(4) Spočítejte intenzitu elektrického pole vně i uvnitř homogenně nabitého nekonečného válce pomocí Gaussova zákona.

Gaussův zákon elektrostatiky v integrálním tvaru

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

(obecně pro prostředí s permitivitou $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$)

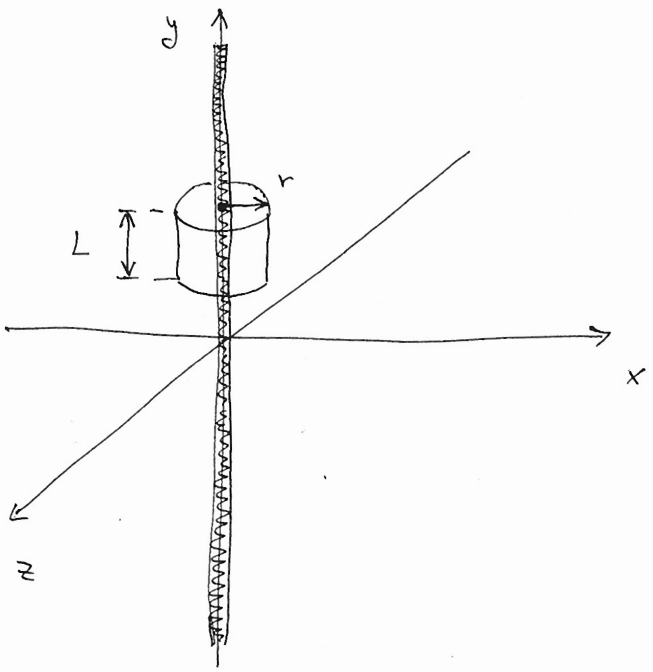
Tok vektoru výsledné intenzity elektrostatického pole libovolnou uzavřenou plochou je roven náboji uzavřenému v ploše a dělenému permitivitou prostředí.

Řešení úlohy rozdělíme na dvě varianty – válec nekonečně malého poloměru a válec konečného poloměru.

(A) nekonečně dlouhý válec nekonečně malého poloměru

Tato varianta odpovídá nekonečně tenkému přímému vláknu.

Gaussovu plochu zvolíme jako válcovou plochu o výšce L a poloměru podstavy r.



Nechť válec prochází osou y, resp. osa válce prochází osou y.

Vzhledem k symetrii úlohy musí být vektor intenzity elektrického pole $\vec{E}$ kolmý na plášť válce. Kdyby nebyl, pak rotace válce okolo osy x o 180° způsobí změnu výsledného elektrického pole a jeho intenzity $\vec{E}$. Rotace válce okolo osy x o 180° však nezpůsobí změnu intenzity $\vec{E}$, a proto $\vec{E}$ je kolmé na plášť válce. Ze symetrie úlohy také vyplývá, že velikost intenzity elektrického pole může záviset pouze na vzdálenosti od pláště válce.

Prostředí kolem válce je předpokládáno za vakuum, tj. $\varepsilon = \varepsilon_0$. Náboj uzavřený v Gaussově ploše je

$$Q = \lambda \cdot L ,$$

kde λ je lineární hustota náboje válce (vlákna) nekonečně malého poloměru.

Platí tedy

$$\oint\limits_{\substack{\text{Gaussův}\\ \text{válec}}} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Tok vektoru $\vec{E}$ podstavami Gaussova válce je zřejmě nulový, protože vektor $\vec{E}$ je kolmý k normále podstav Gaussova válce ($\vec{E} \perp \vec{dS} \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{dS} = 0$).

Dostáváme tedy

$$\int\limits_{\text{plášť G. válce}} E(r)\,.\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)\,.\,2\pi\,.\,r\,.\,L = \frac{\lambda\,.\,L}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\,.\,\varepsilon_0\,.\,r}}$$

Pro porovnání uveďme výslednou intenzitu elektrického pole konečného vlákna počítanou přímou integrací podle Coulombova zákona

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\,.\,\varepsilon_0\,.\,r_0}\,.\,(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1),$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\,.\,\varepsilon_0\,.\,r_0}\,.\,(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1).$$

Asymptotické vyjádření intenzity elektrického pole v místě blízko vlákna (tj. vlákno nekonečné délky) udává

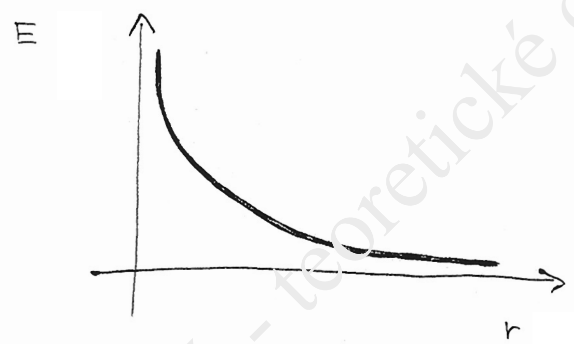
$$E_x \simeq \frac{\lambda}{2\pi\,.\,\varepsilon_0\,.\,r_0}, \quad E_y \simeq 0.$$

kde $\underline{r_0}$ je kolmá vzdálenost od vlákna.

<u>Výsledná intenzita elektrického pole nekonečně dlouhého válce s nekonečně malým poloměrem</u> je

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$$

kde $\underline{r}$ je vzdálenost od osy válce.



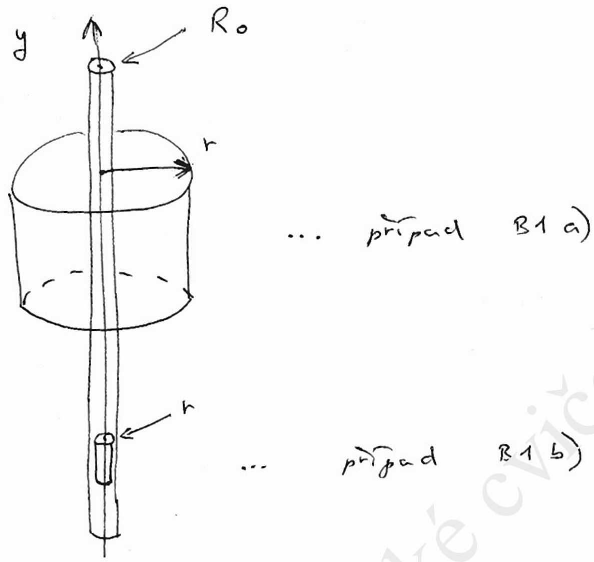
Ⓑ <u>nekonečně dlouhý válec konečného poloměru R_0</u>

Zde rozlišíme dva případy – vodivý válec a nevodivý válec. Válec je opět umístěn ve vakuu ($\varepsilon = \varepsilon_0$).

Ⓑ1 <u>vodivý válec</u>

Náboj se rozloží na povrchu válce. Válec o poloměru $\underline{R_0}$ je homogenně nabitý po délce i obvodu a dostáváme proto plošnou hustotu náboje na povrchu válce

$$\sigma = \frac{\lambda \cdot L}{2\pi \cdot R_0 \cdot L} = \frac{\lambda}{2\pi \cdot R_0}$$



Intenzitu elektrického pole budeme počítat samostatně pro případ $r \geq R_0$ B1 a) a pro případ $r < R_0$ B1 b).

B1 a)

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

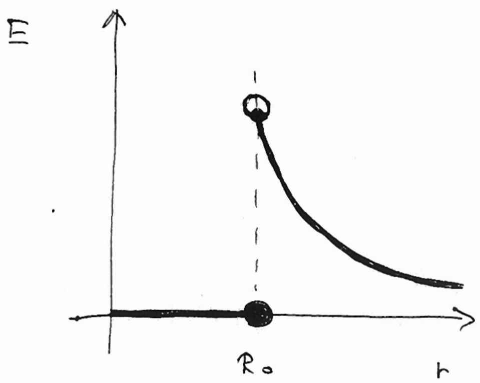
$$E(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \frac{\sigma \cdot 2\pi R_0 \cdot L}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \quad \text{pro} \quad r \geq R_0}$$

B1 b)

$$\boxed{E(r) = 0 \quad \text{pro} \quad r < R_0}$$

Výsledná intenzita elektrického pole nekonečně dlouhého vodivého válce konečného poloměru R_0, kde r je vzdálenost od osy válce.



Na povrchu nabitého vodivého vlákna je nulová intenzita elektrického pole, bude vysvětleno v příkladu č. 8.

B2 nevodivý válec

Náboj je rovnoměrně rozložen v celém objemu válce o poloměru $\underline{R_0}$.

$$\rho = \frac{\lambda \cdot L}{\pi \cdot R_0^2 \cdot L} = \frac{\lambda}{\pi \cdot R_0^2}$$

Stejně jako v případě B1, počítáme intenzitu elektrického pole samostatně pro případ $r \geq R_0$ B2 a a pro případ $r < R_0$ B2 b. (viz předchozí obrázek).

B2 a)

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \frac{\rho \cdot \pi \cdot R_0^2 \cdot L}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r} \quad \text{pro} \quad r > R_0}$$

B 2 b) Válec je tvořen prostředím s permitivitou ε_1.

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_1}$$

$$E(r) \cdot 2\pi r \cdot L = \frac{\rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot L}{\varepsilon_1}$$

$$\left((\rho) \cdot \left(\frac{\pi r^2 \cdot L}{\varepsilon_1} \right) = \left(\frac{\tau}{\pi R_0^2} \right) \cdot \left(\frac{\pi r^2 \cdot L}{\varepsilon_1} \right) = \frac{\tau \cdot r^2 \cdot L}{R_0^2 \cdot \varepsilon_1} \right)$$

$$E(r) = \frac{\tau \cdot r}{2\pi \cdot \varepsilon_1 \cdot R_0^2} \qquad \text{pro} \qquad r < R_0$$

Výsledná intenzita elektrického pole nekonečně dlouhého nevodivého válce konečného poloměru R_0, kde r je vzdálenost od osy válce.