_i:\Omega\times R\times R^N\longrightarrow R$, $i=0,\dots,N$, rovněž splňují Carathéodoryho podmínky. Prostým výpočtem se dále můžeme přesvědčit, že funkce b_i splňují s vhodnými konstantami (parametry p a ε zůstávají ovšem stejné) nerovnosti (8.2)-(8.4). Přitom v (8.3) je možné položit $\sigma=0$ a uvažovat místo α_2 dostatečně malé $\omega>0$, neboť pro každé takové $\omega > 0$ existuje číslo $\beta(\omega) > 0$ a funkce $r \in L_1(\Omega, d, \varepsilon)$ splňující

$$\alpha_2 |\eta|^{p-\delta} + \alpha_3 \ell(x) \leqq \omega d^{-p}(x) |\eta|^p + \beta(\omega) r(x), \quad \eta \in R, x \in \Omega.$$

Pro řešení homogenního problému, jak dále uvidíme, stačí vyžadovat splnění následujících slabších nerovností:

(8.6) Existují β_o, $\gamma > 0$ a nezáporná funkce $h \in L_q(\Omega, d, \varepsilon)$ takové, že platí

$$|b_o(x, \eta, \xi)| \leqq \beta_o \left[d^{-1}(x) |\xi|^{p-1} + d^{-p}(x) |\eta|^{p-1} + d^{-1}(x) h(x) \right],$$

$$|b_i(x, \eta, \xi)| \leqq \beta_o \left[|\xi|^{p-1} + d^{-(p-1)+\gamma}(x) |\eta|^{p-1} + h(x) \right], \quad i = 1, \dots, N,$$

pro $\eta \in R$, $\xi \in R^N$ a skoro všechna $x \in \Omega$.

(8.7) Existují $\beta_1 > 0$, nezáporná funkce $r \in L_1(\Omega, d, \varepsilon)$ a pro každé $\omega > 0$ číslo $\beta_2(\omega) > 0$ takové, že

$$\sum_{i=1}^{N} b_i(x, \eta, \xi) \xi_i + b_o(x, \eta, \xi) \eta \geqq \beta_1 |\xi|^p - \omega d^{-p}(x) |\eta|^p - \beta_2(\omega) r(x)$$

pro všechna $\eta \in R$, $\xi \in R^N$ a skoro všechna $x \in \Omega$.

(8.8) $$\sum_{i=1}^{N} [b_i(x, \eta, \xi) - b_i(x, \eta, \xi')] (\xi_i - \xi_i') > 0$$

pro skoro všechna $x \in \Omega$ a všechna $\eta \in R$, $\xi, \xi' \in R^N$ s $\xi \neq \xi'$.

8.1.4. Definice slabého řešení

Definujme operátor $T: V_{p,\varepsilon} \longrightarrow [V_{p,-\varepsilon(p-1)}]^*$ vztahem

$$\langle Tv, w \rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega b_i(x, v, \nabla v) \frac{\partial w}{\partial x_i} dx + \int_\Omega b_o(x, v, \nabla v) w \, dx, \quad w \in V_{p,-\varepsilon(p-1)}.$$

Užitím Hölderovy nerovnosti, nerovnosti (4.4) pro $\sigma = \Omega$ a s parametrem $-\varepsilon(p-1)$ místo ε a užitím růstových podmínek (8.6) snadno ověříme, že platí

$$\langle Tv,w\rangle \leqq \text{const}\ (\|v\|_{p,\varepsilon}^{p-1} + |h|_{q,\varepsilon}^{p-1})\ \|w\|_{p,-\varepsilon(p-1)}$$

pro všechna $v \in V_{p,\varepsilon}$, $w \in V_{p,-\varepsilon(p-1)}$. (Připomínáme, že je $\varepsilon \in (-1,p-1)$.)

Tedy skutečně operátor T je omezený a $Tv \in [V_{p,-\varepsilon(p-1)}]^*$ pro všechna $v \in V_{p,\varepsilon}$.

Definice. Řekneme, že funkce $v \in V_{p,\varepsilon} = W_0^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon)$ je slabým řešením problému (8.5), jestliže rovnost

$$\langle Tv,w\rangle = \langle f,w\rangle$$

platí pro každé $w \in V_{p,-\varepsilon(p-1)}$.

Řekneme, že funkce $u \in W^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon)$ je slabým řešením problému (8.1), jestliže funkce $u-\varphi$ je slabým řešením příslušného homogenního problému (8.5).

8.1.5. Poznámka

Naším cílem bude tedy vyšetřit existenci slabého řešení problému (8.5). Jak napovídá lineární Dirichletova úloha, kterou jsme se zabývali v předešlé kapitole, mocnina ε dané váhy bude blízká nule. Pro $\varepsilon = 0$ dostáváme dobře známou úlohu nalézt slabé řešení v obvyklých (neváhových) Sobolevových prostorech. Existence tohoto řešení je zaručena nerovnostmi (8.2)-(8.4), pro homogenní problém pak nerovnostmi (8.6)-(8.8). Číslo ν , které se vyskytuje v nerovnostech (8.6), není nutné uvažovat k tomu, abychom pro $v \in V_{p,\varepsilon}$ ověřili vztah $Tv \in [V_{p,-\varepsilon(p-1)}]^*$. Jak uvidíme, podmínka $\nu > 0$ zaručuje, že ve vhodném okamžiku budeme schopni aplikovat větu o kompaktním vnoření.

8.2. KLASICKÝ PROBLÉM S KOERCITIVNÍM OPERÁTOREM

8.2.1. Převedení na metodu z části 5

Jak plyne z odstavce 8.1, naším úkolem je vyšetřovat řešitelnost rovnice

$$Tu = f ,$$

kde $T: V_{p,\varepsilon} \longrightarrow [V_{p,-\varepsilon(p-1)}]^*$ je operátor z nějakého Banachova prostoru do duálu jiného prostoru. Zmínili jsme se již v úvodu o tom, že existuje řada existenčních vět pro řešení rovnic s takto obecným operátorem. Pomineme-li speciální lineární případ zobecněného Laxova-Milgramova lemmatu, pak víceméně většina získaných výsledků vycházela z potřeb řešit rovnice s operátory velkých nebo příliš malých růstů v nereflexivních Orliczových prostorech (viz např. [4]). Tyto metody nelze v našem případě použít.

Využijeme proto tvrzení lemmatu 4.12. Pro $\varepsilon \in (-1,p-1)$ (v dalším jsou zajímavé pouze hodnoty $|\varepsilon|$ dostatečně malé, a proto neuvažujeme $\varepsilon \neq -1,p-1$) je zobrazení

$$J: u \longrightarrow d^{\varepsilon} u$$

izomorfismus prostorů $V_{p,\varepsilon}$ a $V_{p,-\varepsilon(p-1)}$. Příslušné adjungované zobrazení $J^*: [V_{p,-\varepsilon(p-1)}]^* \longrightarrow [V_{p,\varepsilon}]^*$ je proto rovněž izomorfismus. Jeho hodnota J^*f v bodě $f \in [V_{p,-\varepsilon(p-1)}]^*$ je definována vztahem

$$\langle J^*f, u\rangle = \langle f, d^{\varepsilon}u\rangle , \quad u \in V_{p,\varepsilon} .$$

Uvedené izomorfismy J a J^* implikují, že rovnice $Tu = f$ má alespoň jedno slabé řešení pro $f \in [V_{p,-\varepsilon(p-1)}]^*$ právě tehdy, když má alespoň jedno řešení rovnice

$$J^*Tu = J^*f . \tag{8.9}$$

Operátor $J^*T: V_{p,\varepsilon} \longrightarrow [V_{p,\varepsilon}]^*$ je ovšem zobrazením daného Banachova prostoru do jeho duálu a je omezený, protože je omezený operátor T.

Bohužel neumíme rozhodnou, zda-li operátor J^*T je pseudomonotonní. (Autor je přesvědčen, že pseudomonotonní není, zároveň však neumí nalézt žádný protipříklad na tuto vlastnost.) Proto dosavadní výsledky s nelineárními operátory je potřeba zjemnit způsobem, který je ukázán v kapitole 5.

V dalším položíme $S = J^*T$, $g = J^*f$, $V = V_{p,\varepsilon}$ a $V_n = V_p^n$,

$$V_p^n = \{ u \in V_{p,\varepsilon} \,;\, \operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}_n \} \,, \quad n \geqq n_o,$$

kde Ω_n je oblast s lipschitzovskou hranicí popsaná v odstavci 4.2.4 a splňující inkluze

$$(8.10) \qquad \{ x \in \Omega ;\, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1+\frac{1}{n}}{n} \} \subset \Omega_n \subset$$

$$\subset \{ x \in \Omega ;\, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n} \} .$$

<u>Lemma</u> 8.1. Platí

$$V_p^n|_{\Omega_n} = W_o^{1,p}(\Omega_n) \,, \quad \text{kde} \quad V_p^n|_{\Omega_n} = \{ u|_{\Omega_n} ;\, u \in V_p^n \} .$$

<u>Důkaz</u>. Protože pro $x \in \Omega_n$ je $0 < \frac{1}{n} < d(x) < \frac{1}{2} \operatorname{diam} \Omega$, je norma $\|.\|_{p,\varepsilon}$ ekvivalentní s normou $\|.\|_p$ prostoru $W_o^{1,p}(\Omega_n)$. Tedy pro každé $u \in V_p^n$ je restrikce $u|_{\Omega_n} \in W_o^{1,p}(\Omega_n)$ a naopak každá funkce $u \in W_o^{1,p}(\Omega_n)$ dodefinovaná nulou na množině $\Omega \setminus \Omega_n$ je z prostoru V_p^n.

Zřejmě pro $m \leqq n$ je splněna inkluze $V_p^m \subset V_p^n$, neboť oblast Ω_n splňuje vztah (8.10) (viz obr. č.12) a platí nerovnost $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, tedy $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ $(n \geqq n_o)$.

Dále vzhledem k tomu, že množina $C_o^\infty(\Omega)$ je hustá v prostoru $V_{p,\varepsilon}$, je rovněž hustá v tomto prostoru množina $\bigcup_{n \geqq n_o} V_p^n$.

Můžeme proto užít postupu kapitoly 5.

Vyšetřujme nejprve řešitelnost rovnice

$$(8.10)_n \qquad S_n u = g \Big|_{V_p^n}$$

v prostoru V_p^n, tj. vyšetřujme rovnici

$$\langle J^* Tu , v \rangle = \langle g , v \rangle , \ v \in V_p^n ,$$

která koresponduje s rovnicí $(5.1)_n$.

Lemma 8.2. Existuje alespoň jedno řešení $u_n \in V_p^n$ rovnice $(8.10)_n$ pro $n \geq n_o$.

Důkaz. Z tvaru zobrazení J vyplývá, že je izomorfismem prostoru V_p^n ($\approx W_o^{1,p}(\Omega_n)$) na sebe. Rovnice $(8.10)_n$ proto přechází v rovnost

$$\langle Tu, w \rangle = \langle f, w \rangle , \ w \in V_p^n,$$

s operátorem $T: V_p^n \longrightarrow [V_p^n]^*$, který je definován vztahem

$$\langle Tv, w \rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} b_i(x, v, \nabla v) \frac{\partial w}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} b_o(x, v, \nabla v) w \, dx,$$

$$w \in V_p^n .$$

Operátor T je již zobrazením Banachova prostoru do duálu téhož prostoru. Protože funkce b_i, $i=0,\dots,N$, splňují Carathéodoryho podmínky a nerovnosti (8.6)-(8.8), můžeme užít klasických výsledků s pseudomonotonními operátory (viz [19], Ch.2, §2, nebo [2], věta 29.11). Stačí si přitom uvědomit, že pro $x \in \Omega_n$ je funkce $d(x)$ "odražená" od nuly, tj. $d(x) \geq \text{const} > 0$ pro $x \in \Omega_n$, a tedy růstové podmínky (8.6) mají obvyklý tvar. Podmínka (8.7) je ovšem nezvyklá, přesto však zaručuje koercivitu operátoru T. Skutečně pro $u \in W_o^{1,p}(\Omega_n)$ užitím (8.7) a Friedrichsovy nerovnosti obdržíme odhad

$$\langle Tu,u\rangle \geqq \beta_1 \int_{\Omega_n} |\nabla u|^p \, dx - \omega\, n^p \int_{\Omega_n} |u|^p \, dx -$$

$$- \beta_2(\omega) \int_{\Omega_n} r(x)\, dx \geqq$$

$$\geqq [\beta_1 - \omega n^p\, c(p,\Omega_n)] \int_{\Omega_n} |\nabla u|^p \, dx - c(\omega, r, \Omega_n) \, .$$

Stačí volit $\omega > 0$ tak malé, aby výraz v hranatých závorkách byl kladný.

8.2.2. Koercivita a podmínka (5.2)

Lemma 8.3. Existuje interval I, $0 \in \operatorname{int} I$, takový, že pro $\varepsilon \in I$ je operátor $S\colon V_{p,\varepsilon} \longrightarrow [V_{p,\varepsilon}]^*$ koercivní, tj. že platí

$$\frac{1}{\|u\|_{p,\varepsilon}} \langle Su,u\rangle \longrightarrow +\infty \quad \text{pro} \quad \|u\|_{p,\varepsilon} \longrightarrow +\infty \, .$$

Důkaz. Použijeme-li Hölderovy nerovnosti a lemmatu 4.9, můžeme pro $u \in V_{p,\varepsilon}$ odhadovat

$$\langle Su,u\rangle = \langle Tu,Ju\rangle = \sum_{i=1}^{N} \Big[\int_\Omega b_i(x,u,\nabla u) \frac{\partial u}{\partial x_i} d^\varepsilon \, dx +$$

$$+ \varepsilon \int_\Omega b_i(x,u,\nabla u)\, u \frac{\partial d}{\partial x_i} d^{\varepsilon-1} \, dx\Big] + \int_\Omega b_o(x,u,\nabla u)\, u\, d^\varepsilon \, dx \geqq$$

$$\geqq \beta_1 \int_\Omega |\nabla u|^p d^\varepsilon \, dx - \omega \int_\Omega |u|^p d^{\varepsilon-p} \, dx - \beta_2(\omega) \int_\Omega r\, d^\varepsilon \, dx -$$

$$- |\varepsilon|\, N \beta_o \Big[\int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |u|\, d^{\varepsilon-1} \, dx + \int_\Omega |u|^p d^{\varepsilon-p+\varkappa} \, dx +$$

$$+ \int_\Omega h\, |u|\, d^{\varepsilon-1} \, dx\Big] \geqq \Big[\beta_1 - 2\omega c_1 - |\varepsilon|\, N \beta_o (c_1^{\frac{1}{p}} + c_1 \max_{x\in\bar\Omega} d^\varkappa(x))\Big] \, .$$

$$|\!|\!| u |\!|\!|^p_{p,\varepsilon} - \beta_2(\omega) \int_\Omega r\, d^\varepsilon \, dx - c_2(\omega) \int_\Omega h^q d^\varepsilon \, dx \, ,$$

kde $c_1 = c\left(\frac{p}{|\varepsilon - p + 1|}\right)^p$ je konstanta z (4.4). Užili jsme přitom nerovnosti

$$h|u|d^{\varepsilon-1} \leqq \omega|u|^p d^{\varepsilon-p} + \frac{1}{q}\,\omega^{-\frac{1}{p-1}}\, p^{-\frac{1}{p-1}}\, h^q d^{\varepsilon}$$

odvozené pomocí (2.6). Protože můžeme volit $\omega > 0$ libovolně malé, operátor S bude koercivní, jestliže

$$(8.11) \qquad \beta_1 - |\varepsilon|\, N\, \beta_0 \Big(c^{\frac{1}{p}} \frac{p}{|\varepsilon-p+1|} + c\Big(\frac{p}{|\varepsilon-p+1|}\Big)^p \max_{x\in\overline{\Omega}} d^{\varkappa}(x) \Big) > 0 .$$

Zřejmě je tato nerovnost splněna pro hodnoty ε z vhodného intervalu I, $0 \in \operatorname{int} I$.

<u>Lemma</u> 8.4. Jestliže $\varepsilon \in I$, kde I je interval z lemmatu 8.3, potom existuje konstanta $C = C(\varepsilon, \Omega, p, S) > 0$ taková, že pro každé řešení $u_n \in V_p^n$ rovnice $(8.10)_n$, $n \geqq n_0$, platí

$$(8.12) \qquad \|u_n\|_{p,\varepsilon} \leqq C .$$

<u>Důkaz</u>. Pro $n \geqq n_0$ je Ω_n neprázdná oblast s lipschitzovskou hranicí, $u_n \in V_p^n$ je řešením rovnice

$$\langle Tu_n, v\rangle = \langle f, v\rangle , \quad v \in V_p^n .$$

Tedy pro nějaké $c_4 > 0$ bude

$$\langle Su_n, u_n\rangle = \langle Tu_n, Ju_n\rangle = \langle f, Ju_n\rangle \leqq c_4 |f|_{[V_{p,-\varepsilon(p-1)}]^*} \|u_n\|_{p,\varepsilon} .$$

Tento odhad spolu s lemmatem 8.3 dává ihned (8.12).

Nyní vzhledem k odhadu (8.12), omezenosti operátoru $S\colon V_{p,\varepsilon} \longrightarrow [V_{p,\varepsilon}]^*$ a reflexivitě prostoru $V_{p,\varepsilon}$, $\varepsilon \in I$, můžeme vybrat takovou podposloupnost $\{u_m\}_m$, že je splněna podmínka

$$(8.13) \qquad \begin{cases} u_m \longrightarrow u \quad \text{slabě v } V_{p,\varepsilon} , \\ Su_m \quad \text{konverguje slabě v } [V_{p,\varepsilon}]^* , \end{cases}$$

která odpovídá podmínce (5.2).

Položme jako v kapitole 5 $Sv = S(v,v)$, kde nyní konkrétně bude pro všechna $w, v, z \in V_{p,\varepsilon}$

$$\langle S(w,v),z\rangle = \langle S_1(w,v),z\rangle + \langle S_2 w,z\rangle$$

a

$$\langle S_1(w,v),z\rangle = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega b_i(x,w,\nabla v) \frac{\partial z}{\partial x_i} d^\varepsilon \, dx ,$$

$$\langle S_2 w,z\rangle = \int_\Omega b_o(x,w,\nabla w) \, z \, d^\varepsilon \, dx +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega b_i(x,w,\nabla w) \, z \, d^{\varepsilon-1} \frac{\partial d}{\partial x_i} dx .$$

Ve zbytku kapitoly se vlastně budeme snažit ukázat, že operátor S splňuje podmínky (5.5)-(5.8), a pak užít větu 5.3. Tím dokážeme, že prvek $u \in V_{p,\varepsilon}$ z podmínky (8.13) je slabým řešením problému (8.1). Při ověřování podmínek (5.5)-(5.7) nenarazíme na podstatnější obtíže a můžeme sledovat standartní postup (viz např. [19], Ch.2). Při ověřování podmínky (5.8) však nemůžeme jako obvykle využít kompaktního vnoření a musíme proto tuto nesnáz obejít. Cesta vede přes znalost odhadů norem nalezených řešení u_n, které se vztahují k okolí hranice $\partial\Omega$. Tyto odhady tvoří jádro celé kapitoly.

8.3. ODHADY ŘEŠENÍ V BLÍZKOSTI HRANICE

8.3.1. Jedno technické lemma

Lemma 8.5. Nechť $\{a_k\}_k$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel s dostatečně velikým a_1 a nechť $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 2$, k=1,... . Potom existuje posloupnost funkcí $\{\varphi_k\}_k$ s následujícími vlastnostmi:

$$\varphi_k \in C^\infty(R^N), \quad \varphi_k \equiv 1 \text{ v } R^N \setminus \Omega_{a_{k+1}} , \quad \varphi_k \equiv 0 \text{ v } \bar\Omega_{a_k} ,$$

$$0 \leq \varphi_k(x) \leq 1 \text{ a } |\nabla\varphi_k(x)| \leq c_3 \frac{a_k \, a_{k+1}}{a_{k+1}-a_k} \quad \text{pro všechna } x \in R^N$$

s nějakou konstantou $c_3 = c_3(\Omega) > 0$. (Ohledně Ω_{a_k} viz odstavec 4.2.4 nebo 8.2.1.)

Důkaz. Můžeme uvažovat oblasti Ω'_k, k=1,2,... , s lipschitzovskou hranicí, které mají následující vlastnosti:

$$\Omega_{a_k} \subset \Omega'_k \subset \Omega_{a_{k+1}} ,$$

$$\operatorname{dist}(x,\Omega_{a_k}) > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1+a_{k+1}^{-1}}{a_{k+1}}\right) \quad \text{pro všechna} \quad x \in \partial\Omega'_k,$$

$$\operatorname{dist}(x,\Omega'_k) > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1+a_{k+1}^{-1}}{a_{k+1}}\right) \quad \text{pro všechna } x \in \partial\Omega_{a_{k+1}}.$$

Definujme funkci χ_k na R^N předpisem

$$\chi_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \Omega'_k , \\ 1 & \text{pro } x \notin \Omega'_k \end{cases}$$

a regularizátor R_{γ_k} s jádrem $\rho \in C_0^\infty(R^N)$, $\int_{R^N} \rho(x)\, dx = 1$, $\operatorname{supp} \rho = \{x \in R^N;\ |x| \leqq 1\}$ předpisem

$$R_{\gamma_k} u :\ x \to \gamma_k^{-N} \int_{R^N} \rho\left(\frac{x-y}{\gamma_k}\right) u(y)\, dy , \quad k=1,2,\dots .$$

Jestliže položíme $\gamma_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1+a_{k+1}^{-1}}{a_{k+1}}\right)$, potom bude

$R_{\gamma_k}\chi_k \in C^\infty(R^N)$, $(R_{\gamma_k}\chi_k)(x) = 1$ pro všechna $x \in R^N \setminus \Omega_{a_{k+1}}$

a obdržíme odhad

$$\left| \frac{\partial (R_{\gamma_k}\chi_k)(x)}{\partial x_i} \right| \leqq \frac{1}{\gamma_k^{N+1}} \max_{z \in R^N} |\nabla\rho(z)| \int_{B_{\gamma_k}(x)} |\chi_k(y)|\, dy ,$$

$i=1,\dots,N$, kde značíme $B_{\gamma_k}(x) = \{y \in R^N;\ |x-y| < \gamma_k\}$.

Odtud můžeme odtud můžeme odvodit nerovnost

$$|\nabla(R_{\gamma_k}\chi_k)(x)| \leqq \sqrt{N} \max_{z \in R^N} |\nabla\rho(z)| \frac{\operatorname{meas} B_1(0)}{\gamma_k}$$

pro všechna $x \in \Omega$, k=1,2,... . Vybereme-li nyní posloupnost

$\{a_k\}_k$ tak, že $a_{k+1} \geqq 2a_k$, potom

$$\frac{1}{\gamma_k} = 4 \frac{a_k a_{k+1}}{a_{k+1} - a_k - \frac{a_k}{a_{k+1}}} \leqq 8 \frac{a_k a_{k+1}}{a_{k+1} - a_k} .$$

Stačí položit $\varphi_k = R_{\gamma_k} \chi_k$.

8.3.2. Odhady v blízkosti hranice

Lemma 8.6. Nechť $\varepsilon \in I$, kde I je interval z lemmatu 8.3. Potom existuje konstanta $c_4 = c_4(f,\Omega,p,\varepsilon,\beta_0,\beta_1,\gamma,h,r) > 0$ a rostoucí posloupnost $\{a_k\}_k$ přirozených čísel tak, že nerovnosti

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_{a_{k+1}}} |\nabla u_m(x)|^p \, d^{\varepsilon}(x)\, dx \leqq \frac{c_4}{k} , \quad k \geqq 1 ,$$

platí pro všechna řešení u_m rovnic $(8.10)_m$, $m \geqq n_o$.

Poznámka 8.7. Lemma 8.6 spolu s větou 4.9 implikují nerovnosti

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_{a_{k+1}}} |u_m(x)|^p \, d^{\varepsilon - p}(x)\, dx \leqq \frac{c_5}{k} , \quad k \geqq 1,\ m \geqq n_o,$$

kde c_5 je nějaká kladná konstanta.

Důkaz. Protože meas $(\Omega \setminus \Omega_n) \longrightarrow 0$ pro $n \longrightarrow +\infty$, $h, f_i \in L_q(\Omega, d, \varepsilon)$, $i=0,\dots,N$, $r \in L_1(\Omega, d, \varepsilon)$, existuje rostoucí posloupnost $\{a_k\}_k$ splňující následující podmínky

$$(8.14) \begin{cases} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \geqq 2 , \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} R_k(f) < 1 , \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega \setminus \Omega_{a_k}} r(x)\, d^{\varepsilon}(x)\, dx < 1 , \end{cases}$$

$$(8.14)\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{a_k}} |h(x)|^q\, d^{\varepsilon}(x)\, dx < 1 \\ \text{pro } k=1,2,\dots \quad , \end{cases}$$

kde $R_k(f) = \sum\limits_{i=0}^{N} \Big(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{a_k}} |f_i(x)|^q\, d^{\varepsilon}(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{q}}$.

K takto nalezené posloupnosti $\{a_k\}_k$ uvažujme příslušnou posloupnost funkcí $\{\varphi_k\}_k$ z lemmatu 8.5. Protože $\varphi_k u_m$, $\varphi_k u_m d^{\varepsilon} \in V_p^m$, dostáváme rovnost

$$\langle Tu_m, \varphi_k u_m d^{\varepsilon} \rangle = \langle f, \varphi_k u_m d^{\varepsilon} \rangle ,$$

takže po rozepsání bude

$$(8.15)\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} b_i(x,u_m,\nabla u_m)\, \dfrac{\partial(\varphi_k u_m d^{\varepsilon})}{\partial x_i}\, dx \;+ \\ + \int\limits_{\Omega} b_o(x,u_m,\nabla u_m)\, \varphi_k u_m\, d^{\varepsilon}\, dx = \int\limits_{\Omega} f_o\, \varphi_k u_m d^{\varepsilon}\, dx \;+ \\ \qquad + \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} f_i\, \dfrac{\partial(\varphi_k u_m d^{\varepsilon})}{\partial x_i}\, dx \end{cases}$$

pro všechna $m \geq n_o$, $k=1,2,\dots$.

Označme L resp. P levou resp. pravou stranu rovnosti (8.15) a pišme

$$L = I_1 + I_2 + I_3 ,$$

kde pokládáme

$$I_1 = \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{a_{k+1}}} \Big[\sum\limits_{i=1}^{N} b_i(x,u_m,\nabla u_m)\, \frac{\partial u_m}{\partial x_i} + b_o(x,u_m,\nabla u_m) u_m \Big] \cdot \varphi_k\, d^{\varepsilon}\, dx \;+$$

$$+\; \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_{a_{k+1}}} b_i(x,u_m,\nabla u_m)\, u_m \varphi_k\, d^{\varepsilon-1}\, \frac{\partial d}{\partial x_i}\, dx \quad ,$$

$$I_2 = \int_{\Omega_{a_{k+1}}} \Big[\sum_{i=1}^{N} b_i(x,u_m,\nabla u_m) \frac{\partial u_m}{\partial x_i} + b_o(x,u_m,\nabla u_m)\, u_m \Big] \cdot \varphi_k\, d^{\varepsilon}\, dx \, +$$

$$+ \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_{a_{k+1}}} b_i(x,u_m,\nabla u_m)\, u_m\, \varphi_k\, d^{\varepsilon-1} \frac{\partial d}{\partial x_i}\, dx ,$$

$$I_3 = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} b_i(x,u_m,\nabla u_m)\, u_m \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\, d^{\varepsilon}\, dx .$$

Protože $\varphi_k \equiv 1$ na množině $\Omega \setminus \Omega_{a_{k+1}}$, můžeme vzít v úvahu tvrzení věty 4.9 pro množinu $\sigma \equiv \Omega \setminus \Omega_{a_{k+1}}$ a postupovat při odhadování výrazu I_1 stejně jako v důkazu lemmatu 8.3. Obdržíme

$$I_1 \geqq \Big[\beta_1 - 2\omega c_1 - |\varepsilon|\, N\, \beta_o \big(c_1^{\frac{1}{p}} + c_1 \max_{x\in\bar{\Omega}} d^{\varkappa}(x)\big)\Big] \int_{\Omega\setminus\Omega_{a_{k+1}}} |\nabla u_m|^p d^{\varepsilon}\, dx \, -$$

$$- \beta_2(\omega) \int_{\Omega\setminus\Omega_{a_{k+1}}} r\, d^{\varepsilon}\, dx - c_6(\omega) \int_{\Omega\setminus\Omega_{a_{k+1}}} h^q\, d^{\varepsilon}\, dx ,$$

kde výraz v hranatých závorkách je kladný pro hodnoty $\varepsilon \in I$ (I je interval z lemmatu 8.3).

Dále odhadneme výrazy I_2 a I_3. Především z vlastností funkcí φ_k (viz lemma 8.5) a nerovnosti

$$d(x) \leqq \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_k^2} < \frac{2}{a_k} \qquad \text{pro } x \in \Omega \setminus \Omega_{a_k}$$

obdržíme

$$\Big| \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_{a_{k+1}} \setminus \Omega_{a_k}} v_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\, d^{\varepsilon}\, dx \Big| \leqq \frac{2}{a_k}\; c_3 \frac{a_k a_{k+1}}{a_k - a_{k+1}} .$$

$$\cdot \int_{\Omega_{a_{k+1}} \setminus \Omega_{a_k}} \sum_{i=1}^{N} |v_i| \, d^{\varepsilon-1} \, dx \leqq 4c_3 \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_{a_{k+1}} \setminus \Omega_{a_k}} |v_i| \, d^{\varepsilon-1} dx \; .$$

pro každé $v_i \in L_1(\Omega, d, \varepsilon -1)$, $i=1,\dots,N$. Vzhledem k růstovým podmínkám (8.6), nerovnosti (2.6) (s $\delta=1$) a vztahům $\varphi_k \equiv 0$ v Ω_{a_k}, $\varphi_k \equiv 1$ v $\Omega \setminus \Omega_{a_{k+1}}$ konečně získáme

$$|I_2| + |I_3| \leqq c_6 \int_{\Omega_{a_{k+1}} \setminus \Omega_{a_k}} (|\nabla u_m|^p d^{\varepsilon} + |u_m|^p d^{\varepsilon-p} + h^q d^{\varepsilon}) \, dx \; .$$

Užitím Hölderovy nerovnosti obdobně odhadneme pravou stranu rovnosti (8.15)

$$|P| \leqq \int_{\Omega \setminus \Omega_{a_k}} |f_0| \, |u_m| \, d^{\varepsilon} \, dx + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega \setminus \Omega_{a_k}} |f_i| \, |\nabla u_m| \, d^{\varepsilon} \, dx +$$

$$+ |\varepsilon| \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega \setminus \Omega_{a_k}} |f_i| \, |u_m| \, d^{\varepsilon-1} \, dx +$$

$$+ \frac{2}{a_k} c_3 \frac{a_k a_{k+1}}{a_{k+1}-a_k} \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_{a_{k+1}} \setminus \Omega_{a_k}} |f_i| \, |u_m| \, d^{\varepsilon-1} \, dx \leqq$$

$$\leqq c_7 \sum_{i=0}^{N} \Big(\int_{\Omega \setminus \Omega_{a_k}} |f_i|^q \, d^{\varepsilon} \, dx \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\int_{\Omega} |\nabla u_m|^p \, d^{\varepsilon} \, dx \Big)^{\frac{1}{p}} \; .$$

Konečně z odhadů výrazů I_1, I_2, I_3 a P, z nerovností $I_1 \leqq |I_2| + |I_3| + |P|$, (8.12) a (8.14) okamžitě vyplývá

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_{a_{k+1}}} |\nabla u_m|^p \, d^{\varepsilon} dx \leqq c_8 \Big[\int_{\Omega \setminus \Omega_{a_{k+1}}} r \, d^{\varepsilon} dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_{a_k}} h^q \, d^{\varepsilon} dx +$$

$$+ R_k(f) + \int\limits_{\Omega_{a_{k+1}} \setminus \Omega_{a_k}} (d^{\varepsilon} |\nabla u_m|^p + d^{\varepsilon-p} |u_m|^p) \, dx \Big]$$

$$a \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega \setminus \Omega_{a_{k+1}}} |\nabla u_m|^p \, d^{\varepsilon} dx \leqq c_8 \Big[3 + \int\limits_{\Omega} (d^{\varepsilon} |\nabla u_m|^p + d^{\varepsilon-p} |u_m|^p) dx \leqq$$

$$\leqq c_5 \ .$$

Protože $\Omega \setminus \Omega_{a_i} \subset \Omega \setminus \Omega_{a_j}$ pro $i > j$ a protože konstanta c_5 je nezávislá na m, důkaz je hotov.

8.4. OVĚŘOVÁNÍ MODIFIKOVANÝCH LERAYOVÝCH-LIONSOVÝCH PODMÍNEK

V tomto odstavci ukážeme, že operátor

$$S(.,.) : V_{p,\varepsilon} \times V_{p,\varepsilon} \longrightarrow [V_{p,\varepsilon}]^*$$

zavedený v odstavci 8.2.2 splňuje podmínky (5.5)-(5.8). Nejprve se budeme zabývat nejobtížnější podmínkou (5.8).

8.4.1. Ověření podmínky (5.8)

Nechť řešení u_m splňují předpoklady podmínky (5.8), tj. $S(u_m, v) \longrightarrow \psi$ slabě v $[V_{p,\varepsilon}]^*$. Vzhledem ke kompaktnímu vnoření $V_{p,\varepsilon} \hookrightarrow L_p(\Omega, d, \varepsilon-p+\gamma q)$ (viz větu 4.6) a konvergenci (8.13) obdržíme pro vybrannou podposloupnost (kterou však značíme stejně), že $u_m \longrightarrow u$ silně v $L_p(\Omega, d, \varepsilon-p+\gamma q)$. Z růstových podmínek (8.6) plyne, že pro libovolné pevné $v \in V_{p,\varepsilon}$ je zobrazení $z \longrightarrow b_i(x, z, \nabla v)$, $i=1,\dots,N$, zobrazením prostoru $L_p(\Omega, d, \varepsilon-p+\gamma q)$ do prostoru $L_q(\Omega, d, \varepsilon)$ a je vzhledem k vlastnostem Němyckého operátorů (viz odstavec 4.3.2) spojité. Tedy obdržíme

$$(8.16) \qquad b_i(x, u_m, \nabla v) \longrightarrow b_i(x, u, \nabla v)$$

silně v $L_q(\Omega, d, \varepsilon)$, $i=1,\dots,N$, takže platí

(8.17) $\quad \langle S_1(u_m,v),u_m\rangle \longrightarrow \langle S_1(u,v),u\rangle$ pro libovolné $v \in V_{p,\varepsilon}$,

neboť užitím Hölderovy nerovnosti můžeme odhadnout

$$\left| \int_\Omega b_i(x,u_m,\nabla v) \frac{\partial u_m}{\partial x_i} d^\varepsilon dx - \int_\Omega b_i(x,u,\nabla v) \frac{\partial u}{\partial x_i} d^\varepsilon dx \right| \leqq$$

$$\leqq \left| b_i(x,u_m,\nabla v) - b_i(x,u,\nabla v) \right|_{q,\varepsilon} \|u_m\|_{p,\varepsilon} +$$

$$+ \left| \int_\Omega b_i(x,u,\nabla v) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) d^\varepsilon dx \right|$$

a zobrazení $z \longrightarrow \int_\Omega b_i(x,u,\nabla v) \frac{\partial z}{\partial x_i} d^\varepsilon dx$ je z $[V_{p,\varepsilon}]^*$

a $u_m \longrightarrow u$ slabě ve $V_{p,\varepsilon}$.

V následujícím lemmatu 8.7 ukážeme, že platí

(8.18) $\quad \langle S_2 u_m, u_m - u\rangle \longrightarrow 0$.

Potom vzhledem k (8.16) plyne

$$\langle S_2 u_m, u\rangle = \langle S(u_m,v),u\rangle - \langle S_1(u_m,v),u\rangle \longrightarrow \langle \psi, u\rangle - \langle S_1(u,v),u\rangle ,$$

což spolu s (8.18) dává

$$\langle S_2 u_m, u_m\rangle \longrightarrow \langle \psi, u\rangle - \langle S_1(u,v),u\rangle$$

a s (8.17) dále

$$\langle S(u_m,v),u_m\rangle = \langle S_1(u_m,v),u_m\rangle + \langle S_2 u_m, u_m\rangle \longrightarrow \langle \psi, u\rangle .$$

Až na konvergenci (8.18) je tímto podmínka (5.8) ověřena.

<u>Lemma</u> 8.7. Platí

$$\langle S_2 u_m, u_m - u\rangle \longrightarrow 0 \quad \text{pro } m \longrightarrow +\infty .$$

<u>Důkaz</u>. Z růstových podmínek (8.6), nerovnosti (2.6) (s $\delta=1$), z lemmatu 8.6 a poznámky 8.7 odhadneme

$$X_k(m) = \Big| \int_{\Omega\setminus\Omega_{a_{k+1}}} b_o(x,u_m,\nabla u_m)\,(u_m-u)\, d^{\varepsilon}\, dx \;+$$

$$+\, \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega\setminus\Omega_{a_{k+1}}} b_i(x,u_m,\nabla u_m)\,(u_m-u)\, d^{\varepsilon-1} \frac{\partial d}{\partial x_i}\, dx \Big| \leqq$$

$$\leqq c_9 \Big[\int_{\Omega\setminus\Omega_{a_{k+1}}} |\nabla u_m|^p\, d^{\varepsilon} dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_{a_{k+1}}} |u_m|^p\, d^{\varepsilon-p}\, dx \;+$$

$$+ \int_{\Omega\setminus\Omega_{a_{k+1}}} |u|^p\, d^{\varepsilon-p}\, dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_{a_{k+1}}} h^q\, d^{\varepsilon} dx \Big] \leqq \chi(k) ,$$

kde χ je nezávislé na m a $\chi(k) \longrightarrow 0$ pro $k \longrightarrow +\infty$. Podobně užitím Hölderovy nerovnosti, (8.6) a odhadu (8.12) obdržíme

$$Y_k(m) = \Big| \int_{\Omega_{a_{k+1}}} b_o(x,u_m,\nabla u_m)\,(u_m-u)\, d^{\varepsilon} dx \;+$$

$$+\, \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_{a_{k+1}}} b_i(x,u_m,\nabla u_m)\,(u_m-u)\, d^{\varepsilon-1} \frac{\partial d}{\partial x_i}\, dx \Big| \leqq$$

$$\leqq c_{10} \Big(\int_{\Omega_{a_{k+1}}} |u_m-u|^p\, d^{\varepsilon-p}\, dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leqq$$

$$\leqq c_{10}\, a_{k+1}^{\frac{\beta}{p}} \Big(\int_{\Omega_{a_{k+1}}} |u_m-u|^p\, d^{\varepsilon-p+\beta}\, dx \Big)^{\frac{1}{p}}$$

s nějakým číslem $\beta > 0$. Protože vnoření

$$V_{p,\varepsilon} \hookrightarrow L_p(\Omega, d, \varepsilon-p+\beta)$$

je kompaktní a $\Omega_{a_{k+1}} \subset \Omega$, platí pro každé k, že $Y_k(m) \longrightarrow 0$ pro $m \longrightarrow +\infty$.

Konečně pro libovolné $\alpha > 0$ nalezneme takové k, že $X_k(m) < \alpha$, a pro takto nalezené k takové číslo n_1, že $Y_k(m) < \alpha$ kdykoliv $m \geqq n_1$. Tudíž pro libovolné α nalezneme takové n_1, že

$$|\langle S_2 u_m, u_m - u\rangle| \leqq X_k(m) + Y_k(m) < 2\alpha \quad \text{pro } m \geqq n_1 ,$$

a (8.18) je dokázáno.

8.4.2. Ověření podmínky (5.5)

Nejprve ukážeme, že operátor $v \longrightarrow S(w,v)$ je omezený. K tomu postačuje využít spolu s Hölderovou nerovností nerovnosti (2.6), (2.7), (4.9) a odhadnout

$$|\langle S(w,v),z\rangle| = \Big|\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega b_i(x,w,\nabla v) \frac{\partial z}{\partial x_i} d^\varepsilon dx + \langle S_2 w, z\rangle\Big| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{N} |b_i(x,w,\nabla v)|_{q,\varepsilon} \|z\|_{p,\varepsilon} + c(w) \|z\|_{p,\varepsilon} \leqq$$

$$\leqq \left[c_{11} \|w\|_{p,\varepsilon}^{p-1} + c_{12} \|v\|_{p,\varepsilon}^{p-1} + c_{13} \right] \|z\|_{p,\varepsilon} .$$

Dále ověříme hemispojitost, tj. konvergenci

$$\langle S(w,v_1+tv_2),z\rangle \longrightarrow \langle S(w,v_1),z\rangle \qquad \text{pro } t \longrightarrow 0$$

s libovolnými $w, v_1, v_2, z \in V_{p,\varepsilon}$. Stačí si k tomu uvědomit, že z vlastnosti Němyckého operátoru konverguje

$$b_i(x,w,\nabla v_1 + t\nabla v_2) \longrightarrow b_i(x,w,\nabla v_1) \qquad \text{pro } t \longrightarrow 0$$

silně v $L_q(\Omega, d, \varepsilon)$, $i=1,\dots,N$.

Zbývající nerovnost

$$\langle S(w,w)-S(w,v), w-v \rangle = \langle S_1(w,w)-S_1(w,v), w-v \rangle \geqq 0$$

je přímým důsledkem (8.8).

8.4.3. Ověření podmínky (5.6)

Užitím věty 4.9, Hölderovy nerovnosti a růstových podmínek (8.6) máme

$$\left| \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} b_i(x,w,\nabla w)\, z\, d^{\varepsilon-1} \frac{\partial d}{\partial x_i}\, dx \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{c_{14}}{|\varepsilon-p+1|} \left(\|w\|_{p,\varepsilon}^{p-1} + |h|_{q,\varepsilon} \right) \|z\|_{p,\varepsilon} .$$

Stejně jako v odstavci 8.4.2 je pak operátor $w \longrightarrow S(w,v)$ omezený. Jeho hemispojitost vyplývá opět z vlastnosti Němyckého operátorů.

8.4.4. Ověření podmínky (5.7)

Položme nejprve

$$G_m(x) = \sum_{i=1}^{N} \left[b_i(x,u_m(x),\nabla u_m(x)) - b_i(x,u_m(x),\nabla u(x)) \right] .$$

$$. \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right) d^{\varepsilon}(x) .$$

Základním výsledkem tohoto odstavce je následující lemma, jehož důkaz probíhá analogicky jako obdobné tvrzení z [19].

<u>Lemma</u> 8.8. Jestliže $\int_{\Omega} G_m(x)\, dx \longrightarrow 0$, potom existuje podposloupnost $\{u_k\}_k$ vybranná z $\{u_m\}_m$ (pro jednoduchost nebudeme užívat správnější zápis $\{u_{m_k}\}_k$) taková, že

$$b_i(x,u_k,\nabla u_k) \longrightarrow b_i(x,u,\nabla u) \quad \text{slabě v } L_q(\Omega,d,\varepsilon),\ i=0,\dots,N.$$

<u>Důkaz</u>. Vzhledem k nerovnosti (8.8) platí $G_m \geqq 0$ skoro všude v Ω. Protože $u_m \longrightarrow u$ silně v $L_p(\Omega, d, \varepsilon)$ (vnoření $V_{p,\varepsilon} \hookrightarrow L_p(\Omega, d, \varepsilon)$ je kompaktní), můžeme vybrat takovou podposloupnost $\{k\}$ přirozených čísel, pro kterou bude

(8.19) $\quad u_k(x) \longrightarrow u(x),\ G_k(x) \longrightarrow 0$ pro všechna $x \in \Omega \setminus Z$, meas $Z = 0$.

Můžeme předpokládat, že pro funkce r, h z (8.6) a (8.7) je $r(x), h(x) < +\infty$ a $|\nabla u_k(x)|, |\nabla u(x)| < +\infty$ kdykoliv $x \in \Omega \setminus Z$. Vezměme proto nějaké pevné $x \in \Omega \setminus Z$ a položme $\eta_k = u_k(x)$, $\eta = u(x)$, $\xi = \nabla u(x)$ a nechť ξ^* je hromadný bod posloupnosti $\{\xi_k\}_k$, kde $\xi_k = \nabla u_k(x)$. Platí

(8.20) $\quad |\xi^*| < +\infty$,

neboť vzhledem k (8.6) a (8.7) je

$$G_k(x) \geqq d^{\varepsilon}(x)\Big[\sum_{i=1}^{N} b_i(x, \eta_k, \xi_k)\, \xi_{ki} - N\beta_o\, |\xi|\, (\, |\xi_k|^{p-1} +$$

$$+ d^{-(p-1)+\gamma}\, |\eta_k|^{p-1} + h(x)) - N\beta_o(|\xi| + |\xi_k|)\, (\, |\xi|^{p-1} +$$

$$+ d^{-(p-1)+\gamma}\, |\eta_k|^{p-1} + h(x)) + b_o(x, \eta_k, \xi_k)\, \eta_k -$$

$$- \beta_o\, |\eta_k|\, (d^{-1}(x)\, |\xi_k|^{p-1} + d^{-p}(x)\, |\eta_k|^{p-1} + d^{-1}(x)h(x))\Big] \geqq$$

$$\geqq d^{\varepsilon}(x)\ \beta_1\, |\xi_k|^p - c_{15}\, (\, |\xi_k|^{p-1} + |\xi_k| + 1)$$

a dále $G_k(x) \longrightarrow 0$ podle (8.19) ($\{|\eta_k|\}_k$ je omezená posloupnost). Protože funkce B_i splňují Carathéodoryho podmínky, existuje množina $Z' \subset \Omega$, meas $Z' = 0$, $Z \subset Z'$ tak, že funkce

$b_i(x, \tilde{\eta}, \tilde{\xi})$ je spojitá pro $x \in \Omega \setminus Z'$ v $\tilde{\eta}$ a $\tilde{\xi}$, a tedy vzhledem k (8.19) a (8.20) obdržíme

$$d^{\varepsilon}(x) \sum_{i=1}^{N} [b_i(x, \eta, \xi^*) - b_i(x, \eta, \xi)] (\xi_i^* - \xi_i) = 0 .$$

Vzhledem k nerovnosti (8.8) je pak $\xi^* = \xi$.

Konečně opět z Carathéodoryho podmínek plyne

$$b_i(x, u_k(x), \nabla u_k(x)) \longrightarrow b_i(x, u(x), \nabla u(x))$$

pro skoro všechna $x \in \Omega$, $i = 0, \ldots, N$. Protože posloupnosti $\{b_i(x, u_k, \nabla u_k)\}_k$, $i = 0, \ldots, N$, jsou omezené v $L_q(\Omega, d, \varepsilon)$ a protože tento prostor je reflexivní, můžeme psát

$$b_i(x, u_k, \nabla u_k) \longrightarrow b_i(x, u, \nabla u) \quad \text{slabě v } L_q(\Omega, d, \varepsilon).$$

(Slabá limita je v našem případě nezávislá na výběru konvergující podposloupnosti z posloupnosti $\{u_k\}_k$.) Tím je lemma 8.8 dokázáno.

Konečně můžeme přistoupit k ověření podmínky (5.7). Podle předpokladu $\langle S(u_m, u_m) - S(u_m, u), u_m - u \rangle \longrightarrow 0$, neboli $\int_{\Omega} G_m(x)\, dx \longrightarrow 0$ pro $m \longrightarrow +\infty$. Vzhledem k lemmatu 8.8 máme pro vybrannou podposloupnost $\{u_k\}_k$ a každé $i = 0, \ldots, N$

$$(8.21) \qquad b_i(x, u_k, \nabla u_k) \longrightarrow b_i(x, u, u) \quad \text{slabě v } L_q(\Omega, d, \varepsilon) .$$

Zároveň $u_k \longrightarrow u$ skoro všude v Ω, tedy pro $v \in V_{p,\varepsilon}$ rovněž $b_i(x, u_k(x), \nabla v(x)) \longrightarrow b_i(x, u(x), \nabla v(x))$ skoro všude v Ω, $i = 0, \ldots, N$, a vzhledem k omezenosti posloupností $\{b_i(x, u_k, \nabla v)\}_k$, $i = 0, \ldots, N$, v prostoru $L_q(\Omega, d, \varepsilon)$ bude

$$(8.22) \qquad b_i(x, u_k, \nabla v) \longrightarrow b_i(x, u, \nabla v) \quad \text{slabě v } L_q(\Omega, d, \varepsilon).$$

Jestliže dále $z \in C_0^{\infty}(\Omega)$, potom funkce

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} d^{\varepsilon}, \quad z d^{\varepsilon}, \quad z d^{\varepsilon - 1} \frac{\partial d}{\partial x_i} \in [L_q(\Omega, d, \varepsilon)]^* = L_p(\Omega, d, -\varepsilon(p-1)),$$

a proto vzhledem k (8.21), (8.22) platí

$$\langle S(u_k,v),z\rangle \longrightarrow \langle S(u,v),z\rangle \ .$$

Protože množina $C_o^\infty(\Omega)$ je hustá v $V_{p,\varepsilon}$, obdrželi jsme pro libovolné $v \in V_{p,\varepsilon}$, že

$$S(u_k,v) \longrightarrow S(u,v) \quad \text{slabě v } [V_{p,\varepsilon}]^* \ ,$$

což jsme chtěli ukázat.

8.5. EXISTENCE SLABÉHO ŘEŠENÍ

8.5.1. Existence slabého řešení

V předchozích odstavcích jsme ověřili, že operátor S a prostory V_p^n splňují podmínky (5.2) a (5.5)-(5.8). Výsledky kapitoly 5, které jsou jistým zjemněním metody pseudomonotonních operátorů, proto zaručují existenci řešení rovnice $Su = g$, tj. rovnice $J^*Tu = J^*f$. Vzhledem k vlastnostem zobrazení J^* má řešení i rovnice $Tu = f$ (pro vhodné hodnoty ε). Shrňme získané výsledky v následujících větách.

<u>Věta</u> 8.9. Nechť funkce $b_i: \Omega \times R \times R^N \longrightarrow R$, $i=0,\dots,N$, splňují Carathéodoryho podmínky a nerovnosti (8.6)-(8.8). Potom existuje interval I, $0 \in \text{int } I$, takový, že pro každé $\varepsilon \in I$ má Dirichletův problém (8.5) alespoň jedno slabé řešení $v \in W_o^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon)$ kdykoliv

$$f = f_o - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \ , \quad f_o,f_1,\dots,f_N \in L_q(\Omega,d,\varepsilon).$$

<u>Věta</u> 8.10. Nechť funkce $a_i: \Omega \times R \times R^N \longrightarrow R$, $i=0,\dots,N$, splňují Carathéodoryho podmínky a nerovnosti (8.2)-(8.4). Potom existuje interval I, $0 \in \text{int } I$, pro který platí:

Je-li $\varepsilon \in I$, potom nehomogenní Dirichletův problém (8.1) má alespoň jedno slabé řešení $u \in W^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon)$ kdykoliv

$$f = f_o - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \ , \ f_o,f_1,\dots,f_N \in L_q(\Omega,d,\varepsilon) \text{ a } \varphi \in W^{1,p}(\Omega,d,\varepsilon).$$

Poznámka k jednoznačnosti řešení. V případě, že $\varepsilon < 0$, můžeme uvažovat vnoření $W^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$ (resp. vnoření $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$) a dále $[\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega, d, -\varepsilon(p-1))]^* \hookrightarrow [\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)]^*$ a $L_q(\Omega, d, \varepsilon) \hookrightarrow L_q(\Omega)$. Pro pravé strany $f \in [V_{p',-\varepsilon(p-1)}]^*$, $\varphi \in W^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$ je proto $f \in [\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)]^*$, $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$. Má-li problém (8.1) (resp. (8.5)) právě jedno slabé řešení $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (resp. $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$), potom nutně (v případě $\varepsilon \in I$) je vzhledem k existenci slabého řešení ve váhových prostorech $u \in W^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$ (resp. $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$). Pro $\varepsilon < 0$, $\varepsilon \in I$, proto z jednoznačnosti slabého řešení v obvyklých Sobolevových prostorech problému (8.1) (resp. (8.5)) plyne jednoznačnost slabého řešení ve váhových prostorech.

Pro $\varepsilon > 0$ zůstává problémem, jak zformulovat rozumné podmínky a ukázat podobným způsobem jednoznačnost řešení problému (8.1) (resp. (8.5)) v Sobolevově váhovém prostoru $W^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$ (resp. $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$).

8.5.2. Příklad

Uvažujme problém (pro $1 < p < 2$ definujeme $|0|^{p-2}.0 = 0$)

$$(8.23)\quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + A\,|u|^{p-2}u = f & \text{v } \Omega, \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega, \end{cases}$$

kde Ω je oblast s lipschitzovskou hranicí, $p > 1$ a $A \in \langle 0, \infty)$. (V závislosti na oblasti Ω a odhadech, které budeme provádět a které vycházejí v obecném případě z podmínky (8.3), bychom mohli uvažovat i záporná A, ovšem dostatečně blízká nule.)

Protože jsou splněny předpoklady odstavce 8.1.2 s funkcemi

$$a_i(x, \eta, \xi) = |\xi|^{p-2}\xi_i\,, \quad i=1,\dots,N\,,$$

$$a_0(x, \eta, \xi) = |\eta|^{p-2}\eta\,,$$

lze na problém (8.23) aplikovat větu 8.9 (nebo větu 8.10). Zbývá nalézt co možná největší interval I takových mocnin ε váhových prostorů $W_0^{1,p}(\Omega, d, \varepsilon)$, ve kterých je zaručena existence řešení problému (8.23). Nabízí se provést znovu odhady z důkazu lemmatu 8.3 pro náš příklad. Obdržíme

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial (u d^\varepsilon)}{\partial x_i} dx + A \int_\Omega |u|^{p-2} u^2 d^\varepsilon dx =$$

$$= \int_\Omega |\nabla u|^p d^\varepsilon dx + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} u\, d^{\varepsilon-1} \frac{\partial d}{\partial x_i} dx + A \int_\Omega |u|^p d^\varepsilon dx ,$$

a protože $\left| \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial d}{\partial x_i} \right| \leqq |\nabla u|$, $A \geqq 0$, máme užitím Hölderovy nerovnosti a věty 4.9

$$\mathcal{G} \geqq |||u|||_{p,\varepsilon}^{p} - |\varepsilon| \left(\int_\Omega |\nabla u|^p d^\varepsilon dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |u|^p d^{\varepsilon-p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \geqq$$

$$\geqq \left[1 - |\varepsilon|\, c^{\frac{1}{p}} \frac{p}{|\varepsilon - p + 1|} \right] |||u|||_{p,\varepsilon}^{p} .$$

Výraz v hranatých závorkách je ovšem kladný pro

$$\varepsilon \in \left(\frac{-p+1}{c^{1/p} - 1} , \frac{p-1}{c^{1/p} + 1} \right), \text{ kde konstanta } c = c(\Omega) = 1$$

pro konvexní oblast Ω.

Vraťme se nyní k lineárnímu problému a ukažme, že metoda kapitoly 8 dává lepší výsledek než užití zobecněného Laxova-Milgramova lemmatu v kapitole 7.

Pro $p=2$, $A=0$ a pro konvexní oblast Ω obdržíme problém (7.1) s Laplaceovým operátorem, který podle příkladu 7.2 je řešitelný v Sobolevových váhových prostorech, když $\varepsilon \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Nyní jsme obdrželi $\varepsilon \in (-1,\frac{1}{3})$. Tento výsledek je možné dále vylepšit, když znovu aplikujeme lemma 6.2.

<u>Věta</u> 8.11. Nechť $\Omega \subset R^N$ je konvexní omezená oblast, $A \geqq 0$. Jestliže je $\varepsilon \in (-1,1)$, potom existuje konstanta $k = k(\varepsilon) > 0$ taková, že platí nerovnosti

$$\sup_{\|v\|_{-\varepsilon} \leqq 1} \left[\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + A \int_{\Omega} u\, v\, dx \right] \geqq k \|u\|_{\varepsilon}$$

(8.24) pro každé $u \in V_{2,\varepsilon}$,

$$\sup_{\|u\|_{\varepsilon} \leqq 1} \left[\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + A \int_{\Omega} u\, v\, dx \right] \geqq k \|v\|_{-\varepsilon}$$

pro každé $v \in V_{2,-\varepsilon}$

a že Dirichletův problém

$$(8.25) \quad \begin{cases} -\Delta u + A\, u = f & v\ \Omega, \\ u = 0 & na\ \partial\Omega, \end{cases}$$

má právě jedno slabé řešení $u \in V_{2,\varepsilon} = W_0^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)$ kdykoliv

$$f = f_0 - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \quad f_0, f_1, \ldots, f_N \in L_2(\Omega, d, \varepsilon).$$

<u>Důkaz</u>. Druhá část tvrzení vyplývá z lemmatu 6.1 (nebo z lemmatu 6.2) a nerovností (8.24), které budeme dále dokazovat.

Položme pro jednoduchost

$$a(u,v) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + A \int_{\Omega} u\, v\, dx .$$

Ukázali jsme již, že libovolná lineární forma $f \in [W_0^{1,2}(\Omega, d, -\varepsilon)]^*$ má jednoznačné vyjádření tvaru $\langle f, v \rangle = a(u,v)$, $v \in$ $\in W_0^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)$, a že platí první nerovnost v (8.24), když bude $\varepsilon \in (-1,\frac{1}{3})$. Z toho ihned odvodíme, že bilineární forma

$$a(.,.): W_0^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon) \times W_0^{1,2}(\Omega, d, -\varepsilon) \longrightarrow R$$

 Sz 4537 V

je v případě $\varepsilon \in (-1,\frac{1}{3})$ nedegenerovaná (viz kapitolu 6). Kdyby totiž bylo $a(u,v)=0$ pro každé $v \in W_0^{1,2}(\Omega,d,-\varepsilon)$, víme již, že nutně $u=0$. Nechť dále pro nějaké $v \neq 0$ platí $a(u,v)=0$ pro všechna $u \in W_0^{1,2}(\Omega,d,\varepsilon)$ a vyvoďme spor. Protože existuje $f \in [W_0^{1,2}(\Omega,d,-\varepsilon)]^*$ takové, že $\langle f,v\rangle \neq 0$, a jelikož existuje $\tilde{u}$ splňující $a(\tilde{u},.)= \langle f,.\rangle$, bude rovněž $a(\tilde{u},v) \neq 0$.

Jakmile máme zaručenu nedegenerovanost formy $a(.,.)$, můžeme užít tvrzení (i) lemmatu 6.2. Pro $\varepsilon \in (-1,\frac{1}{3})$ tedy existují konstanty $m_1(\varepsilon), m_2(\varepsilon) > 0$ takové, že

$$\sup_{\|v\|_{-\varepsilon} \leq 1} a(u,v) \geq m_1(\varepsilon)\,\|u\|_\varepsilon\ , \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega,d,\varepsilon),$$

$$\sup_{\|u\|_{\varepsilon} \leq 1} a(u,v) \geq m_2(\varepsilon)\,\|v\|_{-\varepsilon}\ , \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega,d,-\varepsilon)\ .$$

Využijeme-li dále symetrie formy $a(.,.)$, obdržíme ihned

$$\sup_{\|v\|_{-\varepsilon} \leq 1} a(u,v) \geq c(\varepsilon)\,\|u\|_\varepsilon\ , \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega,d,\varepsilon),$$

kde

$$c(\varepsilon)= \begin{cases} m_1(\varepsilon) & \text{pro} \quad \varepsilon \in (-1,\frac{1}{3}\rangle\ , \\ \max\,[\,m_1(\varepsilon), m_2(\varepsilon)] & \text{pro} \quad \varepsilon \in (-\frac{1}{3},\frac{1}{3})\ , \\ m_2(\varepsilon) & \text{pro} \quad \varepsilon \in \langle\frac{1}{3},1)\ . \end{cases}$$

První z nerovností (8.24) je dokázána. Stejně tak je možné postupovat v případě druhé nerovnosti nebo stačí si opět uvědomit symetrii formy $a(.,.)$.

III. N E U M A N N Ů V   P R O B L É M

FORMULACE PROBLÉMU

Uvažujme Neumannův problém

$$\text{(III.1)}\quad \begin{cases} \sum\limits_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}(a_{\alpha\beta}(x)\, D^{\beta}u(x)\,) = f(x) \quad \text{v } \Omega\,, \\ \sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=1} a_{\alpha\beta}\, \nu_{\alpha}\, D^{\beta}u = g \quad \text{na } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

kde ν_{α} jsou složky vnější normály ν k hranici $\partial\Omega$, D^{α} značí diferenciální operátor s multiindexem α. Přitom koeficienty $a_{\alpha\beta}$ v dalším upřesníme tak, aby bilineární forma

$$\text{(III.2)}\qquad a(u,v) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \int_{\Omega} a_{\alpha\beta}\, D^{\beta}u\, D^{\alpha}v\, dx$$

příslušející problému (III.1) byla omezená na prostoru $W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ a aby byla $W^{1,2}(\Omega)$-eliptická, tj. aby existovala konstanta $c_0 > 0$ taková, že pro každé $u \in W^{1,2}(\Omega)$ platí

$$a(u,u) \geq c_0\, \|u\|^2\ .$$

<u>Definice</u>. Řekneme, že funkce $u \in W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ je slabým řešením Neumannova problému (III.1), jestliže pro každé $v \in W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)$ platí

$$\text{(III.3)}\qquad a(u,v) = F(v)\ .$$

Přitom funkcionál F má (po formálním odvození z (III.1)) tvar

$$\text{(III.4)}\qquad F(v) = \int_{\Omega} f\, v\, dx + \int_{\partial\Omega} g\, v\, dS\ .$$

Při vyšetřování rovnice (III.3) budeme uvažovat obvykle obecnější situaci, kdy $F \in [W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^*$.

<u>Poznámka</u>. V rovnici (III.3) je možné uvažovat testovací funkce v z množiny $C^{\infty}(\overline{\Omega})$, pokud bude tato množina funkcí hustá ve váhovém prostoru $W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)$ (viz např. [12]).

Jako příklad obecně zformulovaného problému (III.1) uveďme úlohu

$$\text{(III.5)} \quad \begin{cases} -\Delta u + \rho u = f & v\ \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & na\ \partial\Omega, \end{cases}$$

kde $\rho \in L_\infty(\Omega)$, $\rho(x) \geqq c > 0$ skoro všude v Ω a kde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ značí derivaci ve směru vnější normály k hranici $\partial\Omega$.

9. N E U M A N N Ů V P R O B L É M V P Ř Í P A D Ě N - m ≧ 3

9.1. EXISTENCE SLABÉHO ŘEŠENÍ

V této kapitole bude $\Omega \subset R^N$ omezená oblast, $M \subset \partial\Omega$ bude varieta dimenze m, přičemž

$$N - m \geqq 3 .$$

Oblast Ω bude třídy $Q^{0,1}(M)$ (viz odstavec 3.1.3).

Protože se dále budeme zabývat slabým řešením problému (III.1) ve váhových prostorech a tudíž rovnicí (III.3), je možné přijmout slabší požadavky na koeficienty $a_{\alpha\beta}$ než ty, které jsou potřebné k obvyklé formulaci Neumannova problému (III.1). Předpokládejme proto, že je

$$\text{(9.1)} \qquad a_{\alpha\beta}\, d_M^{2-|\alpha|-|\beta|} \in L_\infty(\Omega) .$$

Bilineární forma a(.,.) definovaná vztahem (III.2) je potom pro $\varepsilon \in R$ omezená na prostoru $W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon) \times W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)$, neboť užitím Hölderovy nerovnosti a věty 4.8 o vnoření obdržíme

$$\left| \int_\Omega a_{\alpha\beta} D^\beta u\, D^\alpha v\, dx \right| \leqq \left(\int_\Omega |a_{\alpha\beta}|\, d_M^{2-|\alpha|-|\beta|} |D^\beta u|^2 d_M^{\varepsilon+2|\beta|-2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot \left(\int_\Omega |a_{\alpha\beta}|\, d_M^{2-|\alpha|-|\beta|} |D^\alpha v|^2 d_M^{-\varepsilon+2|\alpha|-2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqq \text{const}\, \|u\|_{M,\varepsilon} \|v\|_{M,-\varepsilon}$$

Vzhledem k zobecněnému Laxovu-Milgramovu lemmatu 6.1

je vyšetřování řešitelnosti rovnice (III.3) převedeno na zkoumání elipticity bilineární formy

$$a(.,.): W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon) \times W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon) \longrightarrow R$$

ve složkách. Problémem elipticity se budeme zabývat v odstavci 9.2, dříve však zformulujeme tvrzení o existenci slabého řešení, které je naším cílem a které tedy z výsledků odstavce 9.2 vyplývá.

<u>Věta</u> 9.1. Nechť $\Omega \subset R^N$ je omezená oblast třídy $Q^{0,1}(M)$, kde $M \subset \partial\Omega$ je uzavřená varieta dimenze m a $N-m \geq 3$. Dále nechť bilineární forma $a(.,.)$ (definovaná vztahem (III.2)) je $W^{1,2}(\Omega)$-eliptická a nechť její koeficienty splňují podmínku (9.1).

Potom existuje interval I, $0 \in \operatorname{int} I$, takový, že pro každé $\varepsilon \in I$ má rovnice (III.3) právě jedno řešení $u \in W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ kdykoliv $F \in [W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^*$. Navíc existuje konstanta $c_1 = c_1(a, \Omega, M, \varepsilon) > 0$ tak, že $\|u\|_{M,\varepsilon} \leq c_1 \|F\|_*$.

Vyslovené tvrzení formuluje postačující podmínku existence slabého řešení Neumannova problému (III.1) s tím, že funkcionál F daný vztahem (III.4) bude náležet prostoru $[W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^*$. Tato situace nastane např. pro množinu M jednobodovou, $\varepsilon > 2-N$ a $f \in L_2(\Omega, d_M, \varepsilon)$, $g \in L_2(\partial\Omega, d_M, -\varepsilon+1)$ nebo pro $M = \partial\Omega$, $f \in L_2(\Omega, d_M, \varepsilon)$, $g \in L_2(\partial\Omega)$ (zde ovšem $N-m=1$). K tomu si stačí uvědomit větu o vnoření prostoru $W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)$ do prostoru $L_2(\partial\Omega, d_M, \eta)$ s vhodným η (viz odstavec 4.4.2) a pak užít Hölderovy nerovnosti a ukázat

$$|F(v)| \leq \left(|f|_\varepsilon + c_2(\Omega, M, \varepsilon)\, |g|_{L_2(\partial\Omega, d_M, \eta)} \right) \|v\|_{-\varepsilon} .$$

Abychom mohli tuto charakteristiku provést pro obecnou varietu M, potřebovali bychom příslušné věty o stopách funkcí ve váhových prostorech, které nejsou prozatím dostatečně rozpracovány.

9.2. ELIPTICITA FORMY a(.,.)

V tomto odstavci dokážeme následující lemma, které spolu se zobecněným Laxovým-Milgramovým lemmatem dává tvrzení věty 9.1.

Lemma 9.2. Nechť jsou splněny předpoklady věty 9.1. Potom existuje interval I obsahující okolí nuly takový, že pro každé $\varepsilon \in I$ je bilineární forma

$$a(.,.): W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon) \times W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon) \longrightarrow R$$

eliptická v obou složkách.

Důkaz. Stačí dokázat pouze elipticitu formy a(.,.) v první složce pro $\varepsilon \in I_1$, kde I_1 je vhodný interval obsahující otevřené okolí nuly. Analogicky lze dokázat elipticitu v druhé složce pro hodnoty $-\varepsilon$ z vhodného intervalu I_2. Stačí položit $I = I_1 \cap (-I_2)$.

Nechť $u \in W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ a položme $v = u d_M^{\varepsilon}$. Protože $|\nabla d_M(x)| = 1$ pro skoro všechna $x \in \Omega$, obdržíme z věty 4.8 o vnoření, že $v \in W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)$ pro $\varepsilon > 2+m-N$. Skutečně máme

$$\|v\|^2_{M,-\varepsilon} = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} d_M^{\varepsilon} + \varepsilon u d_M^{\varepsilon-1} \frac{\partial d_M}{\partial x_i} \right|^2 d_M^{-\varepsilon}\, dx +$$

$$+ \int_{\Omega} |u d_M^{\varepsilon}|^2 d_M^{-\varepsilon}\, dx \leqq 2 \left(\|u\|^2_{M,\varepsilon} + \varepsilon^2 \int_{\Omega} |u|^2 d_M^{\varepsilon-2}\, dx \right) \leqq$$

$$\leqq c_3(\Omega, M, \varepsilon) \|u\|^2_{M,\varepsilon} .$$

Obdobně lze ukázat, že funkce $u d_M^{\varepsilon/2} \in W^{1,2}(\Omega)$ pro $\varepsilon > 2+m-N$ a dále

$$\|ud_M^{\varepsilon/2}\|^2 = \|u\|^2_{M,\varepsilon} + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \Big(\varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x_i} d_M^{\varepsilon-1} \frac{\partial d}{\partial x_i} +$$

$$(9.2) \qquad + \frac{\varepsilon^2}{4} u^2 d_M^{\varepsilon-2} \Big|\frac{\partial d_M}{\partial x_i}\Big|^2 \Big) dx \geqq$$

$$\geqq (1 - |\varepsilon| c_4(\Omega,M,\varepsilon) - \varepsilon^2 c_5(\Omega,M,\varepsilon)) \|u\|^2_\varepsilon \quad ,$$

přičemž z Hardyho nerovnosti užité v důkazu věty 4.8 plyne, že c_4 a c_5 jsou jako funkce závislé na ε omezené, když $\varepsilon - 2 - m + N \geqq \lambda' > 0$.

Nyní pišme

$$a(u, ud_M^\varepsilon) = a(ud_M^{\varepsilon/2}, ud_M^{\varepsilon/2}) + B(u),$$

kde B(u) je výraz obsahující členy tvaru

$$\int_\Omega a_1 u \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial d_M^\varepsilon}{\partial x_j} dx, \qquad \int_\Omega a_2 u \frac{\partial u}{\partial x_i} d_M^{\varepsilon/2} \frac{\partial d_M^{\varepsilon/2}}{\partial x_j} dx ,$$

$$\int_\Omega a_3 u^2 \frac{\partial d_M^{\varepsilon/2}}{\partial x_i} \frac{\partial d_M^{\varepsilon/2}}{\partial x_j} dx, \qquad \int_\Omega a_4 u^2 d_M^{\varepsilon/2} \frac{\partial d_M^{\varepsilon/2}}{\partial x_i} dx .$$

Přitom $a_1, a_2, a_3, a_4 d_M \in L_\infty(\Omega)$ a tedy opět užitím věty 4.8 o vnoření obdržíme

$$(9.3) \qquad |B(u)| \leqq |\varepsilon| \; c_6(\Omega,M,\varepsilon) \|u\|^2_{M,\varepsilon} .$$

Protože bilineární forma a(.,.) je $W^{1,2}(\Omega)$-eliptická, tj.

$$a(ud_M^{\varepsilon/2}, ud_M^{\varepsilon/2}) \geqq c_o \|ud_M^{\varepsilon/2}\|^2 \quad ,$$

dává tento odhad spolu s (9.2) a (9.3) nerovnost

$$a\Big(u, \frac{v}{\|v\|_{M,-\varepsilon}}\Big) \geqq \frac{c_o[1 - |\varepsilon| c_4 - \varepsilon^2 c_5]}{\sqrt{c_3}} \|u\|_{M,\varepsilon} .$$

Pro ε z dostatečně malého okolí nuly, tj. z vhodného intervalu I_1, bude výraz v hranatých závorkách kladný a bilineární forma a(.,.) bude eliptická v první složce.

Poznámka. Metoda, kterou jsme užili při vyšetřování elipticity v první složce, předpokládá $\varepsilon > 2+m-N$. Obdobně pro elipticitu v druhé složce $-\varepsilon > 2+m-N$, dohromady tedy musí platit

$$2+m-N < N-m-2 \text{ .}$$

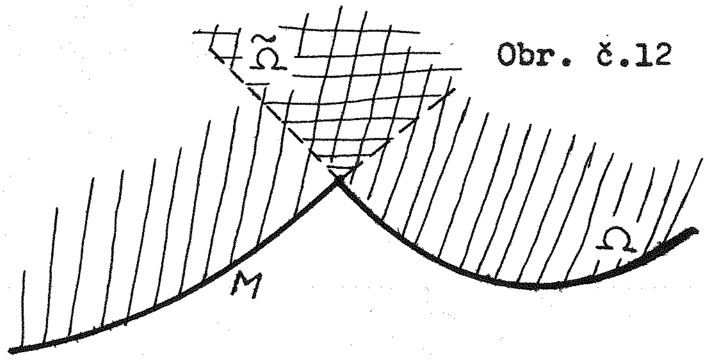
To je důvodem našeho omezení $N-m \geq 3$.

10. NEUMANNŮV PROBLÉM V PŘÍPADĚ N-m=1

10.1. ÚVOD

V této kapitole se budeme zabývat existencí slabého řešení Neumannova problému (III.1) v případě N-m=1. Zde nemůžeme užít věty o vnoření prostoru $W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ do prostoru $L_2(\Omega, d_M, \varepsilon - 2)$. Rozpracujeme proto novou metodu, která spočívá ve volbě vhodné testovací funkce (místo funkce ud_M^ε z kapitoly 9) a užití integrálních nerovností (2.4),(2.5).

Hlavní myšlenku této metody objasníme v jednoduchém případě, kdy oblast Ω bude krychle a množina M její stěna (viz odstavec 10.2). Pro obecnější oblast Ω dochází ovšem ke komplikacím technického rázu, které souvisejí s vhodným popisem hranice $\partial\Omega$ a jejího okolí pomocí křivočarých souřadnic. Jestliže Ω bude oblast s hladkou hranicí, využijeme popisu z odstavce 3.2 a pro množinu $M=\partial\Omega$ vyšetříme existenci slabého řešení problému (III.1) (odstavec 10.3). Ještě složitější je situace pro nehladkou hranici. Problémy, které při tom vznikají, ukážeme v odstavci 10.4 pro případ N=2 na oblasti Ω, která má po částech hladkou hranici s konvexními "rohy". V případě nekonvexních "rohů" by totiž existovala neprázdná podoblast $\tilde{\Omega}$ taková, že vzdálenost jejích bodů od množiny M by byla vzdáleností od jediného bodu - vrcholu nekonvexního "rohu" (viz obrázek č.12).



Obr. č.12

Pro podoblast $\tilde{\Omega}$ by tím nastala situace, kterou se budeme zabývat až v následující kapitole 11 (kdy N-m=2). Tentýž problém může vzniknout, jestliže varieta M nebude rovna celé hranici $\partial\Omega$.

V celé kapitole dále předpokládejme, že pro koeficienty bilineární formy a(.,.) definované vztahen (III.2) platí

$$a_{\alpha\beta} \in L_\infty(\Omega) \ ,$$

(10.1)
$$\sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leq 1} a_{\alpha\beta}(x)\ \xi_\alpha\,\xi_\beta \geq c_0 \sum_{|\alpha| \leq 1} |\xi_\alpha|^2$$

pro skoro všechna $x \in \Omega$ a každé $\xi = (\xi_{(0,\dots,0)},\dots,\xi_{(0,\dots,0,1)}) \in R^{N+1}$, kde $c_o > 0$ je vhodná konstanta. Nerovnost v (10.1) zaručuje, že forma a(.,.) je $W^{1,2}(\Omega)$-eliptická. Z předpokladů na koeficienty $a_{\alpha\beta}$ a z Hölderovy nerovnosti ihned plyne, že a(.,.) je dále omezená na prostoru

$$W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon) \times W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon) \ .$$

Abychom mohli aplikovat zobecněné Laxovo-Milgramovo lemma, musíme jako v předešlé části vyšetřit její elipticitu ve složkách.

Opět bude ve všech případech různé geometrie oblasti Ω postačující se zabývat elipticitou v první složce. Analogicky lze postupovat při vyšetřování elipticity bilineární formy a(.,.) ve složce druhé. Protože množina $C^\infty(\bar{\Omega})$ bude pro $\varepsilon < 1$ a pro uvažované množiny Ω, M hustá v prostoru $W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ (viz odstavec 4.1), stačí pro funkci $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ nalézt takovou funkci $v \in W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)$, aby platilo

(10.2)
$$\|v\|_{M,-\varepsilon} \leq c_1 \|u\|_{M,\varepsilon} \ ,$$

(10.3)
$$a(u,v) \geq c_2 \|u\|^2_{M,\varepsilon} \ .$$

Konstanty $c_1, c_2 > 0$ jsou přitom nezávislé na funkci u.

10.2. PŘÍPAD KRYCHLE

Nechť $\Omega = (0,1)^N$, $M = \{ x=(x_1,\dots,x_N) \in \partial\Omega \; ; \; x_N=0 \}$, tedy $d_M(x) = x_N$.

Pro $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ položíme nyní

$$v(x_1,\dots,x_N) = u(x_1,\dots,x_{N-1},1) - \int_{x_N}^{1} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1,\dots,x_{N-1},\xi) \, . \, \xi^\varepsilon \, d\xi \, .$$

Dostaneme

$$\frac{\partial v}{\partial x_N}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_N}(x) \, x_N^\varepsilon$$

a integrací per partes zapíšeme funkci v ve tvaru

$$v(x) = u(x) \, x_N^\varepsilon + \varepsilon \int_{x_N}^{1} u(x_1,\dots,x_{N-1},\xi) \, \xi^{\varepsilon-1} \, d\xi \, ,$$

tedy bude

$$\frac{\partial v}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \, x_N^\varepsilon + \varepsilon \int_{x_N}^{1} \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_1,\dots,x_{N-1},\xi) \, \xi^{\varepsilon-1} \, d\xi$$

pro $k=1,2,\dots,N-1$.

Dokážeme nejprve, že je splněna nerovnost (10.2) pro $\varepsilon < 1$. Pro jednoduchost budeme dále značit $(x_1,\dots,x_N) = (x',x_N)$. Užitím Fubiniho věty a nerovností (2.4),(2.5) (kde $\omega_1=0$, $\omega_2=1$, $\alpha=\varepsilon$) obdržíme pro $\varepsilon < 1$ odhad

$$\|v\|^2_{M,-\varepsilon} = \sum_{|\alpha|\le 1} \int_{(0,1)^N} |D^\alpha u(x)|^2 \, x_N^\varepsilon \, dx \, +$$

$$+ 2\varepsilon \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha\neq(0,\dots,0,1)}} \int_{(0,1)^{N-1}} \int_0^1 D^\alpha u(x) \int_{x_N}^1 D^\alpha u(x',\xi) \, \xi^{\varepsilon-1} d\xi \, d_{x_N} dx' \, +$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{\substack{|\alpha|=1 \\ \alpha\neq(0,\dots,0,1)}} \int_{(0,1)^{N-1}} \int_0^1 x_N^{-\varepsilon} \left(\int_{x_N}^1 D^\alpha u(x',\xi) \xi^{\varepsilon-1} d\xi \right)^2 dx_N dx' \le$$

$$\leq \left(1+ \frac{4|\varepsilon|}{1-\varepsilon} + \frac{4\,\varepsilon^2}{(1-\varepsilon)^2}\right) \|u\|^2_{M,\varepsilon} \quad .$$

Obdobně užitím (10.1), Hölderovy nerovnosti a nerovností (2.4),(2.5) odvodíme

$$a(u,v) = \sum_{|\alpha|,\,|\beta|\leq 1} \int_{(0,1)^N} a_{\alpha\beta}\, D^\beta u\, D^\alpha u\, x_N^\varepsilon \, dx +$$

$$+\, \varepsilon \sum_{\substack{|\alpha|,\,|\beta|\leq 1\\ \alpha\neq(0,\dots,0,1)}} \int_{(0,1)^N} a_{\alpha\beta}(x)\, D^\beta u(x) \int_{x_N}^1 D^\alpha u(x',\xi)\xi^{\varepsilon-1} d\xi \, dx \geq$$

$$\geq c_0 \|u\|^2_{M,\varepsilon} - |\varepsilon| \sum_{\substack{|\alpha|,\,|\beta|\leq 1\\ \alpha\neq(0,\dots,0,1)}} |a_{\alpha\beta}|_\infty \left(\int_{(0,1)^N} |D^\beta u|^2 x_N^\varepsilon \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{(0,1)^N} x_N^{-\varepsilon} \left(\int_{x_N}^1 D^\alpha u(x',\xi)\, \xi^{\varepsilon-1}\, d\xi \right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$\geq \left(c_0 - \frac{2|\varepsilon|}{1-\varepsilon}\, k_1\right) \|u\|^2_{M,\varepsilon} \quad ,$$

kde značíme

$$k_1 = \left(\sum_{\substack{|\alpha|,\,|\beta|\leq 1\\ \alpha\neq(0,\dots,0,1)}} |a_{\alpha\beta}|^2_\infty \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Jestliže bude

$$c_0 - \frac{2|\varepsilon|}{1-\varepsilon}\, k_1 > 0 \ ,$$

bude splněna nerovnost (10.3). Protože $2k_1 - c_0 > 0$, bude bilineární forma a(.,.) eliptická v první složce pro

$$\varepsilon \in \left(\frac{-c_0}{2k_1-c_0} \, , \, \frac{c_0}{2k_1+c_0} \right) = I_1 \ .$$

Analogicky obdržíme elipticitu formy a(.,.) v druhé složce pro

$$\varepsilon \in \left(\frac{-c_o}{2k_2+c_o} \,,\, \frac{c_o}{2k_2-c_o} \right) = I_2 \,,$$

kde značíme

$$k_2 = \Big(\sum_{\substack{|\alpha|,|\beta| \leq 1 \\ \beta \neq (0,\dots,0,1)}} |a_{\alpha\beta}|^2_\infty \Big)^{\frac{1}{2}} .$$

Tedy pro $\varepsilon \in I_1 \cap I_2$ bude forma $a(.,.)$ eliptická v obou složkách a rovnice (III.3) řešitelná ve váhovém prostoru $W^{1,2}((0,1)^N, x_N, \varepsilon)$.

Příklad. Jestliže položíme v úloze (III.5) $\rho(x) \equiv 1$, potom příslušná bilineární forma bude eliptická v obou složkách přinejmenším pro $\varepsilon \in (-1/3,\ 1/3)$.

10.3. OBLAST S HLADKOU HRANICÍ

V tomto odstavci budeme předpokládat, že $\Omega \subset R^N$ je omezená oblast s hladkou hranicí a že $M = \partial\Omega$, $d_M(x) = d(x)$. K popisu okolí hranice $\partial\Omega$ budeme užívat křivočarých souřadnic, které jsme zavedli v odstavci 3.2. V něm jsou též odvozeny všechny vztahy, které dále budeme potřebovat.

10.3.1. Elipticita

Nechť $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Stačí nalézt funkci $v \in W^{1,2}(\Omega, d, -\varepsilon)$ tak, aby byly splněny nerovnosti (10.2) a (10.3). Položme proto

$$(10.4) \quad v(x) = \begin{cases} u(x)\,\omega^\varepsilon & \text{pro } x \in \overline{V}_o \,, \\ u(t,\omega)\,\omega^\varepsilon - \displaystyle\int_s^\omega \frac{\partial u}{\partial \xi}(t,\xi)\,\xi^\varepsilon \, d\xi & \text{pro } x = \psi(t,s), \\ & (t,s) \in \overline{U}_k \times \langle 0,\omega), \ k=1,\dots,r \,. \end{cases}$$

Lemma 10.1. Jestliže $\varepsilon < 1$, potom pro každé $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ náleží funkce v definovaná předpisem (10.4) prostoru $W^{1,2}(\Omega, d, -\varepsilon)$ a je splněna nerovnost (10.2).

Důkaz. Protože pro $s \in \langle 0, \omega)$ je $\mathrm{dist}(\psi(t,s), \partial\Omega) = s$, funkce v je korektně definována a je spojitá v Ω. Abychom ověřili nerovnost (10.2), stačí odhadnout výrazy

$$\|v\|^2_{-\varepsilon;X} = \int_X |\nabla v|^2 d^{-\varepsilon}\, dx + \int_X |v|^2 d^{-\varepsilon}\, dx$$

obdobnými výrazy $\|u\|^2_{\varepsilon;X}$ s funkcí u, kde X bude postupně nahrazovat množiny $V_o, V_1, \dots, V_r$. Vzhledem ke spojitosti funkce v je totiž

$$\|v\|^2_{-\varepsilon} = \sum_{i=0}^{r} \|v\|^2_{-\varepsilon;V_i} .$$

Zřejmě $\|v\|^2_{-\varepsilon;V_o} \leqq c(\omega, \mathrm{diam}\,\Omega, \varepsilon)\, \|u\|^2_{\varepsilon;V_o}$. Dále pro $k=1,\dots,r$ dostáváme s ohledem k lemmatu 3.1 vyjádření

$$\|v\|^2_{-\varepsilon;V_k} = \int_{U_k} \int_0^{\omega} \Big(\sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{(1-s\,\varkappa_i(t))^2} \Big|\frac{\partial v(t,s)}{\partial t_i}\Big|^2 + \Big|\frac{\partial v(t,s)}{\partial s}\Big|^2 +$$

$$+ |v(t,s)|^2 \Big) s^{-\varepsilon} |[\mathrm{Jac}\,\psi](t,s)|\, ds\, dt.$$

Protože pro $(t,s) \in U_k \times (0,\omega)$ platí

$$(10.5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial s}(t,s) = \dfrac{\partial u}{\partial s}(t,s)\, s^{\varepsilon} , \\[2ex] v(t,s) = u(t,s)\, s^{\varepsilon} + \varepsilon \displaystyle\int_s^{\omega} u(t,\xi)\, \xi^{\varepsilon-1}\, d\xi , \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t_i}(t,s) = \dfrac{\partial u}{\partial t_i}(t,s)\, s^{\varepsilon} + \varepsilon \displaystyle\int_s^{\omega} \dfrac{\partial u}{\partial t_i}(t,\xi)\, \xi^{\varepsilon-1}\, d\xi , \end{cases}$$

a protože máme k dispozici nerovnosti (3.5), můžeme při odhadování výrazu $\|v\|^2_{-\varepsilon;V_k}$, k=1,...,r , postupovat stejně jako v odstavci 10.2, kdy $\Omega = (0,1)^N$. Obdržíme

$$\|v\|^2_{-\varepsilon;V_k} \leq c_1(\partial\Omega, \omega, \varepsilon) \ \|u\|^2_{\varepsilon;V_k}, \quad k=1,\dots,r ,$$

a tedy nerovnost (10.2) je splněna, je-li $v \in W^{1,2}(\Omega, d, -\varepsilon)$.

Značme dále

$$a_k(u,v) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq 1} \int_{V_k} a_{\alpha\beta} D^\beta u \, D^\alpha v \, dx ,$$

tedy

$$a(u,v) = \sum_{k=0}^{r} a_k(u,v) .$$

Nerovnost (10.3) pro vhodná ε je přímým důsledkem následujícího lemmatu.

<u>Lemma</u> 10.2. Existuje interval I_k, k=0,...,r, obsahující otevřené okolí nuly takový, že pro $\varepsilon \in I_k$ platí:

Pro každé $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ a funkci v definovanou vztahem (10.4) je

$$a_k(u,v) \geq c_2(\partial\Omega, a, \omega, \varepsilon) \ \|u\|^2_{\varepsilon;V_k} .$$

<u>Důkaz</u>. Případ k=0 je zřejmý. Pro ostatní množiny V_k, k=1,...,r, přepíšeme bilineární formu $a_k(u,v)$ pomocí vztahů

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial t_j} \frac{\partial t_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_i}$$

a dosadíme za funkce v, $\frac{\partial v}{\partial t_j}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$ ze (10.5). Úpravou nakonec obdržíme

$$(10.6) \qquad a_k(u,v) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq 1} \int_{V_k} a_{\alpha\beta} D^\beta u \, D^\alpha u \, d^\varepsilon \, dx + \varepsilon J ,$$

kde výraz J obsahuje konečný součet členů tvaru

$$\mathcal{J} = \int_{U_k} \int_0^\omega \bar{a}(t,s) w(t,s) \int_s^\omega z(t,\xi)\, \xi^{\varepsilon-1} \, d\xi \, ds \, dt .$$

Zde w je některá z funkcí $u, \dfrac{\partial u}{\partial s}, \dfrac{\partial u}{\partial t_j}$, $j=1,\dots,N-1$, a z je některá z funkcí $u, \dfrac{\partial u}{\partial t_i}$, $i=1,\dots,N-1$. Dále funkce $\bar{a}$ náleží prostoru $L_\infty(V_k)$, neboť $a_{\alpha\beta} \in L_\infty(\Omega)$, platí nerovnosti (3.5) a

$$\frac{\partial t_j}{\partial x_i}, \; \frac{\partial s}{\partial x_\ell} \in L_\infty(V_k) \quad \text{pro } j=1,\dots,N-1, \quad \ell=1,\dots,N.$$

Výraz $\mathcal{J}$ je pak možné odhadnout pomocí Hölderovy nerovnosti a nerovnosti (2.5) následovně

$$|\mathcal{J}| = |\bar{a}|_{L_\infty(V_k)} \left(\int_{U_k} \int_0^\omega w^2(t,s)\, s^\varepsilon \, ds \, dt \right)^{\frac{1}{2}} .$$

$$.\left(\int_{U_k} \int_0^\omega s^{-\varepsilon} \left(\int_s^\omega z(t,\xi)\, \xi^{\varepsilon-1} \, d\xi \right)^2 ds \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq |\bar{a}|_{L_\infty(V_k)} \frac{2}{|1-\varepsilon|} \sup_{t,s} ([\mathrm{Jac}\,\psi](t,s))^{-1} \left(\int_{V_k} w^2 \, d^\varepsilon \, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

$$.\left(\int_{V_k} z^2 \, d^\varepsilon \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_3(\partial\Omega, a, \omega) \frac{1}{|1-\varepsilon|} \|u\|^2_{\varepsilon;V_k} .$$

Z vztahů (10.1) a (10.6) konečně obdržíme

$$a_k(u,v) \geq \left[c_0 - \frac{|\varepsilon|}{|1-\varepsilon|} c_4(\partial\Omega, a, \omega) \right] \|u\|^2_{\varepsilon;V_k} ,$$

kde výraz v hranatých závorkách je pro dostatečně malá $|\varepsilon|$ kladný. Tím je lemma 10.2 dokázáno.

Pro ε z intervalu $I = \bigcap_{k=0}^{r} I_k$ máme nyní zaručenu elipticitu bilineární formy a(.,.) v první složce. Stejně tak je možné dokázat elipticitu v druhé složce pro ε z vhodného intervalu.

Z předchozího postupu je zřejmé, že velikosti intervalů I_k jsou závislé na prováděných odhadech a vlastně tedy na koeficientech $a_{\alpha\beta}$ bilineární formy a na křivosti hranice $\partial\Omega$.

10.3.2. Existence slabého řešení

Aplikací zobecněného Laxova-Milgramova lemmatu 6.1 ihned dostáváme následující tvrzení.

Věta 10.3. Nechť $\Omega \subset R^N$ je omezená oblast s hladkou hranicí, $M = \partial\Omega$ (tj. N-m=1) a nechť koeficienty $a_{\alpha\beta}$ bilineární formy a(.,.) definované vztahem (III.2) splňují podmínku (10.1).

Potom existuje interval I obsahující otevřené okolí nuly takový, že pro každé $\varepsilon \in I$ má Neumannův problém (III.1) právě jedno slabé řešení $u \in W^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)$, kdykoliv je pro pravé strany splněno $f \in L_2(\Omega, d, \varepsilon)$ a $g \in L_2(\partial\Omega)$. Navíc existuje konstanta $c = c(\Omega, a, \varepsilon)$ taková, že platí

$$\|u\|_\varepsilon \leqq c\,(\,|f|_\varepsilon + |g|_{L_2(\partial\Omega)}\,)\,.$$

K tomu stačí poznamenat, že v uvažovaném případě je prostor $W^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)$ vnořen do prostoru $L_2(\partial\Omega)$ a proto

$$|F(v)| \leqq |f|_\varepsilon\,|v|_{-\varepsilon} + |g|_{L_2(\partial\Omega)}\,|v|_{L_2(\partial\Omega)} \leqq$$

$$\leqq \text{const}\;(\,|f|_\varepsilon + |g|_{L_2(\partial\Omega)}\,)\;\|v\|_{-\varepsilon}\,.$$

10.4. OBLAST S KONVEXNÍMI "ROHY"

V tomto odstavci budeme předpokládat, že oblast $\Omega \subset R^2$ má vlastnosti popsané v odstavci 3.3. Dále bude $M = \partial\Omega$ a bilineární forma a(.,.) bude splňovat podmínku (10.1).

10.4.1. Volba testovací funkce

Připomeňme nejprve, že oblast Ω je rozdělena na množinu Ω' a množiny $\mathcal{U}_{i,j}, \mathcal{V}^+_{i,j}, \mathcal{V}^-_{i,j}$ (viz obrázek č.8, str.22). Pro funkci $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ položme

(10.7) $\quad v(x) =$

.....

$= u(x)\omega^\varepsilon \qquad$ pro $\quad x \in \Omega'$,

.....

$$= u(\alpha_i(t)+\omega n_i(t))\omega^\varepsilon - \int_s^\omega \frac{\partial u}{\partial \xi}(\alpha_i(t)+\xi n_i(t))\,\xi^\varepsilon\,d\xi$$

pro $x = \alpha_i(t)+sn_i(t)$, $x \in \mathcal{U}_{i,j}$, $i=0,\dots,r$, $j=0,\dots,q_i$,

.....

$$= u(\alpha_i(T_{i,j})+\omega n_i(T_{i,j}))\omega^\varepsilon -$$

$$- \int_t^{T_{i,j}} \frac{du}{d\xi}(\alpha_i(\xi)+R^+_{i,j}(\xi)n_i(\xi))\,[R^+_{i,j}(\xi)]^\varepsilon\,d\xi -$$

$$- \int_s^{R^+_{i,j}(t)} \frac{\partial u}{\partial \xi}(\alpha_i(t)+\xi n_i(t))\,\xi^\varepsilon\,d\xi$$

pro $x = \alpha_i(t)+sn_i(t) \in \mathcal{V}^+_{i,j}$ s $T_{i,j} = t_{i,j} + \vartheta^+_{i,j}$,

$i=0,\dots,r$, $j=0,\dots,q_i$,

.....

.....

$$= u(\alpha_i(P_{i,j})+\omega n_i(P_{i,j}))\,\omega^{\varepsilon} -$$

$$- \int_p^{P_{i,j}} \frac{du}{d\eta}(\alpha_i(\eta)+R^-_{i,j}(\eta)n_i(\eta))\, [R^-_{i,j}(\eta)]^{\varepsilon}\, d\eta -$$

$$- \int_s^{R^-_{i,j}(p)} \frac{\partial u}{\partial \eta}(\alpha_i(p)+\eta n_i(p))\, \eta^{\varepsilon}\, d\eta$$

pro $x = \alpha_i(p)+sn_i(p) \in \mathcal{V}^-_{i,j}$ s $P_{i,j}=t_{i,j}-\delta^-_{i,j}$,

$i=0,\dots,r,\ j=0,\dots,q_i$.

Na množinách $\mathcal{U}_{i,j}$ je testovací funkce volena stejně jako v předchozím odstavci tak, že ve směru kolmém k hranici je derivace funkce u násobena příslušnou vahou. Tento postup je složitější pro množiny $\mathcal{V}^+_{i,j}$, $\mathcal{V}^-_{i,j}$, kde musíme nejprve vhodně definovat hodnoty testovací funkce na "ose rohu" $[\beta_{i,j}]$ a pak ve směru kolmén k hranici přenásobit derivaci uvažovanou vahou.

Protože další postup pro odpovídající si množiny $\mathcal{U}_{i,j}$, $\mathcal{V}^+_{i,j}$, $\mathcal{V}^-_{i,j}$ bude stejný, budeme příslušné indexy vynechávat. Dále značíme hodnotu nějaké funkce z v bodě $x=\alpha(t)+sn(t) \in \mathcal{U}\cup\mathcal{V}^+\cup\mathcal{V}^-$ podle potřeby $z(x)$ nebo $z(t,s)$, jak bylo zavedeno v odstavci 3.2.2. Připomeňme ještě, že derivace funkce z splňují vztahy (3.10) a že můžeme psát

$$(10.8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t}(t,s) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1}(t,s), \dfrac{\partial z}{\partial x_2}(t,s) \right).\, \dot{\alpha}(t)\,(1-s\varkappa(t)), \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial s}(t,s) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x_1}(t,s), \dfrac{\partial z}{\partial x_2}(t,s) \right).\, n(t) \end{cases}$$

Stejně tak pro součin dvou gradientů platí vztah (3.9).

<u>Lemma</u> 10.4. Funkce v je spojitá v Ω .

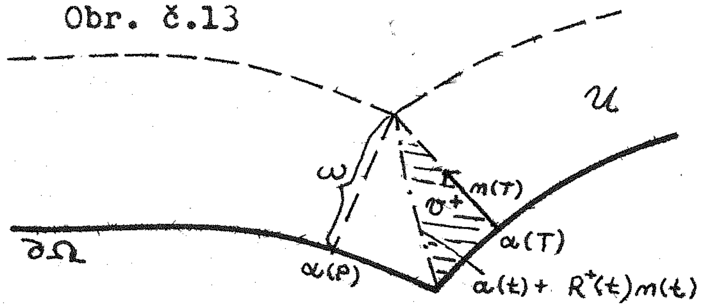
<u>Důkaz</u>. Především ukážeme, že funkce v je korektně definována, tj. že v bodech množin $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}^+$, $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}^-$, $\mathcal{V}^+\cap\mathcal{V}^-$ dávají různé definice z (10.7) tutéž funkční hodnotu.

Protože body množiny $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}^+$ můžeme psát ve tvaru $x=\alpha(T)+sn(T)$, kde $s\in\langle 0,\omega\rangle$, a protože $R^+(T)=\omega$ (viz obr. č.13), definice dávají na množině $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}^+$ tutéž hodnotu

$$v(x) = u(T,\omega)\,\omega^{\varepsilon} - \int_s^{\omega} \frac{\partial u}{\partial \xi}(T,\xi)\,\xi^{\varepsilon}\, d\xi \ .$$

Analogicky pro body množiny $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}^-$.

Obr. č.13



Zabývejme se dále body množiny $\mathcal{V}^+\cap\mathcal{V}^-$. Z odstavce 3.3.3 víme, že každý z nich můžeme popsat dvojím způsobem:

$$x = \alpha(t)+R^+(t)n(t) = \alpha(p)+R^-(p)n(p) \ ,$$

kde je $R^+(t)= R^-(p)$ a kde p můžeme chápat jako funkci proměnné t a naopak. Přitom $dp/_{dt} < 0$ na celém intervalu $(0,T)$ a $\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dt}{dp} = 1$. Tudíž platí

$$\frac{du}{dt}(t,R^+(t)) = \frac{du}{dt}(p,R^-(p)) = \frac{du}{dp}(p,R^-(p))\,\frac{dp}{dt} \ ,$$

a proto užitím substituční věty obdržíme rovnost

$$\int_t^T \frac{du}{d\xi}(\xi,R^+(\xi))[R^+(\xi)]^{\varepsilon} d\xi = \int_p^P \frac{du}{d\eta}(\eta,R^-(\eta))\,[R^-(\eta)]^{\varepsilon}\, d\eta.$$

Jelikož $\alpha(T)+\omega n(T) = \alpha(P)+\omega n(P)$, je tím ukázána korektnost definice i na množině $\mathcal{V}^+ \cap \mathcal{V}^-$.

Zabývejme se konečně spojitostí funkce v . Protože α, n, R^+, R^- jsou alespoň jednou spojitě diferencovatelné na uvažovaných intervalech a protože funkce u, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ jsou na množinách $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}^-$, $\mathcal{V}^+$ hladké, je na těchto množinách spojitá i funkce v . Dále je spojitá i na množině Ω', a protože $v(x)= u(x)\omega^{\varepsilon}$ na $\partial\Omega'$, je funkce v spojitá v celé Ω.

Jak vyplyne z následujícího odstavce, bude

$$v \in W^{1,2}(\Omega,d,-\varepsilon)$$

pro $\varepsilon < 1$, což je jeden z našich požadavků.

10.4.2. Odhady na množině $\mathcal{V}^+$, $\mathcal{V}^-$

Stejně jako v odstavci 10.3 můžeme odvodit nerovnosti

$$\|v\|_{-\varepsilon;\Omega'} \leqq c_1 \|u\|_{\varepsilon;\Omega'} , \quad \|v\|_{-\varepsilon;\mathcal{U}} \leqq c_2 \|u\|_{\varepsilon;\mathcal{U}} ,$$

a nebudeme proto znovu tyto odhady provádět. Následující věta zaručuje, že obdobný odhad platí i pro množiny $\mathcal{V}^+$, $\mathcal{V}^-$, což spolu se spojitostí funkce v zaručuje, že $v \in W^{1,2}(\Omega,d,-\varepsilon)$. Navíc bude platit odhad (10.2).

<u>Věta</u> 10.5. Pro každé $\varepsilon < 1$ existují konstanty $c_3, c_4 > 0$ tak, že pro dané funkce u a v platí

$$\|v\|_{-\varepsilon;\mathcal{V}^+} \leqq c_3 \|u\|_{\varepsilon;\mathcal{V}^+} , \quad \|v\|_{-\varepsilon;\mathcal{V}^-} \leqq c_4 \|u\|_{\varepsilon;\mathcal{V}^-} .$$

Zbytek odstavce 10.4.2 bude věnován důkazu této věty. Přitom budeme provádět pouze odhady na množině $\mathcal{V}^+$, pro množinu $\mathcal{V}^-$ je postup obdobný.

Lemma 10.6. Pro $\varepsilon < 1$ platí

$$\int_{\mathcal{V}^+} |\nabla v|^2 \, d^{-\varepsilon} \, dx \leqq \text{const} \int_{\mathcal{V}^+} |\nabla u|^2 \, d^{\varepsilon} \, dx .$$

Důkaz. Na vnitřku množiny $\mathcal{V}^+$ je $\frac{\partial v}{\partial s}(t,s) = \frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\, s^{\varepsilon}$, a protože $R^+(T)=\omega$, integrací per partes v definici (10.7) (pro $\varepsilon \neq 0$) dostaneme

$$v(t,s)= u(t,s)s^{\varepsilon} + \varepsilon\int_t^T u(\xi, R^+(\xi))[R^+(\xi)]^{\varepsilon-1}\dot{R}^+(\xi)\,d\xi + \tag{10.9}$$
$$+ \varepsilon\int_s^{R^+(t)} u(t,\xi)\,\xi^{\varepsilon-1}\,d\xi .$$

Konečně derivováním podle proměnné t, kdy pozornost budeme věnovat především integrálu při proměnných mezích (viz [6], str. 301), odvodíme

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,s)= \frac{\partial u}{\partial t}(t,s)s^{\varepsilon} - \varepsilon\, u(t,R^+(t))\,[R^+(t)]^{\varepsilon-1}\,\dot{R}^+(t) +$$

$$+ \varepsilon\int_s^{R^+(t)}\frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi)\,\xi^{\varepsilon-1}d\xi + \varepsilon\, u(t,R^+(t))[R^+(t)]^{\varepsilon-1}\,\dot{R}^+(t) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(t,s)s^{\varepsilon} + \varepsilon\int_s^{R^+(t)} \frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi)\,\xi^{\varepsilon-1}\,d\xi .$$

Stejně jako na množině $\mathcal{U}$ s tím, že místo ω je v horní mezi integrálu podle ds a $d\xi$ výraz $R^+(t)$, obdržíme tvrzení lemmatu.

Postačí proto dokázat následující lemma.

Lemma 10.7. Pro $\varepsilon < 1$ platí

$$\int_{\mathcal{V}^+} |v|^2 \, d^{-\varepsilon} \, dx \leqq \text{const} \left[\int_{\mathcal{V}^+} |u|^2 d^{\varepsilon} \, dx + \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \int_{\mathcal{V}^+} |\nabla u|^2 d^{\varepsilon} \, dx \right].$$

Důkaz. Přepišme nejprve funkci $v(t,s)$ do vhodnějšího tvaru, abychom byli schopni odhadnout integrál $\int_t^T \dots d\xi$ z výrazu (10.9). Využijeme-li rovnosti

$$u(\xi, R^+(\xi))\,[R^+(\xi)]^{\varepsilon-1}\,\dot{R}^+(\xi) = u(\xi,s)s^{\varepsilon}\,[R^+(\xi)]^{-1}\dot{R}^+(\xi) +$$

$$+\,[R^+(\xi)]^{-1}\,\dot{R}^+(\xi)\int_s^{R^+(\xi)} \frac{\partial u}{\partial\eta}(\xi,\eta)\,\eta^{\varepsilon}\,d\eta\ +$$

$$+\,[R^+(\xi)]^{-1}\,\dot{R}^+(\xi)\,\varepsilon\int_s^{R^+(\xi)} u(\xi,\eta)\,\eta^{\varepsilon-1}\,d\eta$$

dostaneme na množině $\mathcal{V}^+$

$$v(t,s) = I_1 + \varepsilon I_2 + \varepsilon I_3 + \varepsilon I_4 + \varepsilon^2 I_5 \quad ,$$

kde

$$I_1 = u(t,s)\,s^{\varepsilon} \quad ,$$

$$I_2 = \int_s^{R^+(t)} u(t,\xi)\,\xi^{\varepsilon-1}\,d\xi \quad ,$$

$$I_3 = \int_t^T u(\xi,s)\,s^{\varepsilon}\,[R^+(\xi)]^{-1}\,\dot{R}^+(\xi)\,d\xi \quad ,$$

$$I_4 = \int_t^T [R^+(\xi)]^{-1}\,\dot{R}^+(\xi)\,\Big(\int_s^{R^+(\xi)} \frac{\partial u}{\partial\eta}(\xi,\eta)\,\eta^{\varepsilon}\,d\eta\Big)d\xi \,,$$

$$I_5 = \int_t^T [R^+(\xi)]^{-1}\,\dot{R}^+(\xi)\,\Big(\int_s^{R^+(\xi)} u(\xi,\eta)\,\eta^{\varepsilon-1}d\eta\Big)d\xi \,.$$

Půjde nyní o to, abychom odhadli výrazy

$$\mathcal{J}_i = \iint_{\mathcal{V}^+} I_i^2\,s^{-\varepsilon}\,(1-s\,\varkappa(t))\,ds\,dt \ ,\quad i=1,\dots,5,$$

integrálem $\int_{\mathcal{V}^+} |u|^2\,d^{\varepsilon}\,dx$ nebo $\int_{\mathcal{V}^+} |\nabla u|^2\,d^{\varepsilon}\,dx$, neboť můžeme užít nerovnosti $I_i I_j \leqq \frac{1}{2} I_i^2 + \frac{1}{2} I_j^2$. Dostáváme

$$\mathcal{J}_1 = \int_{\mathcal{V}^+} |u|^2\,d^{\varepsilon}\,dx \ ,$$

a protože je $c_5 \leqq 1-s\,\varkappa(t) \leqq c_6$ pro každé $x = \psi(t,s) \in \mathcal{V}^+$, užitím integrální nerovnosti (2.5) vyvodíme

$$\mathcal{J}_2 \leqq c_6 \int_{t_{i,j}}^{T} \int_0^{R^+(t)} s^{-\varepsilon} \left(\int_s^{R^+(t)} |u(t,\xi)| \, \xi^{\varepsilon-1} d\xi \right)^2 ds\,dt \leqq$$

$$\leqq \frac{4c_6}{(1-\varepsilon)^2} \int_{t_{i,j}}^{T} \int_0^{R^+(t)} |u(t,s)|^2 \, s^{\varepsilon} \, ds\,dt \leqq$$

$$\leqq \frac{c_6}{c_5} \frac{4}{(1-\varepsilon)^2} \int_{\vartheta^+} |u|^2 \, d^{\varepsilon} \, dx .$$

Ostatní odhady budou komplikovanější a budeme je proto provádět samostatně v lemmatech 10.8, 10.9 a 10.10.

Lemma 10.8. Pro $\varepsilon < 1$ platí

$$\mathcal{J}_3 \leqq \text{const} \int_{\vartheta^+} |u|^2 \, d^{\varepsilon} \, dx .$$

Důkaz. Zřejmě je

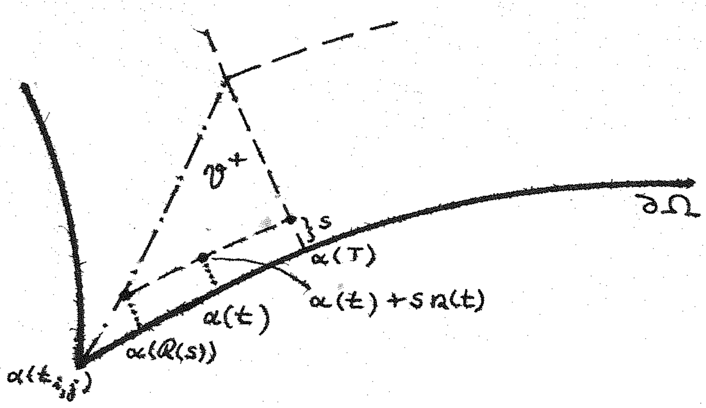
$$\mathcal{J}_3 \leqq c_6 \int_{t_{i,j}}^{T} \int_0^{R^+(t)} s^{\varepsilon} \left(\int_t^{T} |u(\xi,s)| \, [R^+(\xi)]^{-1} \dot{R}^+(\xi) d\xi \right)^2 . \\ .ds\,dt .$$

Užitím Fubiniovy věty můžeme nyní zaměnit pořadí integrování podle ds a dt, tj. můžeme psát

$$\iint_{\vartheta^+} \ldots \, ds\,dt = \int_{t_{i,j}}^{T} \int_0^{R^+(t)} \ldots \, ds\,dt = \int_0^{\omega} \int_{\mathcal{R}(s)}^{T} \ldots \, dt\,ds ,$$

kde $\mathcal{R}$ je funkce inverzní k R^+ (viz obr. č.14).

Obr. č.14



Dále vezmeme v úvahu, že $0 < \lambda \leqq \dot{R}^+(\xi) \leqq c_7$, tedy

$$[R^+(\xi)]^{-1} \leq \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\xi - t_{i,j}} .$$

Proto odhadneme

$$\mathcal{J}_3 \leq \frac{c_6 c_7^2}{\lambda^2} \int_0^\omega s^\varepsilon \int_{\mathcal{R}(s)}^T \left(\int_t^T |u(\xi,s)| \frac{1}{\xi - t_{i,j}} d\xi \right)^2 dt\, ds =$$

$$= \frac{c_6 c_7^2}{\lambda^2} \int_0^\omega s^\varepsilon \Big[\int_{\mathcal{R}(s)-t_{i,j}}^{T-t_{i,j}} \Big(\int_{t^*}^{T-t_{i,j}} |u(\eta + t_{i,j}, s)|\, \eta^{-1} d\eta \Big)^2 dt^*\, ds \leq$$

$$\leq \frac{4c_6 c_7^2}{2} \int_0^\omega s^\varepsilon \Big[\int_{\mathcal{R}(s)-t_{i,j}}^{T-t_{i,j}} |u(t^* + t_{i,j}, s)|^2\, dt^* \Big] ds ,$$

kde jsme položili $t^* = t - t_{i,j}$ a užili integrální nerovnost (2.5) s parametry $\alpha = 0$, $\omega_1 = \mathcal{R}(s) - t_{i,j}$, $\omega_2 = T - t_{i,j}$.

Nahradíme-li proměnnou t^* opět proměnnou t a užijeme-li zpět Fubiniovu větu, dostaneme konečně

$$\mathcal{J}_3 \leq \frac{4c_6 c_7^2}{\lambda^2 c_5} \int_{t_{i,j}}^T \int_0^{R^+(t)} s^\varepsilon |u(t,s)|^2 (1 - s\,\mathcal{H}(t))\, ds\, dt =$$

$$= \frac{4c_6 c_7^2}{\lambda^2 c_5} \int_{\mathcal{V}^+} |u|^2 d^\varepsilon dx .$$

<u>Lemma</u> 10.9. Pro $\varepsilon < 1$ platí

$$\mathcal{J}_4 \leq \text{const} \frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \int_{\mathcal{V}^+} |\nabla u|^2 d^\varepsilon dx .$$

<u>Důkaz</u>. Analogicky jako v předchozím důkazu, kde místo funkce $u(\xi, s)$ bude nyní výraz $s^{-\varepsilon} \int_s^{R^+(\;)} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, \eta) \right| \eta^\varepsilon d\eta$,

obdržíme

$$\mathcal{J}_4 \leq \frac{4c_6 c_7^2}{\lambda^2 c_5} \int_{t_{i,j}}^T \int_0^{R^+(t)} s^{-\varepsilon} \Big(\int_s^{R^+(t)} \left| \frac{\partial u}{\partial \eta}(t,\eta) \right| \eta^\varepsilon d\eta \Big)^2 .$$

$$.ds\, dt \leq$$

$$\leq \frac{4c_6c_7^2}{\lambda^2 c_5}\,\omega^2 \int_{t_{i,j}}^{T}\int_0^{R^+(t)} s^{-\varepsilon}\Big(\int_s^{R^+(t)} \Big|\frac{\partial u}{\partial \eta}(t,\eta)\Big|\, \eta^{\varepsilon-1}\, d\eta\Big)^2 .$$

$$.\ ds\, dt \quad .$$

Pro $\varepsilon < 1$ můžeme užít integrální nerovnost (2.5), takže nakonec odhadneme

$$\mathcal{J}_4 \leq \frac{4c_6c_7^2}{\lambda^2 c_5}\,\omega^2 \frac{4}{(1-\varepsilon)^2}\int_{t_{i,j}}^{T}\int_0^{R^+(t)} \Big|\frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\Big|^2 s^{\varepsilon}\, ds\, dt \leq$$

$$\leq \text{const}\ \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\int_{\mathcal{V}^+} |\nabla u|^2\, d^{\varepsilon}\, dx \quad .$$

<u>Lemma</u> 10.10. Pro $\varepsilon < 1$ platí

$$\mathcal{J}_5 \leq \text{const}\ \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\int_{\mathcal{V}^+} |u|^2\, d^{\varepsilon}\, dx \,.$$

<u>Důkaz</u>. Stejně jako v předchozím bude

$$\mathcal{J}_5 \leq \frac{c_6c_7^2}{2}\int_0^{\omega} s^{-\varepsilon}\int_{\mathcal{R}(s)-t_{i,j}}^{T-t_{i,j}} \Big[\int_{t^*}^{T-t_{i,j}} \xi^{*-1}\Big(\int_s^{R^+(\xi^*+t_{i,j})}$$

$$|u(\xi^*+t_{i,j},\eta)|\,\eta^{\varepsilon-1} d\eta\Big)\, d\xi^*\Big]^2 dt\, ds \leq$$

$$\leq \frac{4c_6c_7^2}{\lambda^2}\int_0^{\omega} s^{-\varepsilon}\int_{\mathcal{R}(s)}^{T}\Big(\int_s^{R^+(t)} |u(t,\eta)|\,\eta^{\varepsilon-1}\, d\eta\Big)^2 dt\, ds \leq$$

$$\leq \frac{16c_6c_7^2}{\lambda^2}\,\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\int_{t_{i,j}}^{T}\int_0^{R^+(t)} |u(t,s)|^2\, s^{\varepsilon}\, ds\, dt \leq$$

$$\leq \text{const}\ \frac{1}{(1-\varepsilon)^2}\int_{\mathcal{V}^+} |u|^2\, d^{\varepsilon}\, dx \,.$$

10.4.3. Elipticita

Pro libovolnou funkci $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ a k ní zvolenou funkci v podle předpisu (10.7) jsme dokázali, že platí (10.2). Ukážeme, že pro vhodný interval I_1 obsahující otevřené okolí nuly je splněna i nerovnost (10.3).

Pro $\varepsilon > -1$ bychom stejným způsobem postupovali při vyšetřování elipticity v druhé složce s tím, že místo ε bychom uvažovali $-\varepsilon$, obdrželi bychom "interval elipticity" I_2 a položili $I = I_1 \cap (-I_2)$.

Označíme-li proto

$$a_X(u,v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} \int_X a_{\alpha\beta} D^{\beta}u \, D^{\alpha}v \, dx ,$$

stačí ověřit nerovnosti

$$a_X(u,v) \geqq c_X \|u\|^2_{\varepsilon;X} , \quad c_X > 0 ,$$

kde je postupně $X = \Omega', \mathcal{U}, \mathcal{V}^+, \mathcal{V}^-$ a kde ε je z vhodného intervalu I_1.

Okamžitě dostaneme

$$a_{\Omega'}(u,v) \geqq c_0 \omega^{\varepsilon} c_9 \|u\|^2_{\varepsilon;\Omega'} , \text{ kde } c_9 = \max_{x \in \overline{\Omega'}} d^{-\varepsilon}(x) .$$

Z předchozích odstavců dále víme, že pro $X = \mathcal{U}, \mathcal{V}^+, \mathcal{V}^-$ je

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s} s^{\varepsilon} , \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} s^{\varepsilon} + \varepsilon \mathcal{J}_{t,X} , \quad v = us^{\varepsilon} + \varepsilon \mathcal{J}_X ,$$

kde $\mathcal{J}_{t,X}$, $\mathcal{J}_X$ jsou výrazy splňující nerovnosti

$$\|\mathcal{J}_{t,X}\|_{-\varepsilon;X} \leqq c_{1,X} \|u\|_{\varepsilon;X} ,$$

$$\|\mathcal{J}_X\|_{-\varepsilon;X} \leqq c_{2,X} \|u\|_{\varepsilon;X} .$$

Dále užijeme vztahů (3.10), takže bude

$$a_X(u,v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} \int_X a_{\alpha\beta} D^{\beta}u \, D^{\alpha}v \, dx =$$

$$= \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \int_X a_{\alpha\beta} \left(b_\beta \frac{\partial u}{\partial t} + c_\beta \frac{\partial u}{\partial s} + d_\beta u\right) d^{\frac{\varepsilon}{2}} \left(b_\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + c_\alpha \frac{\partial u}{\partial s} + d_\alpha u\right) d^{\frac{\varepsilon}{2}} dx +$$

$$+ \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} \varepsilon \int_X a_{\alpha\beta} D^\beta u \,(b_\alpha \mathcal{J}_{t,X} + d_\alpha \mathcal{J}_X) \, dx \gtreqless$$

$$\geqq c_0 \sum_{|\alpha|\leq 1} \int_X \left| b_\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + c_\alpha \frac{\partial u}{\partial s} + d_\alpha u \right|^2 d^\varepsilon \, dx -$$

$$- |\varepsilon| \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} |a_{\alpha\beta}|_{L_\infty(X)} \left(\int_X D^\beta u \; d^\varepsilon \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{c_5} \|\mathcal{J}_{t,X}\|_{-\varepsilon;X} +\right.$$

$$\left. + \|\mathcal{J}_X\|_{-\varepsilon;X}\right) \geqq \left[c_0 - |\varepsilon| \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} |a_{\alpha\beta}|_{L_\infty(X)} \left(\frac{1}{c_5} c_{1,X} + c_{2,X}\right)\right] \|u\|^2_{\varepsilon;X}.$$

Pro dostatečně malá $|\varepsilon|$ je výraz v hranatých závorkách kladný a konstanty $c_{1,X}$, $c_{2,X}$ obsahují nejvýše výrazy $\frac{1}{1-\varepsilon}$ nebo $\frac{1}{(1-\varepsilon)^2}$.

10.4.4. Existence slabého řešení

V odstavci 10.4 jsme dokázali, že platí následující věta.

Věta 10.11. Nechť omezená oblast $\Omega \subset R^2$ má po částech hladkou hranici s konvexními "rohy" (viz odstavec 3.3), $M = \partial\Omega$ a nechť platí (10.1).

Potom existuje interval I obsahující otevřené okolí nuly takový, že pro každé $\varepsilon \in I$ má Neumannův problém (III.1) právě jedno slabé řešení $u \in W^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)$ kdykoliv $f \in L_2(\Omega, d, \varepsilon)$ a $g \in L_2(\partial\Omega)$. Navíc existuje konstanta $c = c(\Omega, a, \varepsilon)$ tak, že

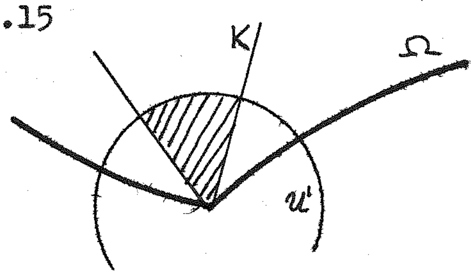
$$\|u\|_\varepsilon \leqq c \,(|f|_\varepsilon + |g|_{L_2(\partial\Omega)}) .$$

10.4.5. Oblasti s obecnější geometrií

Zobecnění předchozího postupu je možné provést ve dvou směrech. Především je možné uvažovat vícedimenzionální oblasti s $N > 2$. Popis okolí nehladké hranice může být ovšem značně komplikovaný a tedy proveditelný prakticky jen pro konkrétní situace.

Dále je rozumné uvažovat oblasti s "ostřejšími rohy". Doposud jsme pracovali s takovými konvexními "rohy", které jsou popsány křivkou ω, která má ve vrcholu daného "rohu" omezené křivosti zprava i zleva a pro které existuje okolí $\mathcal{U}$ tohoto vrcholu a neprázdný kužel K tak, že množina $\mathcal{U} \cap K$ je v "rohu" obsažena (viz obr. č.15). Tyto podmínky můžeme zesla-

Obr. č.15



bit. Především potřebujeme, aby existovaly konstanty C,D tak, že $0 < C \leq 1 - s\,\varkappa^+(t) \leq D$, $0 < C \leq 1 - v\,\varkappa^-(p) \leq D$ pro $0 < s < R^+(t)$ a $0 < v < R^-(p)$, tj. aby

$$(10.10) \qquad \begin{aligned} &0 < C \leq 1 - R^+(t)\,\varkappa(t) \leq D \quad \text{pro} \quad t \in (t_{i,j}, T_{i,j}) \,, \\ &0 < C \leq 1 - R^-(p)\,\varkappa(p) \leq D \quad \text{pro} \quad p \in (P_{i,j}, t_{i,j}) \,. \end{aligned}$$

Náš postup tento případ zahrnuje. Dále v důkazech lemmatu 10.8 a lemmatech následujících stačí místo omezení $0 < \lambda \leq \dot{R}^+(\xi) \leq c_7$ (a $0 < \lambda \leq \dot{R}^-(\eta) \leq c_7$) předpokládat slabší podmínky

$$(10.11) \qquad \begin{aligned} &|\dot{R}^+(\xi)\,[R^+(\xi)]^{-1}| \leq \text{const}\ (\xi - t_{i,j})^{-1} \,, \\ &|\dot{R}^-(\eta)\,[R^-(\eta)]^{-1}| \leq \text{const}\ (t_{i,j} - \eta)^{-1} \,. \end{aligned}$$

Abychom měli zaručenu existenci slabého řešení Neumannova problému (III.1), potřebovali jsme, aby množina $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ byla hustá v příslušném váhovém prostoru $W^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)$. Pokud je autoru známo, tento problém nebyl pro takto obecné oblasti zatím rozpracován.

Proto pro funkci $u \in W^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)$, která již nemusí být nutně hladká, zvolíme testovací funkci v předpisem

(10.12) $\quad v(x) =$

.....

$= u(x)\,\omega^{\varepsilon}$ pro $x \in \Omega'$,

.....

$$= u(t,s)\,s^{\varepsilon} + \varepsilon \int_s^{\omega} u(t,\xi)\,\xi^{\varepsilon-1}\,d\xi$$

pro $x = \alpha_i(t) + s n_i(t)$, $x \in \mathcal{U}_{i,j}$, $i=0,\dots,r$, $j=0,\dots,q_i$,

.....

$$= u(t,s)s^{\varepsilon} + \varepsilon \int_t^{T_{i,j}} u(\xi, R^+_{i,j}(\xi))\,[R^+_{i,j}(\xi)]^{\varepsilon-1}\dot{R}^+_{i,j}(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \varepsilon \int_s^{R^+_{i,j}(t)} u(t,\xi)\,\xi^{\varepsilon-1}\,d\xi$$

pro $x = \alpha_i(t) + s n_i(t) \in \mathcal{V}^+_{i,j}$, $i=0,\dots,r$, $j=0,\dots,q_i$,

.....

$$= u(p,s)s^{\varepsilon} + \varepsilon \int_p^{P_{i,j}} u(\eta, R^-_{i,j}(\eta))\,[R^-_{i,j}(\eta)]^{\varepsilon-1}\,\dot{R}^-_{i,j}(\eta)\,d\eta +$$

$$+ \varepsilon \int_s^{R^-_{i,j}(p)} u(p,\eta)\,\eta^{\varepsilon-1}\,d\eta$$

pro $x = \alpha_i(p) + s n_i(p) \in \mathcal{V}^-_{i,j}$, $i=0,\dots,r$, $j=0,\dots,q_i$.

Ten je ovšem vzhledem k vztahu (10.9) shodný s definicí (10.7), jestliže funkce u je hladká a (10.7) má smysl. Definice (10.7) se zdá názornější, a proto jsme ji dali v našem výkladu přednost.

Vraťme se zpět k předpisu (10.12), který má smysl, neboť funkce u má stopu na "ose rohu" $[\beta_{i,j}]$. Rovněž na množinách $\Omega' \cap \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}^+$, $\mathcal{V}^+ \cap \mathcal{V}^-$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}^-$ je korektně definována a dále v proměnných t a s je absolutně spojitá. Vezmeme-li v úvahu slabší omezení (10.10) a (10.11), obdržíme stejné odhady jako v odstavci 10.4.2, a proto bude (pro $\varepsilon < 1$) $v \in W^{1,2}(\Omega, d, -\varepsilon)$. Analogicky jako v odstavci 10.4.3 je dále možné dokázat elipticitu bilineární formy a(.,.) pro vhodná ε a vyslovit větu 10.11, kde budeme uvažovat obecnější oblast Ω.

Příklad obecnější oblasti. Nechť

$$K_1 = \{x \in R^2;\ x_1^2 + x_2^2 < 1\} ,$$

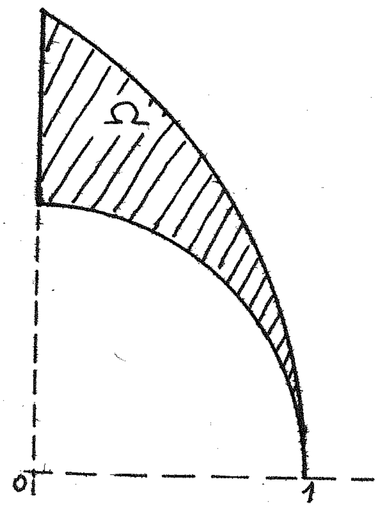
$$K_2 = \{x \in R^2;\ (x_1+1)^2 + x_2^2 < 4\} ,$$

a vezměme (viz obr. č.16)

$$\Omega = \{x \in K_2 \cap (R^2 \setminus K_1);\ x_1, x_2 > 0\} .$$

Protože hranici $\partial\Omega$ tvoří úsečka a dvě kružnice (s konstantními křivostmi 0, 1, $\frac{1}{2}$), vztah (10.10) je zřejmý. Rovněž není obtížné ověřit, že je splněna podmínka (10.11).

Obr. č.16



11. NEUMANNŮV PROBLÉM V PŘÍPADĚ N - m = 2

11.1. ÚVOD

V této kapitole budeme vyšetřovat existenci slabého řešení Neumannova problému (III.1) v případě N-m=2. Přitom budeme uvažovat pouze situaci N=2, která dobře vystihuje charakter problému. Pro $N > 2$ vhodným popisem hranice a množiny M pomocí křivočarých souřadnic bychom daný problém převedli na dvourozměrný případ.

Metoda, kterou dále rozpracujeme, spočívá ve vhodné aplikaci Fourierových řad a postupů užitých v kapitolách 9 a 10. V podstatě je popsána v odstavci 11.2, zatímco v odstavci 11.3 je aplikována na pokud možno nejširší třídu oblastí.

Stejně jako v kapitole 10 předpokládejme, že koeficienty bilineární formy a(.,.) splňují podmínku

$$(11.1)\quad \begin{cases} a_{\alpha\beta} \in L_\infty(\Omega)\ , \\ \sum\limits_{|\alpha|,|\beta|\le 1} a_{\alpha\beta}(x)\, \xi_\alpha \xi_\beta \ge c_0 \sum\limits_{|\alpha|\le 1} |\xi_\alpha|^2\ , \quad c_0 > 0, \end{cases}$$

pro skoro všechna $x \in \Omega$ a každé $\xi = (\xi_{(0,\dots,0)}, \xi_{(1,0,\dots,0)}, \dots, \xi_{(0,\dots,0,1)}) \in R^{N+1}$. Bilineární forma a(.,.) bude proto $W^{1,2}(\Omega)$-eliptická a bude omezená na prostoru

$$W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon) \times W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)\ .$$

Budeme dále vyšetřovat její elipticitu ve složkách vzhledem k těmto váhovým prostorům, abychom mohli využít zobecněné Laxovo-Milgramovo lemma.

Proto uvažujme množinu $\mathfrak{M}$, která bude hustá v prostoru $W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$, a k funkci $u \in \mathfrak{M}$ hledejme funkci $v \in W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)$ tak, aby platilo

(11.2) $\|v\|_{M,-\varepsilon} \leqq c_1 \|u\|_{M,\varepsilon}$, $c_1 > 0$,

(11.3) $a(u,v) \geqq c_2 \|u\|^2_{M,\varepsilon}$, $c_2 > 0$.

Tím bude zaručena elipticita v první složce, stejný postup bychom užili při vyšetřování elipticity v druhé složce.

Ze zobecněného Laxova-Milgramova lemmatu 6.1 pak vyplyne následující věta.

Věta 11.1. Nechť Ω je uvažovaná oblast s částí hranice M (viz odstavce 11.2.1, 11.3.1) a nechť N-m=2. Potom existuje interval I obsahující otevřené okolí nuly takový, že pro každé $\varepsilon \in I$ má rovnice (III.3) řešení kdykoliv $F \in [W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^*$.

11.2. PŘÍPAD ZOBECNĚNÉHO KUŽELE

11.2.1. Popis geometrie oblasti

Pro účely tohoto odstavce budeme kuželem rozumět obecnější oblast, než je obvyklé.

Definice. Řekneme, že oblast $\Omega \subset R^2$ je zobecněný kužel, jestliže je

$$\Omega = \{(r,\varphi);\ r \in (0,\gamma),\quad \varphi \in (\,\psi_1(r),\ \psi_2(r))\} \quad ,$$

kde r,φ značí polární souřadnice. Přitom předpokládáme, že funkce ψ_1, ψ_2 jsou spojité na intervalu $\langle 0,\gamma\rangle$, monotonní na $(0,\gamma)$ a že existují čísla ϑ_1, ϑ_2, $\vartheta_3 \geqq 0$, $\vartheta_2 \leqq \vartheta_3 \leqq 2\pi$, pro něž platí:

(i) Je-li ψ_1 klesající (resp. ψ_2 klesající), potom

$\psi_1(0) = \vartheta_1$, $\psi_1(\gamma) = 0$ (resp. $\psi_2(0) = \vartheta_3$, $\psi_2(\gamma) = \vartheta_2$) .

(ii) Je-li ψ_1 rostoucí (resp. ψ_2 rostoucí), potom

$\psi_1(0) = 0$, $\psi_1(\gamma) = \vartheta_1$ (resp. $\psi_2(0) = \vartheta_2$, $\psi_2(\gamma) = \vartheta_3$) .

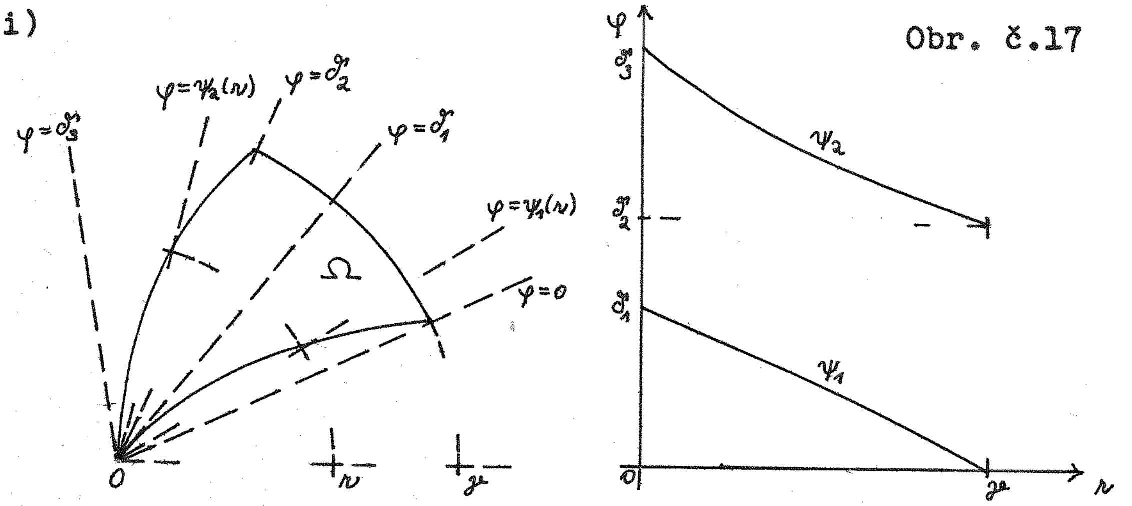
Dále předpokládejme, že funkce ψ_1, ψ_2 splňují následující podmínku (P):

Existují čísla $R_1, R_2 > 0$ a $\beta \geqq 0$ tak, že pro všechna $r \in (0, \varkappa)$ platí

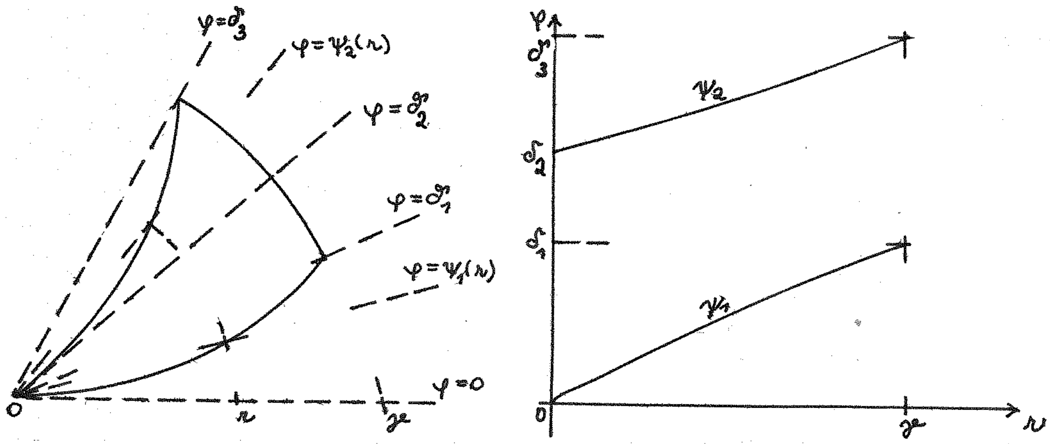
(P) $$R_1\, r^\beta \leqq \psi_2(r) - \psi_1(r) \leqq R_2\, r^\beta \; .$$

(i)

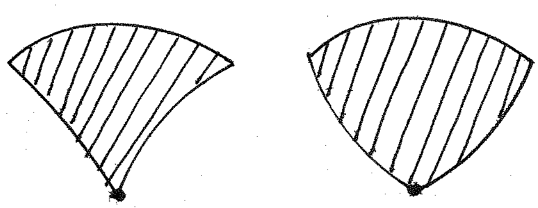
Obr. č.17

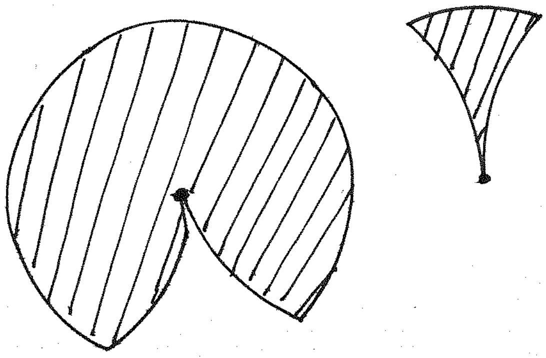


(ii)



Poznámka. Podmínky (i) a (ii) pochopitelně nevylučují, že funkce ψ_1 je klesající a funkce ψ_2 rostoucí nebo naopak. Můžeme proto uvažovat i dále znázorněné zobecněné kužele:





Označme ještě pro $\varphi\in(0,\vartheta)$

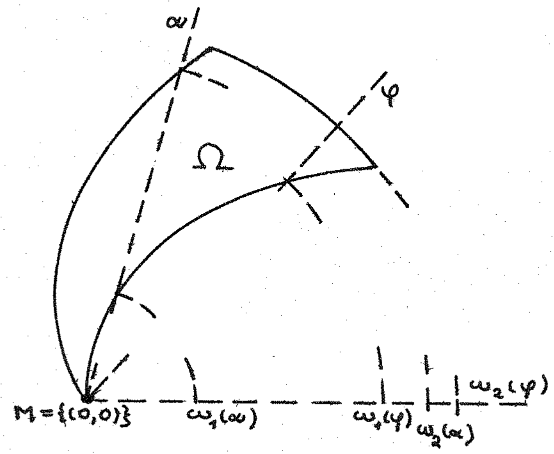
$$\Omega_\varphi = \Omega\cap\{(r,\varphi);\ r\in(0,\gamma)\}$$

a nechť ω_1, ω_2 jsou takové funkce na intervalu $(0,\vartheta_3)$, že

$$\Omega_\varphi = (\omega_1(\varphi),\ \omega_2(\varphi))\ .$$

(Viz obr. č.18.) Nechť je dále váha vztažena k množině $M\subset\partial\Omega$ obsahující pouze vrchol kužele Ω, tj. $M = \{(0,0)\}$.

Bez újmy na obecnosti budeme do konce odstavce 11.2 předpokládat $\gamma=1$.



Obr. č.18

Poznámka. Pro $\vartheta_1=0$, $\vartheta_2=\vartheta_3$ bude $\psi_1\equiv 0$, $\psi_2\equiv\vartheta_3$ a $\omega_1\equiv 0$, $\omega_2\equiv\gamma$. V tomto případě oblast Ω bude kužel chápaný v obvyklém smyslu, jehož úhel při vrcholu má velikost ϑ_3.

11.2.2. Fourierova řada

Položme $\mathfrak{M}= C^\infty(\Omega)\cap W^{1,2}(\Omega,r,\varepsilon)$, tedy $\mathfrak{M}$ bude množina všech nekonečně diferencovatelných funkcí v Ω náležejících zároveň příslušnému váhovému prostoru. Jak je ukázáno v [25], tato množina je hustá ve váhovém prostoru $W^{1,2}(\Omega,d_M,\varepsilon)$ (tento prostor rovněž značíme $W^{1,2}(\Omega,r,\varepsilon)$), což požadujeme v souvislosti s nerovnostmi (11.2) a (11.3).

Vezměme funkci $u\in\mathfrak{M}$. Uvažujme nejprve množinu

$$2\Omega = \{(r,\varphi);\ r\in(0,1),\ \ \varphi\in(\psi_1(r),\ 2\psi_2(r)-\psi_1(r)\}$$

a definujme pro ni "symetrické prodloužení" funkce u:

$$\bar{u}(r,\varphi) = \begin{cases} u(r,\varphi) & \text{pro } (r,\varphi) \in \Omega\,, \\ u(r, 2\psi_2(r) - \varphi) & \text{pro } (r,\varphi) \in 2\Omega \setminus \Omega\,. \end{cases}$$

Poznamenejme, že funkce $\bar{u}$ je hladká v Ω a v $2\Omega\setminus\Omega$, zanechává na množině $\{(r, \psi_2(r)),\ r \in (0,\gamma)\}$ z obou jejích stran stejnou stopu. Protože pro $(r,\eta) \in 2\Omega\setminus\bar{\Omega}$ je

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}(r,\eta) = -\frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, 2\psi_2(r) - \eta)\,,$$

bude $\bar{u}(r,.)$ absolutně spojitá na intervalu $\langle \psi_1(r), 2\psi_2(r) - \psi_1(r) \rangle = J(r)$ a pro každé $r \in (0,1)$ bude $\bar{u}(r,.)$, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}(r,.) \in L_2(J(r))$. Navíc

$$(11.4) \qquad \int_{\psi_1(r)}^{2\psi_2(r) - \psi_1(r)} |\bar{u}(r,\varphi)|^2 d\varphi = 2 \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} |u(r,\varphi)|^2 d\varphi$$

a

$$(11.5) \qquad \int_{\psi_1(r)}^{2\psi_2(r) - \psi_1(r)} \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}(r,\varphi)\right|^2 d\varphi = 2 \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} \left|\frac{\partial u}{\partial \varphi}(r,\varphi)\right|^2 d\varphi.$$

Funkci $\varphi \longrightarrow \bar{u}(r,\varphi)$ můžeme proto pro každé $r \in (0,1)$ rozvést v následující Fourierovu řadu

$$(11.6) \qquad \bar{u}(r,\varphi) = A(r) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(r) \cos \frac{k\pi}{\psi_2(r) - \psi_1(r)} \varphi\ .$$

Vzhledem k větě 11.2 pak obdržíme

$$(11.7) \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}(r,\varphi) = -\frac{\pi}{\psi_2(r) - \psi_1(r)}\ .$$

$$. \sum_{k=1}^{\infty} k\, A_k(r) \sin \frac{k\pi}{\psi_2(r) - \psi_1(r)} \varphi\ .$$

Věta 11.2. (Viz [7], kapitola 5, věta 5.2.)
Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ a nechť tam má derivaci (ve smyslu absolutně spojité funkce) f', která je integrovatelná v $(-\pi, \pi)$. Potom $f'(x)$ má Fourierovu řadu

$$\frac{c}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [(kb_k + (-1)^k c) \cos kx - ka_k \sin kx] ,$$

kde a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty funkce $f(x)$ a kde c je konstanta definovaná vztahem

$$c = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] .$$

Metodu Fourierových řad užíváme hlavně proto, abychom mohli vybrat vhodnou testovací funkci a abychom provedli patřičné odhady. Nejdůležitější součástí těchto odhadů pak bude následující tvrzení.

Lemma 11.3. Platí

$$|u(r, \varphi) - A(r)|^2_{M,\varepsilon-2} \leqq C \; \|u\|^2_{M,\varepsilon} ,$$

kde konstanta $C = \max\limits_{r \in \langle 0, \varkappa \rangle} (\psi_2(r) - \psi_1(r))^2 \pi^{-2}$.

Důkaz. Především je

$$\|u\|^2_{M,\varepsilon} = \iint_{\Omega} (|u(r, \varphi)|^2 r^{\varepsilon+1} + |\frac{\partial u}{\partial r}(r, \varphi)|^2 r^{\varepsilon+1} + |\frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, \varphi)|^2 r^{\varepsilon-1}) \, dr \, d\varphi$$

a dále užitím Parsevalovy rovnosti na Fourierovu řadu funkce $\bar{u}(r, \varphi) - A(r)$ (viz (11.6)) obdržíme

$$|u(r, \varphi) - A(r)|^2_{M,\varepsilon-2;\Omega} = \frac{1}{2} |\bar{u}(r, \varphi) - A(r)|^2_{M,\varepsilon-2;2\Omega} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 r^{\varepsilon-1} (\int_{\psi_1(r)}^{2\psi_2(r) - \psi_1(r)} |\bar{u}(r, \varphi) - A(r)|^2 \, d\varphi) \, dr =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 r^{\varepsilon-1} (\psi_2(r) - \psi_1(r)) \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2(r)\, dr .$$

Dále užitím Parsevalovy rovnosti na řadu (11.7) a z (11.5) bude

$$\int_0^1 \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} \left| \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right|^2 r^{\varepsilon-1}\, d\varphi\, dr =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\psi_1(r)}^{2\,\psi_2(r) - \psi_1(r)} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \varphi}(r, \varphi) \right|^2 r^{\varepsilon-1}\, d\varphi\, dr =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 r^{\varepsilon-1} \frac{\pi^2}{\psi_2(r) - \psi_1(r)} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 A_k^2(r)\, dr .$$

Stačí proto, aby $\psi_2(r) - \psi_1(r) \leqq C\, (\psi_2(r) - \psi_1(r))^{-1} \pi^2$.

Tím je tvrzení dokázáno.

Lemma 11.4. Platí

$$\int_0^1 A^2(r)\, r^{\varepsilon+\beta+1}\, dr \leqq \frac{1}{R_1} \|u\|_{M,\varepsilon}^2 ,$$

kde R_1, β jsou čísla z podmínky (P) (viz odstavec 11.2.1).

Důkaz. Z Parsevalovy rovnosti aplikované na řadu (11.6) a z (11.4) vyplyne

$$\int_0^1 A^2(r)\, r^{\varepsilon+1} (\psi_2(r) - \psi_1(r))\, dr =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\psi_1(r)}^{2\,\psi_2(r) - \psi_1(r)} A^2(r)\, r^{\varepsilon+1}\, d\varphi\, dr \leqq$$

$$\leqq \int_0^1 \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} |u(r, \varphi)|^2\, r^{\varepsilon+1}\, d\varphi\, dr \leqq \|u\|_{M,\varepsilon}^2 .$$

Z podmínky (P) pak ihned dostáváme dokazované tvrzení.

11.2.3. Volba testovací funkce

Pro funkci $u \in \mathcal{M}$ popsanou pomocí Fourierovy řady v odstavci 11.2.2 položme

$$v(r,\varphi) = r^{\varepsilon} u(r,\varphi) + \varepsilon \int_r^1 A(\xi)\ \xi^{\varepsilon-1}\, d\xi \ . \tag{11.8}$$

Protože je

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}(r,\varphi) = r^{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \varphi}(r,\varphi)$$

a

$$\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) = r^{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial r}(r,\varphi) + \varepsilon\, r^{\varepsilon-1} \left[u(r,\varphi) - A(r)\right] ,$$

bude (vzhledem k nerovnosti $ab \leq \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2$)

$$\|v\|^2_{M,-\varepsilon} \leq \frac{3}{2} \|u\|^2_{M,-\varepsilon} + \frac{3}{2} \varepsilon^2 \int_0^1 \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} \left(\int_r^1 A(\xi)\, \xi^{\varepsilon-1} d\xi\right)^2 . \; r^{-\varepsilon+1}\, d\varphi\, dr +$$

$$+ \frac{3}{2} \varepsilon^2 \left|u(r,\varphi) - A(r)\right|^2_{M,\varepsilon-2} .$$

Druhý sčítanec odhadneme následovně:

$$J = \int_0^1 \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} \left(\int_r^1 A(\xi)\, \xi^{\varepsilon-1} d\xi \right)^2 r^{-\varepsilon+1}\, d\varphi\, dr =$$

$$= \int_0^1 (\psi_2(r) - \psi_1(r))\, r^{-\varepsilon+1} \left(\int_r^1 A(\xi)\ \xi^{\varepsilon-1}\, d\xi \right)^2 dr \leq$$

$$\leq R_2 \int_0^1 r^{-\varepsilon+\beta+1} \left(\int_r^1 A(\xi)\ \xi^{\varepsilon-1}\, d\xi \right)^2 dr ,$$

kde jsme užili podmínku (P). Budeme-li nyní aplikovat integrální nerovnost (2.5), ve které vezmeme $-\alpha = -\varepsilon + \beta + 1$ a $u(\xi) = A(\xi)\ \xi^{\beta+1}$, dostaneme

$$J \leqq R_2 \frac{4}{(1-\varepsilon+\beta+1)^2} \int_0^1 A^2(r)\, r^{\varepsilon+\beta+1}\, dr \,.$$

K tomu je nutné, aby $\alpha = \varepsilon - \beta - 1 < 1$, tedy $\varepsilon < 2+\beta$. Protože $\beta \geqq 0$, je tato podmínka splněna. Pomocí tvrzení 11.3 a 11.4 konečně odhadneme

$$\|v\|^2_{M,-\varepsilon} \leqq \frac{3}{2}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\frac{4\,\varepsilon^2}{(2-\varepsilon+\beta)^2} + C\,\varepsilon^2\right) \|u\|^2_{M,\varepsilon} \,,$$

a nerovnost (11.2) je proto splněna.

11.2.4. Elipticita

Jak jsme se již zmínili, věnujeme pozornost pouze elipticitě bilineární formy a(.,.) v první složce. Stejně je možné postupovat i v případě složky druhé.

Pro i=1,2 můžeme psát (viz (11.8))

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(r,\varphi) = r^{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x_i}(r,\varphi) + \varepsilon\, r^{\varepsilon-1} \frac{\partial r}{\partial x_i}\left[u(r,\varphi) - A(r)\right] .$$

Proto dostáváme

$$a(u,v) = \sum_{|\alpha|,\,|\beta| \leqq 1} \int_0^1 \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} a_{\alpha\beta}\, D^{\beta}u\, D^{\alpha}u\, r^{\varepsilon+1}\, d\varphi\, dr \,+$$

$$+\, \varepsilon \sum_{\substack{|\alpha|=1\\ |\beta|\leqq 1}} \int_0^1 \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} a_{\alpha\beta}\, D^{\beta}u\, r^{\varepsilon-1} D^{\alpha}r\, \left[u(r,\varphi) - A(r)\right] r\, dr\, d\varphi \,+$$

$$+\, \varepsilon \sum_{|\beta|\leqq 1} \int_0^1 \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} a_{(0,\dots,0)\beta}\, D^{\beta}u \left(\int_r^1 A(\xi)\, \xi^{\varepsilon-1} d\xi\right) r\, d\varphi\, dr \geqq$$

$$\geqq c_0 \sum_{|\alpha| \geqq 1} \int_0^1 \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} |D^{\alpha}u|^2\, r^{\varepsilon+1}\, d\varphi\, dr \,-$$

$$- |\varepsilon| \sum_{\substack{|\alpha|=1\\|\beta|\leq 1}} |a_{\alpha\beta}|_\infty |D^\alpha r|_\infty \left(\int_0^1 \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} |D^\beta u|^2 r^{\varepsilon+1} \, d\varphi \, dr \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left| u(r,\varphi) - A(r) \right|_{M,\varepsilon-2} -$$

$$- |\varepsilon| \sum_{|\beta|\leq 1} |a_{(0,\dots,0)\beta}|_\infty \left(\int_0^1 \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} |D^\beta u|^2 r^{\varepsilon+1} \, d\varphi \, dr \right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_0^1 \int_{\psi_1(r)}^{\psi_2(r)} r^{-\varepsilon+1} \left(\int_r^1 A(\xi) \, \xi^{\varepsilon-1} d\xi \right)^2 d\varphi \, dr \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Užijeme-li odhadu výrazu J z odstavce 11.2.3 a lemmat 11.3 a 11.4, obdržíme pro $\varepsilon < 2$ (pak je rovněž $\varepsilon < 2+\beta$)

$$a(u,v) \geq \left[c_0 - |\varepsilon| \, C \sum_{\substack{|\alpha|=1\\|\beta|\leq 1}} |a_{\alpha\beta}|_\infty - \frac{2|\varepsilon|}{(2-\varepsilon+\beta)} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \sum_{|\beta|\leq 1} |a_{(0,\dots,0)\beta}|_\infty \right] \cdot$$

$$\cdot \|u\|^2_{M,\varepsilon} \; .$$

Výraz v hranatých závorkách je pro ε z dostatečně malého otevřeného okolí nuly kladný, tedy pro tato ε je konečně splněna i nerovnost (11.3).

11.3. PŘÍPAD OBECNĚJŠÍ OBLASTI

11.3.1. Popis oblasti

Budeme uvažovat omezenou oblast $\Omega \subset R^2$ a bod $x_0 \in \partial\Omega$. Váha bude vztažena k množině $M = \{x_0\}$. V okolí bodu x_0 předpokládáme, že $\Omega \cap \mathcal{U}(x_0, \gamma)$ je zobecněný kužel, tj.

$$\Omega \cap \mathcal{U}(x_0, \gamma) = \{ (r,\varphi);\ r \in (0,\gamma),\ \varphi \in (\psi_1(r), \psi_2(r)) \} ,$$

kde ψ_1, ψ_2 jsou funkce z odstavce 11.2.1.

Poznamenejme, že nemusíme klást požadavky na hladkost hranice $\partial\Omega$ (např. podmínku lipschitzovskosti), neboť řešíme rovnici (III.3) a není potřeba uvažovat stopy funkcí na hranici. V případě rovnice (III.1) pak můžeme dodatečně požadovat, aby hranice $\partial\Omega$ byla dostatečně hladká.

11.3.2. Volba testovací funkce a elipticita

Uvažujme funkci $u \in C^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ a k ní testovací funkci

$$v(r,\varphi) = \begin{cases} u(r,\varphi)r^{\varepsilon} + \varepsilon \int_r^{\varkappa} A(\xi)\,\xi^{\varepsilon-1}\,d\xi & \text{pro } (r,\varphi) \in \Omega \cap \mathcal{U}(x_0,\varkappa) = \Omega_1, \\ u(r,\varphi)\, r^{\varepsilon} & \text{pro } (r,\varphi) \in \Omega \setminus \mathcal{U}(x_0,\varkappa) = \Omega_2. \end{cases}$$

Opět se stačí zabývat elipticitou bilineární formy

$$a(.,.):\ W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon) \times W^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon) \longrightarrow R\ .$$

Bude-li

$$a_{\Omega_i}(u,v) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqq 1} \int_{\Omega_i} a_{\alpha\beta}\, D^{\beta}u\, D^{\alpha}v\, dx\ ,$$

stačí pro i=1,2 ověřit

$$\|v\|_{M,-\varepsilon;\Omega_i} \leqq c_{1i}\ \|u\|_{M,\varepsilon;\Omega_i}\ ,\quad c_{1i} > 0,$$

$$a_{\Omega_i}(u,v) \geqq c_{2i}\ \|u\|^2_{M,\varepsilon;\Omega_i}\ ,\quad c_{2i} > 0.$$

Ovšem Ω_1 je zobecněný kužel, pro který jsme tyto nerovnosti odvodily v odstavci 11.2. Pro množinu Ω_2 je $0 < K_1 \leqq r^{\varepsilon} \leqq K_2 < \infty$ (kde v případě $\varepsilon \geqq 0$ je $K_1 = \varkappa^{\varepsilon}$, $K_2 = \max_{x \in \bar{\Omega}_2} d_M^{\varepsilon}(x)$ a v případě $\varepsilon < 0$ pak $K_1 = \min_{x \in \bar{\Omega}_2} d_M^{\varepsilon}(x)$ a $K_2 = \varkappa^{\varepsilon}$), tedy první z nerovností je zřejmá a druhá plyne z elipticity bilineární formy a(.,.) v obvyklém smyslu (viz (11.1)).

IV. S T O K E S Ů V   P R O B L É M

12. OPERÁTORY DIVERGENCE A GRADIENTU

12.1. ÚVOD

V této a dásledující kapitole budeme opět předpokládat, že oblast $\Omega \subset R^N$ je třídy $Q^{0,1}(M)$, $M \subset \partial\Omega$, dim M = m. Dále budeme značit

$$L_2^0(\Omega, d_M, \varepsilon) = \{ \varphi \in L_2(\Omega, d_M, \varepsilon);\ \int_\Omega \varphi \, dx = 0 \} ,$$

a protože budeme pracovat s prostory $[W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)]^N$, $[W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)]^N$, jejich normy (aniž by došlo k záměně) budeme značit opět $\|\cdot\|_{M,\varepsilon}$ a $|||\cdot|||_{M,\varepsilon}$, kde

$$\|\vec{u}\|_{M,\varepsilon} = \Big(\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big|^2 d_M^\varepsilon \, dx + \sum_{j=1}^{N} \int_\Omega |u_j|^2 d_M^\varepsilon \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} ,$$

$$|||\vec{u}|||_{M,\varepsilon} = \Big(\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega \Big|\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big|^2 d_M^\varepsilon \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} .$$

Dále budeme uvažovat Hilbertův prostor

$$D_\varepsilon = \{ \vec{v} \in [W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)]^N;\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \}$$

a jeho ortogonální doplněk $D_\varepsilon^\perp$ v prostoru $[W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)]^N$.

Naším cílem v této kapitole bude odvození některých výsledků týkajících se operátorů

$$\operatorname{div} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_N}{\partial x_N} , \quad \operatorname{grad} = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \Big)$$

ve váhových prostorech, které zobecňují analogická tvrzení v obvyklých Lebesgueových a Sobolevových prostorech (viz např. [28], [3]). Budeme přitom vycházet z následujícího tvrzení, jehož důkaz je možné nalézt v [21].

<u>Lemma</u> 12.1. Jestliže derivace $\frac{\partial p}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq N$, distribuce p náležejí prostoru $W^{-1,2}(\Omega)$ ($= [W_0^{1,2}(\Omega)]^*$), potom $p \in L_2(\Omega)$ a platí

$$|p|_{L_2(\Omega)/R} \leq c_1(\Omega) \quad \|\mathrm{grad}\, p\|_{[W^{-1,2}(\Omega)]^N} .$$

Poznamenejme, že pro Hilbertův prostor H značí $H_{/R}$ jeho faktorprostor podle R, který je opatřen normou

$$|p|_{H_{/R}} = \inf_{c \in R} \|p + c\|_H .$$

12.2. OBRAZ OPERÁTORU grad

<u>Věta</u> 12.2. Existuje symetrický interval I, $0 \in \mathrm{int}\, I$, takový, že pro každé $\varepsilon \in I$ je operátor grad izomorfismus prostoru $L_2(\Omega, d_M, \varepsilon)_{/R}$ a jeho obrazu v $([W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N)^*$.

<u>Důkaz</u>. Omezenost operátoru

$$\mathrm{grad}\colon L_2(\Omega, d_M, \varepsilon)_{/R} \longrightarrow ([W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N)^*$$

plyne z odhadu

$$\|\mathrm{grad}\, p\|_{([W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N)^*} = \sup_{\substack{\vec{v} \in [W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N \\ \|\vec{v}\|_{M,-\varepsilon} \leq 1}} \langle \mathrm{grad}\, p, \vec{v} \rangle =$$

$$= \sup_{\substack{\vec{v} \in [W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N \\ \|\vec{v}\|_{M,-\varepsilon} \leq 1}} \left(- \int_\Omega p \,\mathrm{div}\, \vec{v}\, dx\right) \leq$$

$$\leq N\, |p|_{M,\varepsilon} \sup_{\substack{\vec{v}\in[W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N \\ \|\vec{v}\|_{M,-\varepsilon}\leq 1}} \|\vec{v}\|_{M,-\varepsilon} \leq N\, |p|_{M,\varepsilon} .$$

Značme dále písmenem V ortogonální doplněk podprostoru $\{const\} \oplus \{d_M^{-\varepsilon/2}\ const\}$ v prostoru $L_2(\Omega, d_M, \varepsilon)$ a nechť $p \in V$, tj.

$$\int_\Omega p\, d_M^{\varepsilon}\, dx = 0 , \qquad \int_\Omega p\, d_M^{\varepsilon/2}\, dx = 0 .$$

Tento prostor V je uzavřený (má konečnou kodimenzi). Protože zobrazení $\vec{u} \longrightarrow \vec{u}\, d_M^{\varepsilon/2}$ je izomorfismus prostorů $[L_2(\Omega, d_M, \varepsilon)]^N$ a $[L_2(\Omega)]^N$ a rovněž pro $\varepsilon \in (-1,1)$ izomorfismus prostorů $[W_o^{1,2}(\Omega)]^N$ a $[W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N$ (viz lemma 4.13) a protože prvek $p d_M^{\varepsilon/2}$ je kolmý na prostor $\{const\}$ v $L_2(\Omega)$, obdržíme užitím lemmatu 9.1 odhad

$$|p|_{M,\varepsilon} = |p d_M^{\varepsilon/2}|_{L_2(\Omega)} = |p d_M^{\varepsilon/2}|_{L_2(\Omega)/R} \leq$$

$$\leq c_1 \|\mathrm{grad}\, (p d_M^{\varepsilon/2})\|_{[W^{-1,2}(\Omega)]^N} =$$

$$= c_1 \sup_{\substack{\vec{v}\in[W_o^{1,2}(\Omega)]^N \\ \|\vec{v}\|\leq 1}} \langle \mathrm{grad}\, (p d_M^{\varepsilon/2}), \vec{v}\rangle =$$

$$= c_1 \sup_{\substack{\vec{v}\in[W_o^{1,2}(\Omega)]^N \\ \|\vec{v}\|\leq 1}} [\langle \mathrm{grad}\, p, \vec{v} d_M^{\varepsilon/2}\rangle - \langle p, \vec{v}.\mathrm{grad}\, d_M^{\varepsilon/2}\rangle] \leq$$

$$\leq c_2 \Big[\sup_{\substack{\vec{w}\in[W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N \\ \|\vec{w}\|_{M,-\varepsilon}\leq 1}} \langle \mathrm{grad}\, p, \vec{w}\rangle +$$

$$+ |\varepsilon| \sup_{\substack{\vec{v} \in [W_0^{1,2}(\Omega)]^N \\ \|\vec{v}\| \leq 1}} \left| \int_\Omega d_M^{\varepsilon/2 - 1} p \, \vec{v} . \operatorname{grad} d_M \, dx \right] \leq$$

$$\leq c_2 \quad \|\operatorname{grad} p\|_{[(W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon))^N]^*} + c_3 \; |\varepsilon| \; |p|_{M,\varepsilon} \, .$$

Z Hölderovy nerovnosti, nerovnosti (2.8) a toho, že $|\nabla d_M| = 1$ skoro všude v Ω totiž obdržíme

$$\left| \int_\Omega d_M^{\varepsilon/2 - 1} p \, \vec{v} . \operatorname{grad} d_M \, dx \right| \leq \left(\int_\Omega |p|^2 \, d_M^\varepsilon \, dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

$$. \left(\int_\Omega \left| \sum_{i=1}^N v_i \frac{\partial d_M}{\partial x_i} \right|^2 d_M^{-2} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq |p|_{M,\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega |v_i|^2 d_M^{-2} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \quad |p|_{M,\varepsilon} \quad c(\Omega, M) \left(\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Proto existuje symetrický interval I, $0 \in \operatorname{int} I$, tak, že pro libovolné $\varepsilon \in I$ platí

$$|p|_{M,\varepsilon} \leq c_4(\Omega, M, \varepsilon) \quad \|\operatorname{grad} p\|_{([W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N)^*}$$

kdykoliv $p \in V$. Tedy obraz $\operatorname{grad}[V]$ uzavřeného podprostoru V je uzavřeným podprostorem v $([W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N)^*$. Protože obraz $\operatorname{grad}[\{d_M^{-\varepsilon/2} \mathrm{const}\}]$ je jednodimenzionální podprostor tohoto prostoru a

$$\operatorname{grad}[L_2(\Omega, d_M, \varepsilon)] = \operatorname{grad}[V] \oplus \operatorname{grad}[\{d_M^{-\varepsilon/2} \mathrm{const}\}] ,$$

je rovněž $\operatorname{grad}[L_2(\Omega, d_M, \varepsilon)]$ uzavřeným podprostorem. Protože jádro operátoru grad je podprostor konstant $\{\mathrm{const}\} = R$, vyplývá tvrzení věty 12.2 z Banachovy věty o otevřeném zobrazení.

12.3. OPERÁTOR div

12.3.1. Obraz operátorů div a grad

V tomto odstavci budeme nejprve charakterizovat obraz operátoru div v příslušných váhových prostorech a dále na rozdíl od věty 12.2 konkrétně popíšeme i obraz operátoru grad.

<u>Věta</u> 12.3. Nechť $\varepsilon \in I$, kde I je interval z věty 12.2. Potom operátor div zobrazuje prostor $[W_o^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)]^N$ na prostor $L_2^o(\Omega, d_M, -\varepsilon)$.

<u>Důkaz</u>. Podprostor $grad[L_2(\Omega, d_M, \varepsilon)_{/R}]$ je uzavřený v $([W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N)^*$ podle věty 12.2 , proto adjungovaný operátor -div zobrazuje prostor $[W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N$ na anihilátor k podprostoru $Ker[grad] = \{const\}$, který má tvar $\{u \in L_2(\Omega, d_M, -\varepsilon);\ \int_\Omega u\, dx = 0\}$.

Pro úplnost tuto situaci znázorněme schematem

$$\begin{tikzcd}
L_2(\Omega, d_M, \varepsilon) \arrow[r, "grad"] \arrow[d, leftrightarrow, "\begin{array}{c}\text{dualita}\\ \langle u,v\rangle = \int_\Omega uv\, dx\end{array}"] & ([W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N)^* \arrow[d, leftrightarrow] \\
L_2(\Omega, d_M, -\varepsilon) & {[W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N} \arrow[l, "-div"']
\end{tikzcd}$$.

<u>Věta</u> 12.4. Nechť $\varepsilon \in I$, $\vec{f} \in ([W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N)^*$. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:

1) $\langle \vec{f}, \vec{v} \rangle = 0$ pro každé $\vec{v} \in W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)$, div $\vec{v} = 0$,

2) $\vec{f} = grad\ p$ pro nějaké $p \in L_2(\Omega, d_M, \varepsilon)$.

Důkaz. Operátor grad: $L_2(\Omega, d_M, \varepsilon) \longrightarrow ([W_o^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N)^*$ má uzavřený obraz (viz věta 12.2). Proto z teorie lineárních operátorů vyplývá, že f leží v tomto obrazu právě tehdy, když náleží anihilátoru jádra adjungovaného operátoru -div (viz schema), tj. když

$$\vec{f} \in \mathrm{Ker}[-\mathrm{div}] = \mathrm{Ker}[\mathrm{div}] = D_{-\varepsilon} .$$

12.3.2. Inverze operátoru div

Věta 12.5. Existuje symetrický interval I', $0 \in \mathrm{int}\, I'$, a konstanta $c_5 = c_5(\Omega, M) > 0$ tak, že pro každé $\varepsilon \in I'$ inverze operátoru div: $D_\varepsilon^\perp \longrightarrow L_2^0(\Omega, d_M, \varepsilon)$ splňuje odhad

$$\|\mathrm{div}^{-1}\|_{\mathscr{L}(L_2^0(\Omega, d_M, \varepsilon), W_o^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon))} \leqq c_5 .$$

Důkaz. Označme

$$L = \|\mathrm{div}\|_{\mathscr{L}(W_o^{1,2}(\Omega, d_M, 0), L_2^0(\Omega, d_M, 0))} > 0 .$$

Potom existuje prvek $\vec{y} \in W_o^{1,2}(\Omega)$ s $\|\vec{y}\| \leqq 2$ splňující $|\mathrm{div}\, \vec{y}|_{M,0} = L$. Jestliže $\mathscr{P}$ bude značit projekci prostoru $W_o^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ na podprostor $B_\varepsilon^\perp$, bude v důsledku věty 4.13 platit

$$\|\mathscr{P}(d_M^{-\varepsilon/2}\vec{y})\|_{M,\varepsilon} \leqq \|d_M^{-\varepsilon/2}\vec{y}\|_{M,\varepsilon} \leqq c_6 \|\vec{y}\| \leqq 2c_6$$

alespoň pro $\varepsilon \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, kde konstanta c_6 nezávisí na ε. Tedy

$$\|\mathrm{div}\|_{\mathscr{L}(D_\varepsilon^\perp, L_2(\Omega, d_M, \varepsilon))} = \sup_{\substack{\vec{v} \in D_\varepsilon^\perp \\ \|\vec{v}\|_{M,\varepsilon} \leqq 1}} |\mathrm{div}\, \vec{v}|_{M,\varepsilon} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2c_6} |\mathrm{div}\,(d_M^{-\varepsilon/2}\vec{y})|_{M,\varepsilon} = \frac{1}{2c_6} |d_M^{-\varepsilon/2} \mathrm{div}\, \vec{y} + \vec{y}.\mathrm{grad}\, d_M^{-\varepsilon/2}|_{M,\varepsilon} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2c_6} \left[|d_M^{-\varepsilon/2}\, \mathrm{div}\, \vec{y}|_{M,\varepsilon} - |\vec{y}.\mathrm{grad}\, d_M^{-\varepsilon/2}|_{M,\varepsilon} \right] \geqq$$

$$\geq \frac{1}{2c_6}\left[L - \left|\frac{\varepsilon}{2}\right|\left(\int_\Omega d_M^{-2}\,|\vec{y}.\mathrm{grad}\,d|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{2c_6}\left[L - |\varepsilon|\,c(\Omega,M)\right] .$$

Nyní můžeme zvolit takový symetrický interval I', $0 \in \mathrm{int}\, I'$, že je

$$\|\mathrm{div}\|_{\mathcal{L}(D_\varepsilon^\perp,\, L_2^0(\Omega, d_M, \varepsilon))} \geq \frac{L}{4c_6}$$

pro všechna $\varepsilon \in I'$. Odtud ihned plyne tvrzení věty.

12.4. ZŘÍDLA A TOK HRANICÍ, $M = \partial\Omega$

V tomto odstavci odvodíme dobře známý vztah mezi divergencí vektorového pole $\vec{\varphi}$, která charakterizuje jeho zřídla, a tokem hranicí oblasti, ve které toto pole uvažujeme. Klasický výsledek zobecníme v tom smyslu, že pole $\vec{\varphi}$ bude prvkem (vhodného) váhového prostoru. Přitom se omezíme pouze na situaci, kdy $M = \partial\Omega$, $d_M = d$ a kdy oblast $\Omega \subset R^N$ bude omezená s lipschitzovskou hranicí. Pro váhy d_M^ε s obecnější množinou M bychom museli překonat obtíže technického rázu, které souvisí s hustotou množiny funkcí $C^\infty(\overline{\Omega})$ v prostoru $W^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)$ a stopami tohoto prostoru na hranici $\partial\Omega$. (Pokud je autorovi známo, nejsou tyto problémy v literatuře podrobněji rozpracovány, ačkoliv způsob jejich řešení je zřejmý.)

Naše omezení v tomto odstavci bude mít vliv na obecnost následující třinácté kapitoly. Ačkoliv homogenní Stokesův problém budeme vyšetřovat pro váhy d_M^ε s obecnou varietou M, pro nehomogenní problém bude $M = \partial\Omega$.

V dalším bude $\vec{\nu}(x)$ značit vektor vnější normály v bodě $x \in \partial\Omega$ k hranici $\partial\Omega$. Protože Ω je omezená oblast s hranicí splňující lipschitzovskou podmínku, bude mít vektor $\vec{\nu}(x)$ smysl pro skoro všechna $x \in \partial\Omega$ ve smyslu míry na hranici $\partial\Omega$.

Lemma 12.6. Nechť $\varepsilon \in (-1,1)$ a $\vec{\varphi} \in [W^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)]^N$. Potom platí

$$\int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}.\vec{\nu}\ dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}\vec{\varphi}\ dx \ . \tag{12.1}$$

Důkaz. Protože množina $[C^{\infty}(\bar{\Omega})]^N$ je hustá v prostoru $[W^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)]^N$, existuje pro $\vec{\varphi} \in [W^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)]^N$ taková posloupnost $\{\vec{\varphi}_n\}_n$, $\vec{\varphi}_n \in [C^{\infty}(\bar{\Omega})]^N$, že platí $\|\vec{\varphi}_n - \vec{\varphi}\|_{M,\varepsilon} \longrightarrow 0$ pro $n \longrightarrow +\infty$. Greenova formule (12.1) je ovšem pro vektorové funkce $\vec{\varphi}_n$ splněna, tj.

$$\int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}_n.\vec{\nu}\ dS = \int_{\Omega} \operatorname{div}\vec{\varphi}_n\ dx$$

(viz [22], Chap.3, §1). Nyní dostaneme

$$\left|\int_{\Omega} \operatorname{div}\vec{\varphi}_n\ dx - \int_{\Omega} \operatorname{div}\vec{\varphi}\ dx\right| \leq \left(\int_{\Omega} |\operatorname{div}\vec{\varphi}_n - \operatorname{div}\vec{\varphi}|^2 d^{\varepsilon}\ dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

$$.\left(\int_{\Omega} d^{-\varepsilon}\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq c_7 \|\vec{\varphi}_n - \vec{\varphi}\|_{M,\varepsilon} ,$$

a protože z věty 4.16 plyne

$$[W^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)]^N \hookrightarrow [L_2(\partial\Omega)]^N ,$$

je rovněž

$$\left|\int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}_n.\vec{\nu}\ dS - \int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}.\vec{\nu}\ dS\right| \leq \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^{N} |\varphi_{n,i} - \varphi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} dS \leq$$

$$\leq \left(\int_{\partial\Omega} dS\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial\Omega} |\vec{\varphi}_n - \vec{\varphi}|^2\ dS\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \quad \text{pro} \quad n \longrightarrow +\infty .$$

Limitním přechodem tedy obdržíme Greenovu formuli (12.1).

Věta 12.7. Nechť $\varepsilon \in I$ (I je interval z věty 12.2), $g \in L_2(\Omega, d, \varepsilon)$, $\vec{\varphi} \in [W_o^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)]^N$ a nechť je splněna podmínka

$$\int_{\Omega} g\ dx = \int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}.\vec{\nu}\ dS .$$

Potom existuje vektorová funkce $\vec{u} \in [W_0^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)]^N$ taková, že

$$\operatorname{div} \vec{u} = g \quad \text{v } \Omega,$$
$$\vec{u} = \vec{\varphi} \quad \text{na } \partial\Omega$$

a navíc je

$$\|\vec{u}\|_\varepsilon \leqq c_7(\Omega, \varepsilon) \left[|g|_\varepsilon + \|\vec{\varphi}\|_\varepsilon \right] .$$

<u>Důkaz</u>. Vzhledem ke Greenově formuli dostáváme

$$\int_\Omega (g - \operatorname{div} \vec{\varphi}) \, dx = 0, \text{ tedy } \quad g - \operatorname{div} \vec{\varphi} = L_2^0(\Omega, d, \varepsilon).$$

Vzhledem k větě 12.3 pak existuje $\vec{w} \in W_0^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)$ takové, že platí $\operatorname{div} \vec{w} = g - \operatorname{div} \vec{\varphi}$. Stačí položit $\vec{u} = \vec{w} + \vec{\varphi}$.

Konečně odhad normy $\|\vec{u}\|_\varepsilon$ je důsledkem toho, že operátor div je izomorfismus prostorů $D_\varepsilon^{\perp}$ a $L_2^0(\Omega, d, \varepsilon)$ (viz věta 12.3).

13. EXISTENCE SLABÉHO ŘEŠENÍ

13.1. FORMULACE PROBLÉMU

13.1.1. Definice slabého řešení

Nechť $\Omega \subset R^N$ je oblast s lipschitzovskou hranicí nebo nechť Ω je třídy $Q^{0,1}(M)$ s uzavřenou varietou $M \subset \partial\Omega$ (viz 3.1.3) podle toho, zda-li se budeme zabývat nehomogenním nebo homogenním(když $\vec{\varphi}=0$, $g=0$) Stokesovým problémem:

$$(13.1)\quad \begin{cases} -\mu\Delta\vec{u} + \operatorname{grad} p = \vec{f} & v\ \Omega, \\ \operatorname{div}\vec{u} = g & v\ \Omega, \\ \vec{u} = \vec{\varphi} & na\ \partial\Omega, \end{cases}$$

kde
$$\int_\Omega g\,dx = \int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}.\vec{\nu}\ dS\ .$$

Zde konstanta $\mu > 0$ charakterizuje viskozitu tekutiny, $\vec{u}$ pole rychlostí a p tlak. Pravé strany mají následující smysl: $\vec{f}$ popisuje objemové síly, funkce g zřídla (zdroje) tekutiny a $\vec{\varphi}$ charakterizuje hraniční podmínky. Poslední čtvrtá rovnost je nutná podmínka existence řešení a je vlastně matematickým popisem zákona zachování hmoty.

<u>Definice</u>. Řekneme, že dvojice $(\vec{u},p) \in [W^{1,2}(\Omega,d_M,\varepsilon)]^N \times L_2^0(\Omega,d_M,\varepsilon)$ je slabým řešením Stokesova problému (13.1) s pravými stranami $\vec{f} \in ([W_0^{1,2}(\Omega,d_M,-\varepsilon)]^N)^*$, $g \in L_2(\Omega,d_M,\varepsilon)$ a $\vec{\varphi} \in [W^{1,2}(\Omega,d_M,\varepsilon)]^N$, jestliže platí

$$\vec{u} - \vec{\varphi} \in [W_0^{1,2}(\Omega,d_M,\varepsilon)]^N,$$

$$\operatorname{div}\vec{u} = g \quad v\ \Omega,$$

$$\mu \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial z_j}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \vec{z}\, dx = \langle \vec{f}, \vec{z} \rangle$$

pro všechna $\vec{z} \in [C_0^{\infty}(\Omega)]^N$.

13.1.2. Variační formulace

Jestliže je splněna rovnost $\int_{\Omega} g\, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}.\vec{\nu}\, dS$,

existuje podle věty 12.7 takové $\vec{w} \in W^{1,2}(\Omega, d, \varepsilon)$, že platí

$$\operatorname{div} \vec{w} = g \quad v\ \Omega, \qquad \vec{w} = \vec{\varphi} \quad na\ \partial\Omega,$$

$$\|\vec{w}\|_{\varepsilon} \leqq c_7 \left[|g|_{\varepsilon} + \|\vec{\varphi}\|_{\varepsilon} \right] .$$

Položíme-li nyní $\vec{v} = \vec{u} - \vec{w}$, problém (13.1) převedeme v homogenní problém

$$(13.2) \quad \begin{cases} -\mu \Delta \vec{v} + \operatorname{grad} p = \vec{h} & v\ \Omega, \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 & v\ \Omega, \\ \vec{v} = 0 & na\ \partial\Omega, \end{cases}$$

kde $\vec{h} = \vec{f} + \mu \Delta \vec{w}$.

Dále se proto budeme zabývat existencí slabého řešení problému (13.2). Definujme proto bilineární formu

$$a(.,.) : [W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)]^N \times [W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N \longrightarrow R$$

předpisem

$$a(\vec{v}, \vec{z}) = \mu \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial z_j}{\partial x_i} dx , \quad \vec{v} \in [W_0^{1,2}(\Omega, d_M, \varepsilon)]^N, \quad \vec{z} \in [W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N.$$

Budeme-li nyní v definici slabého řešení uvažovat testovací funkce $\vec{z}$ pouze z prostoru $D_{-\varepsilon}$, potom prvá složka slabého řešení v problému (13.2) bude splňovat rovnici

$$(13.3) \qquad a(\vec{v}, \vec{z}) = \langle \vec{h}, \vec{z} \rangle \qquad \text{pro všechna } \vec{z} \in D_{-\varepsilon} .$$

Platí však i opačné tvrzení.

<u>Lemma</u> 13.1. Vektorová funkce $\vec{v}$ je první složkou slabého řešení homogenního Stokesova problému právě tehdy, když $\vec{v} \in D_\varepsilon$ a je splněna rovnost (13.3).

<u>Důkaz</u>. Stačí ukázat opačnou implikaci tohoto tvrzení. Nechť proto vektorová funkce $\vec{v} \in D_\varepsilon$ splňuje rovnost (13.3), tedy

$$0 = \langle \vec{h},\vec{z} \rangle - a(\vec{v},\vec{z}) = \langle \vec{h} + \mu\Delta\vec{v},\vec{z} \rangle$$

pro každé $\vec{z} \in D_{-\varepsilon}$. Přitom výraz $\Delta\vec{v}$ chápeme ve smyslu distribucí. Z věty 12.4 pak vyplývá, že existuje funkce $p \in L_2(\Omega,d_M,\varepsilon)$ taková, že je $\vec{h}+\mu\Delta\vec{v} = \text{grad } p$. Protože tuto rovnost splňuje již každá funkce $p+ \text{const}$, můžeme uvažovat, že je $p \in \overset{o}{L}_2(\Omega,d_M,\varepsilon)$. Stačí ukázat, že platí

$$a(\vec{u},\vec{z}) - \langle p,\text{div } \vec{z} \rangle = \langle \vec{h},\vec{z} \rangle$$

pro každé $\vec{z} \in [C_o(\Omega)]^N$. Toto tvrzení však okamžitě plyne z rovnosti

$$\langle \text{grad } p,\vec{z} \rangle = \langle \vec{h}+\mu\Delta\vec{v},\vec{z} \rangle \qquad \text{pro } \vec{z} \in [C_o^\infty(\Omega)]^N.$$

<u>Poznámka</u>. Je-li $\vec{v}$ řešením (13.3), potom tlak $p \in \overset{o}{L}_2(\Omega,d_M,\varepsilon)$ je určen rovností $\text{grad } p = \vec{h}+\mu\Delta\vec{v}$ a navíc

$$|p|_\varepsilon \leqq c_8 [\, \|\vec{h}\|_{([W_o^{1,2}(\Omega,d_M,-\varepsilon)]^N)^*} + \|\vec{v}\|_{M,\varepsilon}] \quad .$$

13.2. EXISTENCE ŘEŠENÍ

Zbývá vyšetřit řešitelnost rovnice (13.3). Opět se nabízí využít zobecněné Laxovo-Milgramovo lemma, budeme proto věnovat pozornost elipticitě bilineární formy a(.,.).

13.2.1. Elipticita

Vzhledem k symetrii bilineární formy

$$a(.,.): D_\varepsilon \times D_{-\varepsilon} \longrightarrow R$$

stačí vyšetřovat pouze její elipticitu v první složce (viz kapitolu 6), tj. stačí vyšetřit, pro která ε je splněna nerovnost

$$\sup_{\substack{\vec{z} \in D_{-\varepsilon} \\ \|\vec{z}\|_{M,-\varepsilon} \leqq 1}} a(\vec{y},\vec{z}) \geqq \alpha \|\vec{y}\|_{M,\varepsilon} \quad \text{pro všechna } \vec{y} \in D_\varepsilon \tag{13.4}$$

s nějakou konstantou $\alpha = \alpha(\Omega, M, \varepsilon) > 0$. (Definice množiny D_ε je uvedena v odstavci 12.1.)

<u>Lemma</u> 13.2. Existuje interval J, $0 \in \operatorname{int} J$, takový, že pro $\varepsilon \in J$ je bilineární forma $a(.,.): D_\varepsilon \times D_{-\varepsilon} \longrightarrow R$ eliptická v první i eliptická v druhé složce.

<u>Důkaz</u>. Nechť $\vec{y} \in D_\varepsilon$. Vezměme nyní prvek $d_M^\varepsilon \vec{y}$, který vzhledem k větě 4.13 je alespoň pro $\varepsilon \in (-1,1)$ prvkem prostoru $[W_0^{1,2}(\Omega, d_M, -\varepsilon)]^N$. Dále je $\operatorname{div}(d_M^\varepsilon \vec{y}) \in L_2(\Omega, d_M, -\varepsilon)$ a vzhledem ke Greenově formuli (12.1) dokonce $\operatorname{div}(d_M^\varepsilon \vec{y}) \in L_2^0(\Omega, d_M, -\varepsilon)$. Protože tvrzení věty 12.3 zaručuje, že operátor div je izomorfismus podprostoru $D_{-\varepsilon}^\perp$ a prostoru $L_2^0(\Omega, d_M, -\varepsilon)$, existuje jediný prvek $\vec{s} = \operatorname{div}^{-1}[\operatorname{div}(d_M^\varepsilon \vec{y})] \in D_{-\varepsilon}^\perp$. Užitím věty 12.5 a věty 4.8 o vnoření nyní odhadneme pro $\varepsilon \in I'$

$$\|\vec{s}\|_{M,-\varepsilon} \leqq c_5 \, |\operatorname{div}(d_M^\varepsilon \vec{y})|_{M,-\varepsilon} = c_5 \, | d_M^\varepsilon \operatorname{div} \vec{y} +$$

$$+ \varepsilon \, d_M^{\varepsilon-1} \vec{y}.\operatorname{grad} d_M |_{M,-\varepsilon} \leqq c_5 c \, |\varepsilon| \, \|\vec{y}\|_{M,\varepsilon} ,$$

neboť $\operatorname{div} \vec{y} = 0$. Protože dále $d_M^\varepsilon \vec{y} - \vec{s} \in D_{-\varepsilon}$, položíme $\vec{z} = d_M^\varepsilon \vec{y} - \vec{s}$, přičemž bude $\|d_M^\varepsilon \vec{y} - \vec{s}\|_{M,-\varepsilon} \leqq c_9 \|\vec{y}\|_{M,\varepsilon}$. Můžeme proto odhadovat

$$a(\vec{y},\vec{z}) = \frac{1}{c_9} \|\vec{y}\|^{-1}_{M,\varepsilon} \; [a(\vec{y}, d^{\varepsilon}_M \vec{y}) - a(\vec{y},\vec{s})] \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{c_9} \|\vec{y}\|^{-1}_{M,\varepsilon} \; [\mu \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right|^2 d^{\varepsilon}_M \, dx - |\varepsilon| \, \mu \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right| \, |y_j| \, .$$

$$. d^{\varepsilon-1}_M \left|\frac{\partial d_M}{\partial x_i}\right| \, dx - c_{10} \, |\varepsilon| \, \|\vec{y}\|^2_{M,\varepsilon}] \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{c_9} \|\vec{y}\|^{-1}_{M,\varepsilon} \; [\mu \|\!|\vec{y}|\!\|^2_{M,\varepsilon} - |\varepsilon| \, \mu (\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} \left|\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right|^2 d^{\varepsilon}_M \, dx)^{\frac{1}{2}} \, .$$

$$. (\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} |y_i|^2 d^{\varepsilon-2}_M \, dx)^{\frac{1}{2}} - c_{10} \, |\varepsilon| \, \|\vec{y}\|^2_{M,\varepsilon}] \geqq$$

$$\geqq \|\vec{y}\|_{M,\varepsilon} \; \frac{c_{11} - |\varepsilon| \, (\mu c + c_{10})}{c_9} \; .$$

Uvážíme-li, jakým způsobem závisí konstanta c na exponentu ε (viz odstavec 3.1.3), potom nerovnost (13.4) bude splněna pro každé ε z jistého intervalu J, tj. z dostatečně malého okolí nuly.

Elipticita v druhé složce se ukáže analogicky.

13.2.2. Existence a jednoznačnost slabého řešení

Vyšetřováním elipticity jsme ověřili předpoklady zobecněného Laxova-Milgramova lemmatu pro bilineární formu a(.,.). Shrňme výsledky obdržené v této a předešlé kapitole v následujících větách.

<u>Věta</u> 13.3. Nechť $\Omega \subset R^N$ je omezená oblast třídy $Q^{0,1}(M)$ s uzavřenou varietou $M \subset \partial\Omega$. Potom existuje interval J, $0 \in$ int J, takový, že pro každé $\varepsilon \in J$ existuje právě jedno slabé řešení $\vec{v} \in D_{\varepsilon}$ homogenního Stokesova problému (13.2), přičemž platí

$$\|\vec{v}\|_{M,\varepsilon} \leqq c_{11} \|\vec{h}\|_{([W_o^{1,2}(\Omega,d_M,-\varepsilon)]^N)^*}$$

kdykoliv $\vec{h} \in ([W_o^{1,2}(\Omega,d_M,-\varepsilon)]^N)^*$.

Věta 13.4. Nechť $\Omega \subset R^N$ je omezená oblast s lipschitzovskou hranicí. Potom existuje interval J, $0 \in \text{int } J$, takový, že pro každé $\varepsilon \in J$ existuje právě jedno slabé řešení

$$(\vec{u},p) \in [W^{1,2}(\Omega,d,\varepsilon)]^N \times L_2^o(\Omega,d,\varepsilon)$$

Stokesova problému (13.1) kdykoliv

$\vec{f} \in ([W_o^{1,2}(\Omega,d,-\varepsilon)]^N)^*$, $g \in L_2(\Omega,d,\varepsilon)$, $\vec{\varphi} \in W^{1,2}(\Omega,d,\varepsilon)$

a
$$\int_\Omega g \, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{\varphi}.\vec{\nu} \, dx .$$

Navíc platí

$$\|\vec{u}\|_\varepsilon \leqq c_{12} [\|\vec{f}\|_* + |g|_\varepsilon + \|\vec{\varphi}\|_\varepsilon] ,$$

$$|p|_\varepsilon \leqq c_{13} [\|\vec{f}\|_* + |g|_\varepsilon + \|\vec{\varphi}\|_\varepsilon] .$$

Poznámka. Jak jsme již poznamenali, řešitelnost nehomogenního problému pro obecnou váhu d_M^ε vázne na užití Greenovy formule (12.1). Nelze se totiž odvolat na hustotu množiny funkcí $C^\infty(\overline{\Omega})$ v prostoru $W^{1,2}(\Omega,d_M,\varepsilon)$, ačkoliv tato skutečnost se zdá být technickou (i když pracnou) záležitostí.

Problém. Zdá se nadějné, že metody kapitol 5 a 8 aplikované na daný nelineární problém bude možné zobecnit a přenést na úlohy, které musíme vyšetřovat pomocí stupně zobrazení. Přidáme-li výsledky kapitoly 12, dostává se do popředí otázka existence slabého řešení Navierových-Stokesových rovnic ve váhových prostorech. Narážíme ovšem na následující potíže. V klasickém případě se využívá u trilineární formy

$$b(\vec{u},\vec{v},\vec{z}) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} z_j \, dx, \quad \vec{u},\vec{v},\vec{z} \in W_o^{1,2}(\Omega),$$

vlastnosti $b(\vec{u},\vec{v},\vec{v}) = 0$. V našem případě obdobně potřebujeme, aby pro $\vec{u},\vec{y}$ a $\vec{s}$ ($\vec{s}$ je definováno v odstavci 13.2.1) byla splněna rovnost $b(\vec{u},\vec{y},d_M^{\varepsilon}\vec{y}-\vec{s}) = 0$. Toto tvrzení obecně neplatí.

L I T E R A T U R A

[1] EDMUNDS D.E., KUFNER A., RÁKOSNÍK J.: Imbedding of Sobolev spaces with weights of power type. Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen 4(1) (1985), 25-34.

[2] FUČÍK S., KUFNER A.: Nelineární diferenciální rovnice. Academia, Praha 1977.

[3] GIRAULD V., RAVIART P.-A.: Finite element approximation of the Navier-Stokes equations. Springer Verlag, 1981.

[4] GOSSEZ J.P.: Surjektivity results for pseudo-monotone mappings in complementary systems. J. Math. Anal. Appl. 53 (1976), 484-494.

[5] HARDY G.H., LITTLEWOOD J.E., PÓLYA G.: Inequalities. Cambridge 1952.

[6] JARNÍK V.: Integrální počet II. Nakladatelství ČSAV, Praha 1955.

[7] KADLEC J., KUFNER A.: On the solution of the mixed problem. Comment. Math. Univ. Carolinae 7 (1966), 75-84.

[8] KIPRIJANOV I.A.: Ob odnom klasse singuljarnych elliptičeskich operatorov I,II. Differencial'nye Uravnenija 7 (1971), 2066-2077; Sibirsk. Mat. Ž. 14 (1973), 560-568.

[9] KUDRAJVCEV L.D.: Prjamye i obratnye vloženija. Priloženija k rešeniju variacionnym metodom elliptičeskich uravnenij. Trudy Mat. Inst. Steklova 55 (1959), 1-182.

[10] KUFNER A.: Lösungen des Dirichletschen Problems für elliptische Differentialgleichungen in Räumen mit Belegungsfunktionen. Czechoslovak Math. J. 15 (90)(1965), 621-633.

[11] KUFNER A.: Sobolevovy prostory s vahou a Dirichletův problém. Kandidátská disertační práce, MÚ ČSAV, Praha 1964.

[12] KUFNER A.: Weighted Sobolev spaces. Teubner, Leipzig 1980.

[13] KUFNER A., JOHN O., FUČÍK S.: Funktion spaces. Academia, Praha 1977.

[14] KUFNER A., KADLEC J.: Fourierovy řady. Academia, Praha 1969.

[15] KUFNER A., OPIC B.: Rešenie zadači Dirichle v prostranstve Soboleva s vesom obščego tipa. Trudy sem. S. L. Soboleva 2 (Differencialʹnye uravnenija s častnymi proizvodnymi), Novosibirsk 1976, 35-48.

[16] KUFNER A., OPIC B.: The Dirichlet problem and weighted spaces I,II. Časopis pro pěst. matematiky 108 (1983), 381-408; 111 (1986), 242-253.

[17] KUFNER A., RÁKOSNÍK J.: Linear elliptic boundary value problems and weighted Sobolev spaces: a modified approach. Math. Slovaca 34 (1984), 185-197.

[18] KUFNER A., VOLDŘICH J.: The Neumann problem in weighted Sobolev spaces. C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, vol. VII, no. 4 (1985), 239-243.

[19] LIONS J.-L.: Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Dunod, Gauthier-Villars, Paris 1969.

[20] NEČAS J.: Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationelle. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 16 (1962), 305-326.

[21] NEČAS J.: Equations aux dérivées partielles. Presses de l`Université de Montréal, Montréal 1965.

[22] NEČAS J.: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Academia, Prague & Masson et C^{ie}, Paris 1967.

[23] NIKOLʼSKIJ S.M.: Some boundary problems for the equations with strong degeneration. Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian Math. 17 (1967), 121-127.

[24] BURENKOV V.I.: Mollifying operators with variable step and their application to approximation by infinitely differentiable functions. Nonlinear analysis, function spaces and applications, vol. 2. Proceedings of the Spring School held in Písek, 1982.

[25] RÁKOSNÍK J.: On imbeddings of Sobolev spaces with power-type weights. Proceedings of Conference on Constructive Theory of Functions, Kiev 1983.

[26] SALLINEN P.: A representation theorem for bounded bilinear forms on Banach spaces. Mathematics University of Oulu, preprint, 1979.

[27] STEIN E.M.: Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton University Press, Princeton 1970.

[28] TEMAM R.: Navier-Stokes equations. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1979.

[29] THORE J.A.: Elementary topics in differential geometry. Springer-Verlag, New-York, Heildelberg, Berlin 1979.

[30] VAJNBERG M.M.: Variacionnyje metody issledovanija nelinejnych operatorov. Gostechizdat, Moskva 1956.

[31] VOLDŘICH J.: On solvability of the Stokes problem in Sobolev power weight spaces. Comment. Math. Univ. Carolinae 25,2 (1984), 325-336.

[32] VOLDŘICH J.: On the Dirichlet boundary value problem for nonlinear elliptic partial differential equations in Sobolev power weight spaces. Časopis pro pěst. matematiky 110 (1985), 250-269.

[33] VOLDŘICH J.: A remark on the solvability of the Dirichlet problem in Sobolev spaces with power-type weights. Comment. Math. Univ. Carolinae 26 (1985), 745-748.