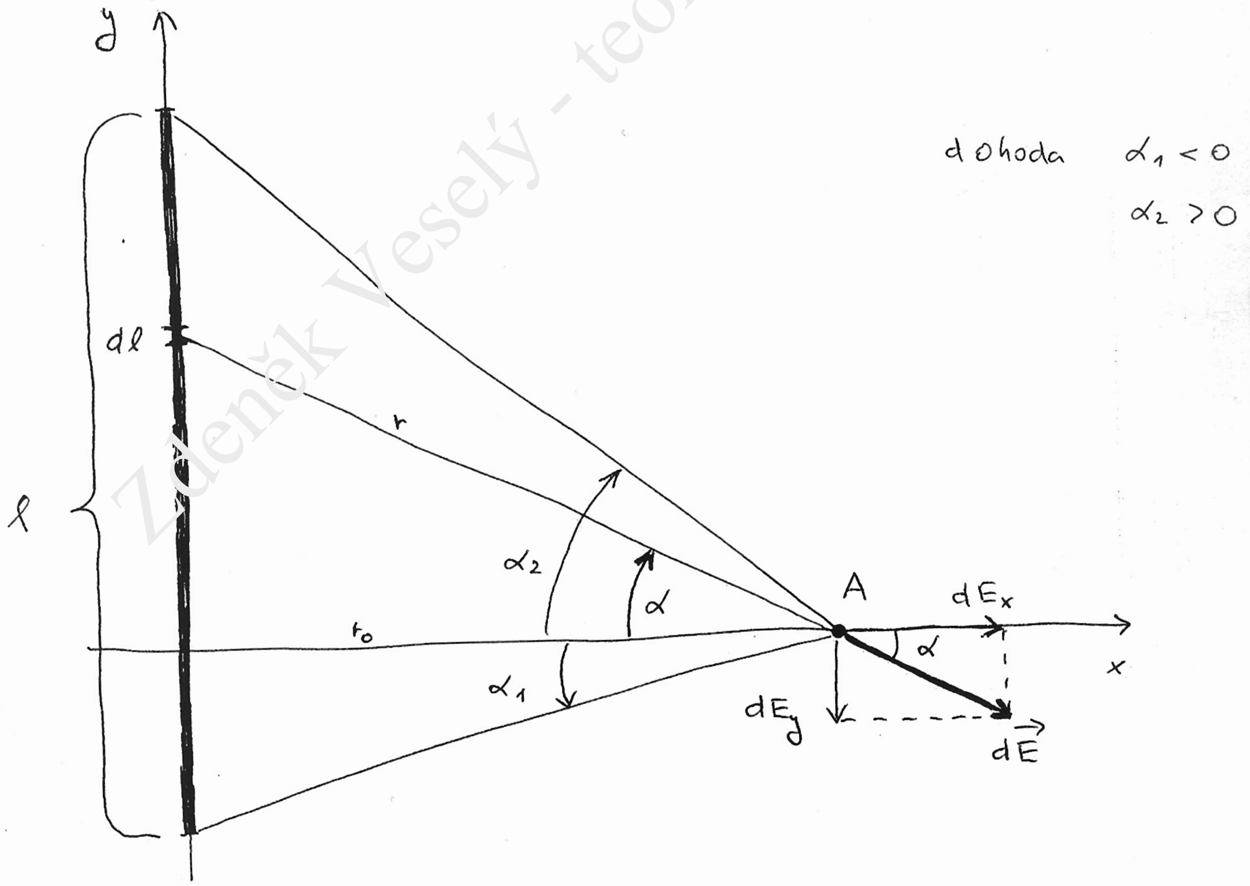
(1) Spočítejte intenzitu a potenciál elektrického pole rovnoměrně nabitého přímého vlákna konečné délky přímou integrací Coulombova zákona. Najděte asymptotická vyjádření intenzity v místech daleko od vlákna a v jeho bezprostřední blízkosti (tj. vlákno nekonečné délky).

Úloha má válcovou symetrii, řešíme v jedné z rovin, kterými vlákno prochází, např. nechť je to rovina $\underline{xy}$.

Vlákno položme do osy $\underline{y}$ a místem A, kde chceme intenzitu a potenciál zjistit, vedeme osu $\underline{x}$.



(A) intenzita elektrického pole přímou integrací Coulombova zákona

Najdeme příspěvek elementu dl k intenzitě elektrického pole v místě A, tento příspěvek je $d\vec{E}$ a má složky dE_x, dE_y

$$d\vec{E} = dE_x \cdot \vec{i} + dE_y \cdot \vec{j}$$

$$dE_x = |d\vec{E}| \cdot \cos\alpha$$

$$dE_y = -|d\vec{E}| \cdot \sin\alpha$$

Podle Coulombova zákona platí

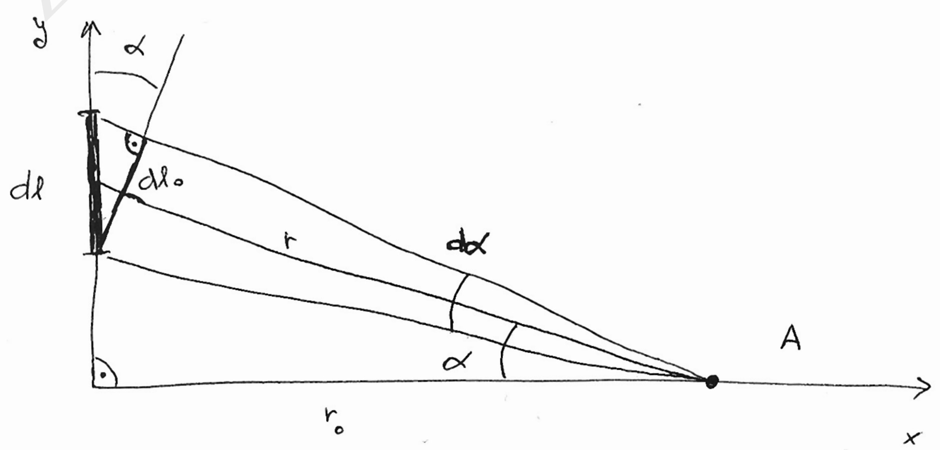
$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2}$$

Za dQ dosadíme $dQ = \lambda \cdot dl$, kde λ je tzv. délková hustota náboje.

$$dE_x = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \cdot \cos\alpha$$

$$dE_y = -\frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \cdot \sin\alpha$$

Nyní dl nahradíme pomocí $d\alpha$



Pro malé úhly $d\alpha$ lze psát $\underline{dl_0 = r \cdot d\alpha}$

Dále lze psát

$$\cos\alpha = \frac{r_0}{r} = \frac{dl_0}{dl} = \frac{r \cdot d\alpha}{dl}$$

$$\Rightarrow \quad dl = \frac{r^2}{r_0} \cdot d\alpha$$

Poté lze psát po dosazení za dl

$$dE_x = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot r^2}{r^2 \cdot r_0} \cdot d\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\cos\alpha \cdot d\alpha}{r_0}$$

$$dE_y = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot r^2}{r^2 \cdot r_0} \cdot d\alpha \cdot \sin\alpha = -\frac{\lambda}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot d\alpha}{r_0}$$

$$\boxed{E_x = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dE_x = \frac{\lambda}{4\pi \cdot \varepsilon_0 r_0} \cdot \sin\alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\lambda}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_0}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right)}$$

$$\boxed{E_y = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dE_y = \frac{\lambda}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_0} \cdot \cos\alpha \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\lambda}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_0}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\right)}$$

Výsledná intenzita elektrického pole přímého vlákna konečné délky v místě $\underline{A}$ je

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_0}\left[(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) \cdot \vec{i} + (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) \cdot \vec{j}\right]}$$

Asymptotické vyjádření intenzity elektrického pole v místě daleko od vlákna

Ve značné vzdálenosti od vlákna platí

$$\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \alpha$$

kde α je úhel, pod nímž vidíme vlákno.

$$\alpha_2 - \alpha_1 \simeq \delta\alpha$$

$$\boxed{\alpha_1 \simeq \alpha_2 - \delta\alpha}$$

Pro malé úhly $\delta\alpha$ platí

$$\cos\delta\alpha \simeq 1$$
$$\sin\delta\alpha \simeq \delta\alpha$$

Dále obecně platí

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \; .$$

Můžeme proto psát

$$E_x \simeq \frac{\tau}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_0}\left[\sin\alpha_2 - \sin(\alpha_2 - \delta\alpha)\right] =$$

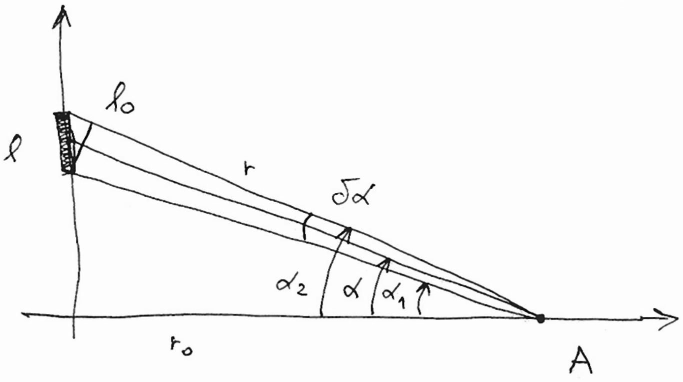
$$\simeq \frac{\tau}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_0} \cdot \left[\sin\alpha_2 - \sin\alpha_2 \cdot \cos\delta\alpha + \cos\alpha_2 \cdot \sin\delta\alpha\right] \simeq$$

$$\simeq \frac{\tau}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_0} \cdot \delta\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$E_y \simeq \frac{\tau}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_0} \cdot \left[\cos\alpha_2 - \cos(\alpha_2 - \delta\alpha)\right] \simeq$$

$$\simeq \frac{\tau}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_0} \cdot \left[\cos\alpha_2 - \cos\alpha_2 \cdot \cos\delta\alpha - \sin\alpha_2 \cdot \sin\delta\alpha\right] \simeq$$

$$\simeq -\frac{\tau}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r_0} \cdot \delta\alpha \cdot \sin\alpha$$



Lze psát $\cos\alpha = \frac{r_0}{r} = \frac{l_0}{l}$.

Pro malé úhly $\delta\alpha$ lze psát $l_0 = r\,.\,\delta\alpha$.

Spojením lze psát

$$\frac{r_0}{r} = \frac{r\,.\,\delta\alpha}{l} \Rightarrow \boxed{\delta\alpha = l\,.\,\frac{r_0}{r^2}}$$

Dosazením za $\delta\alpha$ do výrazů pro E_x a E_y se dostává

$$\boxed{E_x \simeq \frac{\lambda}{4\pi\,.\,\varepsilon_0\,.\,r_0}\,.\,\frac{l\,.\,r_0}{r^2}\,.\,\cos\alpha \simeq \frac{1}{4\pi\,.\,\varepsilon_0}\,.\,\frac{\lambda\,.\,l}{r^2}\,.\,\cos\alpha}$$

$$\boxed{E_y \simeq \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0\,.\,r_0}\,.\,\frac{l\,.\,r_0}{r^2}\,.\,\sin\alpha \simeq \frac{-1}{4\pi\,.\,\varepsilon_0}\,.\,\frac{\lambda\,.\,l}{r^2}\,.\,\sin\alpha}$$

Výsledná intenzita elektrického pole přímého vlákna ve značné vzdálenosti od vlákna je

$$\boxed{|\vec{E}| = E \simeq \frac{1}{4\pi\,.\,\varepsilon_0}\,.\,\frac{\lambda\,.\,l}{r^2}}$$

Vlákno tedy z dálky vypadá jako bodový náboj o velikosti

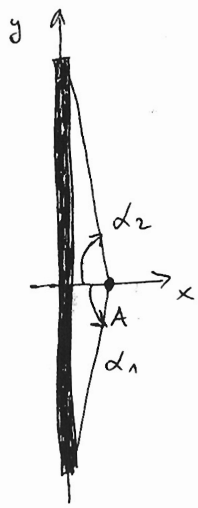
$Q = \lambda \cdot l$.

Asymptotické vyjádření intenzity elektrického pole v místě blízko vlákna

V malé vzdálenosti od vlákna lze psát

$$\alpha_1 \approx -\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha_2 \approx \frac{\pi}{2}$$



$$\left(\begin{array}{ll} \sin\alpha_1 \approx -1 , & \sin\alpha_2 \approx 1 \\ \cos\alpha_1 \approx 0 , & \cos\alpha_2 \approx 0 \end{array} \right)$$

Lze tedy psát

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &\approx \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot \lambda}{r_0} \\ E_y &\approx 0 \end{aligned}}$$

což je výsledná intenzita elektrického pole přímého vlákna konečné délky v místě blízko vlákna, neboli intenzita elektrického pole přímého vlákna nekonečné délky.

(B) potenciál elektrického pole přímou integrací

Potenciál elektrického pole náboje $\underline{Q}$ lze psát ve tvaru

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{|\vec{r}|}$$

pro náboj bodový, pro spojitě rozložený náboj se dostává

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \int \frac{dQ}{|\vec{r}|}$$

Náboj $\underline{dQ}$ lze vyjádřit pomocí délkové hustoty náboje

$$dQ = \tau \cdot dl$$

Pro $\underline{dl}$ platí (viz dříve)

$$\cos\alpha = \frac{dl_0}{dl} = \frac{r \cdot d\alpha}{dl},$$

z čehož lze psát

$$dl = \frac{r \cdot d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Po dosazení do rovnice pro potenciál

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau \cdot \cancel{r} \cdot d\alpha}{\cancel{r} \cdot \cos\alpha} = \frac{\tau}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$

Použitím substituce $\sin\alpha = z$ lze psát

$$\cos\alpha \cdot d\alpha = dz.$$

Z goniometrie platí $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, po dosazení za $\underline{\sin\alpha = z}$ lze určit

$$\cos^2\alpha = 1 - z^2$$

Dále lze psát

$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\cos\alpha \cdot d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\lambda}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \int_{\sin\alpha_1}^{\sin\alpha_2} \frac{dz}{1-z^2}$$

$$\left(\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad , \quad a>0 \right)$$

$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \Bigg|_{\sin\alpha_1}^{\sin\alpha_2} =$$

$$= -\frac{\lambda}{8\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left[\ln\left(\frac{1-\sin\alpha_2}{1+\sin\alpha_2}\right) - \ln\left(\frac{1-\sin\alpha_1}{1+\sin\alpha_1}\right) \right]$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\lambda}{8\pi \cdot \varepsilon_0} \left[\ln\left(\frac{1-\sin\alpha_1}{1+\sin\alpha_1}\right) - \ln\left(\frac{1-\sin\alpha_2}{1+\sin\alpha_2}\right) \right]}$$

což je výsledný potenciál elektrického pole přímého vlákna konečné délky.

Z potenciálu elektrického pole lze též odvodit intenzitu elektrického pole podle vztahu

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi .$$

Nutno ovšem dbát na to, že $\underline{\alpha_1}$ a $\underline{\alpha_2}$ jsou funkce $\underline{x}$, $\underline{y}$, neboli $\alpha_1(x,y)$, $\alpha_2(x,y)$. Poté lze psát pro jednotlivé složky intenzity elektrického pole

$$\boxed{\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1} \cdot \frac{\partial\alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2} \cdot \frac{\partial\alpha_2}{\partial x} \right) \\ E_y &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1} \cdot \frac{\partial\alpha_1}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2} \cdot \frac{\partial\alpha_2}{\partial y} \right) . \end{aligned}}$$