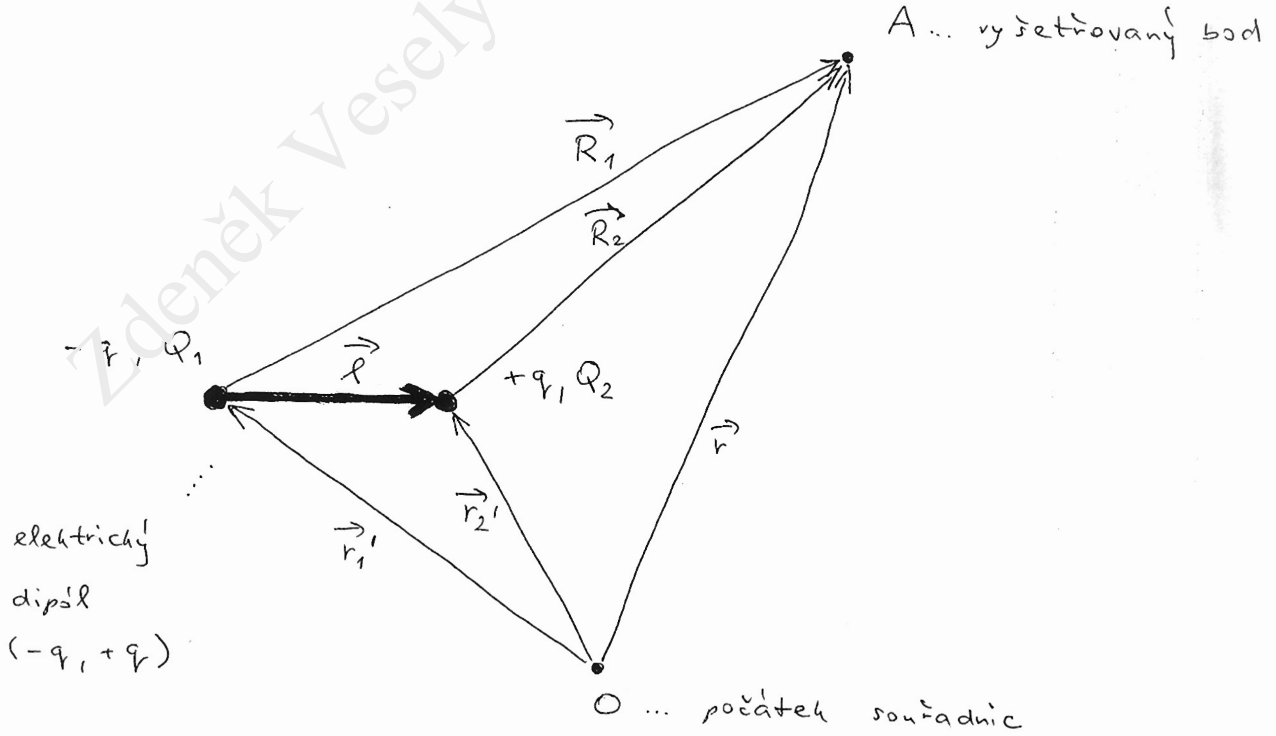
(3) Vypočítejte potenciál a intenzitu elektrického pole dipólu.

Elektrický dipól je tvořen dvojicí nábojů stejné velikosti, ale opačného znaménka $(-q, +q)$ jejichž vzájemná vzdálenost l je zanedbatelně malá oproti vzdálenosti, ve které vyšetřujeme účinky dipólu.

Pozn.: 1) z matematického hlediska je l nekonečně malá, diferenciální veličina $l \to 0$

2) Vzdálenost l definujeme většinou jako vektor $\vec{l}$ s orientací od $-q$ do $+q$



Pro výpočet elektrického potenciálu soustavy nábojů platí vztah

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_i \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Dosadíme do vztahu pro φ naše označení

$$\left(\begin{aligned} Q_1 &= -q \\ Q_2 &= +q \\ \vec{r}_1 &= \vec{r}_1{}' \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_2{}' \end{aligned} \right)$$

a můžeme psát

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{-q}{|\vec{r} - \vec{r}_1{}'|} + \frac{+q}{|\vec{r} - \vec{r}_2{}'|} \right)$$

Označíme $\left(\begin{aligned} \vec{R}_1 &= \vec{r} - \vec{r}_1{}' \\ \vec{R}_2 &= \vec{r} - \vec{r}_2{}' \end{aligned} \right)$ což jsou vlastně dvě hodnoty funkce $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}\,' = \vec{R}(\vec{r}, \vec{r}\,')$, což je funkce dvou vektorových proměnných.

Pro potenciál pak dostáváme výraz

$$\boxed{\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)}$$

<u>Výrazy</u> $\frac{1}{R_2}$ a $\frac{1}{R_1}$ <u>jsou vlastně dvě hodnoty funkce</u>

$f(R) = \frac{1}{R}$, neboli v původních proměnných dále

$f(R) = \frac{1}{R(\vec{r}, \vec{r}\,')} = f\left(R(\vec{r}, \vec{r}\,')\right)$, což znamená, že

<u>f</u> je složená funkce, která má proměnnou <u>R</u>, jež závisí

na proměnných $\vec{r}$ a $\vec{r}\,'$.

<u>Výraz</u> $\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}$ <u>je vlastně změna hodnoty funkce</u>

$f(R) = \frac{1}{R}$ při přechodu od Q_1 ke Q_2, tj. při změně

proměnné $\vec{r}\,'$ z $\vec{r}_1\,'$ na $\vec{r}_2\,'$, tj. o hodnotu

$$\boxed{\vec{r}_2\,' - \vec{r}_1\,' = \vec{l}}$$

Protože podle definice dipólu je $l \to 0$, tak lze psát že

je to též diferenciální změna proměnné $\vec{r}\,'$

$$\boxed{\vec{r}_2\,' - \vec{r}_1\,' = \vec{dr}\,'}$$

To znamená, že <u>změna funkce</u> $\frac{1}{R}$ bude také nekonečně

malá, tzn. <u>také diferenciál.</u>

Potom lze psát

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = d'\left(\frac{1}{R}\right)$$

což znamená diferenciál z funkce $\frac{1}{R}$ při změně čárkovaných souřadnic z $\vec{r}_1'$ na $\vec{r}_2'$. Protože se jedná o čárkovaný diferenciál složené funkce, lze psát

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = d'\left(\frac{1}{R}\right) = \left(-\frac{1}{R^2}\right) \cdot d'R$$

Výraz $d'R$ je dále opět čárkovaný diferenciál složené funkce $R = R(\vec{r}, \vec{r}\,') = R(x, y, z, x', y', z')$

a lze psát

$$\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = -\frac{1}{R^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial R}{\partial x'} \cdot dx' + \frac{\partial R}{\partial y'} \cdot dy' + \frac{\partial R}{\partial z'} \cdot dz'\right)}_{\text{skalární součin dvou vektorů}}$$

$$(dx', dy', dz') = d\vec{r}\,'$$

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x'}, \frac{\partial R}{\partial y'}, \frac{\partial R}{\partial z'}\right) = \text{grad}' R \quad \ldots \text{ gradient podle čárkovaných souřadnic}$$

$$\boxed{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = -\frac{1}{R^2} \cdot \mathrm{grad}' R \cdot \vec{dr}' = -\frac{1}{R^2} \cdot \mathrm{grad}' R \cdot \vec{\ell}}$$

Pro vektor $\vec{R}$ platí

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = (x, y, z) - (x', y', z')$$

$$= (x - x', y - y', z - z')$$

Pro velikost vektoru $\vec{R}$ platí

$$R = |\vec{R}| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

Pro $\mathrm{grad}' R$ platí pomocí derivace složené funkce

$$\mathrm{grad}' R = \left(\frac{\partial R}{\partial x'}, \frac{\partial R}{\partial y'}, \frac{\partial R}{\partial z'} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \cdot 2 \cdot (x-x')^1 \cdot (-1), \right.$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \cdot 2 \cdot (y-y') \cdot (-1),$$

$$\left. \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \cdot 2 \cdot (z-z') \cdot (-1) \right) =$$

$$= -\underbrace{\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}}_{R} \cdot \underbrace{\left(x-x',\ y-y',\ z-z'\right)}_{\vec{R}} =$$

$$= -\frac{1}{R}\cdot\vec{R} = -\frac{\vec{R}}{R}$$

Takže bylo odvozeno, že platí vztah pro grad' R

$$\boxed{\operatorname{grad}' R = -\frac{\vec{R}}{R}}$$

Pro potenciál elektrického pole dipólu pak platí

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(-\frac{1}{R^2}\cdot \operatorname{grad}' R\cdot\vec{l}\right)$$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(-\frac{1}{R^2}\cdot\vec{l}\right)\cdot\left(-\frac{\vec{R}}{R}\right)$$

$$\varphi = \frac{q\cdot\vec{l}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0\cdot R^3}$$

Zavádí se pojem <u>moment elektrického dipólu $\vec{p}$</u>

$$\boxed{\vec{p} = q \cdot \vec{l}}$$

Pro <u>potenciál elektrického pole dipólu</u> platí tedy

$$\boxed{\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi \varepsilon_0 \cdot R^3} = \frac{\vec{R} \cdot \vec{p}}{4\pi \varepsilon_0 \cdot R^3}}$$

Protože elektrický dipól je nekonečně malý, lze brát vektor $\vec{R}$ z místa Q_1, nebo místa Q_2, nebo uprostřed mezi náboji (správně podle výpočtu by to bylo v místě Q_1).

<u>Elektrický dipól lze také umístit do počátku soustavy souřadnic</u>

pak platí $\vec{R} = \vec{r}$

a lze psát

$$\boxed{\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi \varepsilon_0 \cdot r^3} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{4\pi \varepsilon_0 \cdot r^3}}$$

Pro výpočet intenzity elektrického pole dipólu se použije odvozený vztah pro potenciál elektrického pole dipólu a vztah

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat elektrický dipól umístěný do počátku souřadného systému. Lze psát

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\left(\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3}\right)$$

Podle pravidla pro derivaci součinu platí

$$\vec{E} = -\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3}\cdot \mathrm{grad}\,(\vec{r}\cdot\vec{p}) + (\vec{r}\cdot\vec{p})\cdot \mathrm{grad}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r^3}\right)\right]$$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\frac{1}{r^3}\cdot \mathrm{grad}\,(\vec{r}\cdot\vec{p}) + (\vec{r}\cdot\vec{p})\cdot \mathrm{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)\right]}$$

Předpokládám, že $\vec{p}$ není funkcí souřadnic, tedy

$$\vec{p} \neq f(\vec{r})$$

a platí

$$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}.$$

Nejdříve vyjádříme výraz $\operatorname{grad}(\vec{r}\cdot\vec{p})$

$$\operatorname{grad}(\vec{r}\cdot\vec{p}) = \operatorname{grad}\left(x\cdot p_x + y\cdot p_y + z\cdot p_z\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}(x\cdot p_x + y\cdot p_y + z\cdot p_z),\ \frac{\partial}{\partial y}(x\cdot p_x + y\cdot p_y + z\cdot p_z),\ \frac{\partial}{\partial z}(x\cdot p_x + y\cdot p_y + z\cdot p_z)\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}(x\cdot p_x),\ \frac{\partial}{\partial y}(y\cdot p_y),\ \frac{\partial}{\partial z}(z\cdot p_z)\right) =$$

$$= \left(p_x\cdot\frac{\partial x}{\partial x},\ p_y\cdot\frac{\partial y}{\partial y},\ p_z\cdot\frac{\partial z}{\partial z}\right) = (p_x, p_y, p_z)$$

Tedy platí

$$\boxed{\operatorname{grad}(\vec{r}\cdot\vec{p}) = \vec{p}}$$

Dále vyjádříme výraz $\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)$

$$\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^3},\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r^3},\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r^3}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2},\ \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2},\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right) =$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x,\ -\frac{3}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2y,\ -\frac{3}{2}\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2z\right) =$$

$$= \left(-3 \cdot r^{-5} \cdot x \,,\, -3 \cdot r^{-5} \cdot y \,,\, -3 \cdot r^{-5} \cdot z \right) =$$

$$= -\frac{3}{r^5} \cdot (x, y, z) = -\frac{3}{r^5} \cdot \vec{r}$$

Tedy platí

$$\boxed{\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3 \cdot \vec{r}}{r^5}}$$

Pro intenzitu můžeme dále psát

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{r^3} \cdot \operatorname{grad}(\vec{r} \cdot \vec{p}) + (\vec{r} \cdot \vec{p}) \cdot \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) \right]$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{1}{r^3} \cdot \vec{p} + (\vec{r} \cdot \vec{p}) \cdot \left(-\frac{3 \cdot \vec{r}}{r^5} \right) \right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left[\frac{3 \cdot (\vec{r} \cdot \vec{p}) \cdot \vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left[\frac{3 \cdot (\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right] \end{aligned}}$$

.. což je <u>intenzita elektrického pole dipólu umístěného v počátku souřadného systému.</u>