(16) Odvoďte z Maxwellových rovnic zákon zachování náboje.

Maxwellovy rovnice v základním tvaru:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (4)$$

Zákon zachování náboje vyjadřuje skutečnost, že změna místní hustoty náboje je způsobena výtokem náboje, tzn. elektrickým proudem. Uvažujme prostředí s permitivitou ε a permeabilitou μ.

K výpočtu časové změny místní hustoty náboje $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ použijeme Maxwellovu rovnici pro divergenci elektrického pole

$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ ... základní tvar 1. Maxw. rovnice

$\vec{D} = \varepsilon . \vec{E}$ ... vztah mezi vektorem elektrické indukce a elektrické intenzity

Lze psát

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{D}) = \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon . \operatorname{div} \vec{E}) = \varepsilon . \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \vec{E})$$

Zdeněk Veselý - teoretické cvičení z FYA2

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon \cdot \operatorname{div}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Časovou změnu elektrické intenzity $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ získáme na základě Maxwellovy rovnice pro rotaci intenzity magnetického pole

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \ldots \text{ základní tvar 4. Maxw. rovnice}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad \ldots \text{ vztah mezi vektorem elektrické indukce a elektrické intenzity}$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad \ldots \text{ vztah mezi vektorem magnetické indukce a magnetické intenzity.}$$

Lze psát

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu \cdot \vec{j} + \mu \cdot \varepsilon \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Dál můžeme psát rovnici pro $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ po dosazení za $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ve tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon \cdot \operatorname{div}\left(\frac{\operatorname{rot} \vec{B} - \mu \cdot \vec{j}}{\mu \cdot \varepsilon}\right) = \frac{1}{\mu} \cdot \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B}) - \operatorname{div} \vec{j}$$

($\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{x}) = 0$ .. pro libovolný vektor $\vec{x}$)

divergence rozdílu vektorů je rozdíl divergencí těchto vektorů

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}}$$

Tento výsledný vztah je již zákonem zachování náboje, neboť divergence vektoru $\vec{j}$ vyjadřuje výtok náboje z oblasti.

Zdeněk Veselý - teoretické cvičení z FYA2