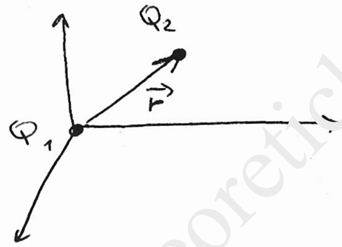
0 Zopakování intenzity elektrického pole $\vec{E}$, potenciálu elektrického pole φ, matematických operátorů grad, div, rot, ∇, diferenciál.

Intenzitu elektrického pole zavádíme pomocí síly

2 bodové náboje

$$\vec{F} = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^3} \cdot \vec{r}$$

k.. konstanta úměrnosti, pro elektrické pole ve vakuu $k = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0}$

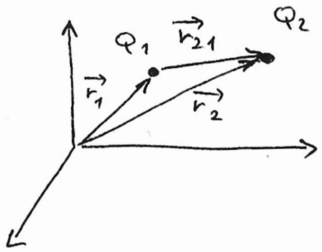


2 bodové náboje obecně umístěné

$$\vec{F}_2 = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{21}^3} \cdot \vec{r}_{21}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{E} \cdot Q_2 \Rightarrow$$

$$\vec{E} = k \cdot \frac{Q_1}{r_{21}^3} \cdot \vec{r}_{21}$$



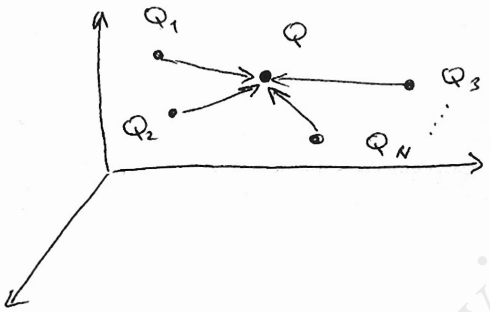
Zdeněk Veselý – teoretické cvičení z FYA2

Více nábojů

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} k \cdot \frac{Q_i \cdot Q}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_i)$$

$$\vec{F} = \vec{E}(\vec{r}) \cdot Q \qquad \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} k \cdot \frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} \cdot (\vec{r}-\vec{r}_i)}$$



Bodové náboje jsou abstrakce – reálně jsou prostorově, plošně nebo lineárně rozložené náboje, k nimž se zavádí příslušné hustoty náboje.

objemová hustota náboje $\qquad \rho = \frac{dQ}{dV}$

plošná hustota náboje $\qquad \sigma = \frac{dQ}{dS}$

délková hustota náboje $\qquad \lambda = \frac{dQ}{dl}$

Intenzita elektrického pole obecně

$$\boxed{d\vec{E} = k \cdot \frac{dQ}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}}$$

$\vec{r}$ … polohový vektor místa, ve kterém se hledá $\vec{E}$ vzhledem k místu náboje dQ

$$\boxed{\vec{E} = \int d\vec{E}}$$

Zdeněk Veselý – teoretické cvičení z FYA2

Elektrický potenciál zavádíme pomocí elektrické potenciální energie a potenciální energii el. pole pomocí práce vnější síly

$$A = \int_{\vec{r}_1 (s)}^{\vec{r}_2} - \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

.. práce vnější síly v silovém poli obecně vykonaná při přemísťění tělesa (náboje) z polohy $\vec{r}_1$ do polohy $\vec{r}_2$ po dráze s, přičemž u elektrického pole (jako u gravitačního) práce A nezávisí na dráze s

Často se volí pro potenciální energii výchozí místo v nekonečnu, tj.

$\vec{r}_1 \to \infty$ ...

$$W_p(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} - \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad , \quad \vec{F} = \vec{E}(\vec{r}) \cdot Q \; ..$$

přemísťuji náboj Q v elektrickém poli s intenzitou $\vec{E}$

elektrický potenciál $\quad \varphi(\vec{r}) = \dfrac{W_p(\vec{r})}{Q}$

Elektrický potenciál je potenciální energie zanešeného jednotkového náboje, tj. práce potřebná k přenesení jednotkového náboje z nekonečna na dané místo.

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\infty}^{\vec{r}} - \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Pokud je elektrické pole vytvářeno bodovým nábojem Q, pak

$$\varphi(\vec{r}) = k \cdot \frac{Q}{|\vec{r}|}$$ .. pro náboj Q v počátku soustavy souřadnic,

$$\varphi(\vec{r}) = k \cdot \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|}$$ .. pro náboj Q umístěný v poloze $\vec{r}_Q$

Zdeněk Veselý - teoretické cvičení z FYA2

Vztah mezi intenzitou a potenciálem elektrického pole

$$\varphi(\vec{r}_2) = \int_{\infty}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\varphi(\vec{r}_1) = \int_{\infty}^{\vec{r}_1} -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\varphi = \int_{\infty}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_{\infty}^{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\left(\int_{\infty}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{\vec{r}_1} -\vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r} \right)$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\varphi = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$d\varphi = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\left(d\varphi = \operatorname{grad}\varphi \cdot d\vec{r} \right)$$

$$\operatorname{grad}\varphi \cdot d\vec{r} = -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi}$$

Zdeněk Veselý - teoretické cvičení z FYA2

Matematický operátor grad pro skalární veličinu $f(x,y,z)$

$$\underline{\text{grad } f(x,y,z)} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f = \underline{\nabla f} \qquad \text{(nabla)}$$

tj. grad (nebo ∇) působí na skalární veličinu a výsledkem je vektorová veličina.

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .. jednotkové vektory ve směrech souřadných os)

Matematický operátor diferenciál pro skalární veličinu $f(x,y,z)$

$$\underline{d f(x,y,z)} \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f\cdot(dx, dy, dz) = \text{grad } f\cdot\vec{dr} =$$

$$= \underline{\nabla f\cdot\vec{dr}}$$

tj. diferenciál působí na skalární veličinu a výsledkem je opět skalární veličina, a to skalární součin vektoru <u>grad f</u> a vektoru $\underline{\vec{dr}}$.

($\vec{dr} = (dx, dy, dz)$)

Zdeněk Veselý – teoretické cvičení z FYA2

Matematický operátor div pro vektorovou veličinu $\vec{f}(x, y, z)$

$$\underline{\operatorname{div} \vec{f}} \equiv \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(f_x, f_y, f_z \right) =$$

$$= \underline{\nabla \cdot \vec{f}}$$

tj. divergence působí na vektorovou veličinu a výsledkem je skalární veličina.

Matematický operátor rot pro vektorovou veličinu $\vec{f}(x, y, z)$

$$\underline{\operatorname{rot} \vec{f}} \equiv \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(f_x, f_y, f_z \right) = \underline{\nabla \times \vec{f}}$$

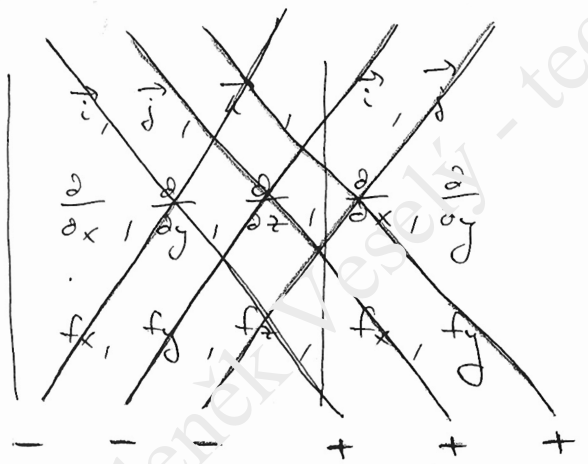
tj. rotace působí na vektorovou veličinu a výsledkem je vektorová veličina.

Zdeněk Veselý - teoretické cvičení z FYA2

Vektorový součin vektoru $\underline{\nabla}$ a vektoru $\underline{\vec{f}}$, neboli rotaci funkce $\underline{\vec{f}}$, si můžeme vyjádřit jako determinant matice, která má v 1. řádku vektor $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ve 2. řádku vektor $\underline{\nabla}$ a ve 3. řádku vektor $\underline{\vec{f}}$.

$$\mathrm{rot}\,\vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i}, & \vec{j}, & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x, & f_y, & f_z \end{vmatrix}$$

Pro determinant čtvercové matice řádu tři existuje názorná poučka



Zdeněk Veselý - teoretické cvičení z FYA2