(5) Spočítejte intenzitu elektrického pole dvou opačně homogenně nabitých rovin pomocí Gaussova zákona. Výsledek použijte k přibližnému výpočtu kapacity deskového kondenzátoru.

Gaussův zákon elektrostatiky v integrálním tvaru

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

(obecně pro prostředí s permitivitou $\varepsilon = \varepsilon_0 . \varepsilon_r$)

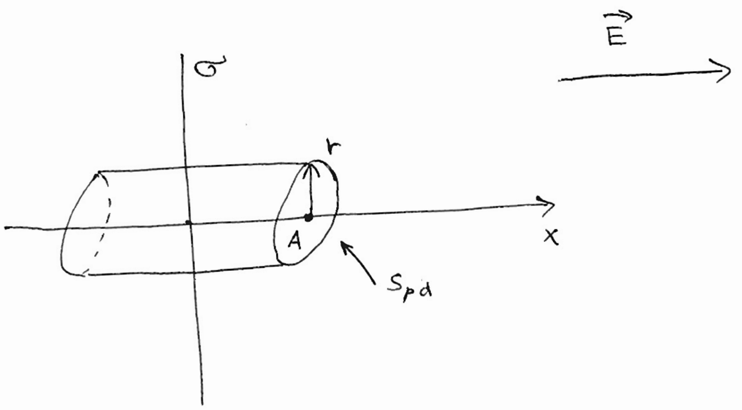
Nejdříve spočítáme intenzitu elektrického pole jedné roviny. Výsledné pole pak dostaneme superpozicí elektrických polí dvou takových rovin.

(A) intenzita elektrického pole jedné roviny

Velikost vektoru $\vec{E}$ určíme pomocí Gaussova zákona

$$\oint_{\substack{\text{Gaussův} \\ \text{válec}}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

neboť rovina je umístěna ve vakuu. Gaussovu plochu zvolíme jako válec kolmý na nabitou rovinu s podstavami symetricky rozmístěnými na obou stranách.



Vzhledem k symetrii úlohy musí být vektor intenzity elektrického pole $\vec{E}$ kolmý na tuto rovinu. Kdyby nebyl, pak otočení nabité roviny kolem osy kolmé k rovině procházející uvažovaným bodem A způsobí změnu výsledného elektrického pole a jeho intenzity $\vec{E}$. Otočení nabité roviny kolem osy kolmé k rovině však nezpůsobí změnu intenzity $\vec{E}$, a proto $\vec{E}$ je kolmé na tuto rovinu.

Ze symetrie úlohy také vyplývá, že velikost intenzity elektrického pole může záviset pouze na vzdálenosti uvažovaného bodu A od nabité roviny.

Tok vektoru $\vec{E}$ pláštěm Gaussova válce je zřejmě nulový, protože vektor $\vec{E}$ je kolmý k normále pláště Gaussova válce
($\vec{E} \perp \vec{dS} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0$).

Dostáváme tedy

$$\int\limits_{\substack{\text{podstavy} \\ \text{Gaussova válce}}} E(x)\,.\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E(x) \cdot \cancel{S_{pd}} \cdot 2 = \frac{\sigma \cdot \cancel{S_{pd}}}{\varepsilon_0}$$

$$E(x) = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}$$ .. nezávisí na x-ové souřadnici

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0}}$$

Homogenně nabitá rovina vytváří homogenní elektrické pole, neboť jeho intenzita nezávisí na vzdálenosti od roviny. V případě $\sigma > 0$ míří vektor intenzity $\vec{E}$ od nabité roviny, v opačném případě směrem k ní.

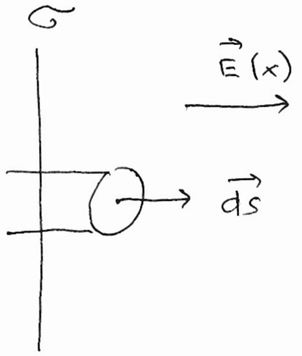
(B) intenzita elektrického pole dvou opačně nabitých rovin

V případě opačně nabitých rovin se oba příspěvky vektorově sčítají. Výsledné pole je pak nenulové pouze mezi oběma rovinami a má velikost

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Určení směru intenzity elektrického pole jedné roviny

$$\int_{2.S_{pd}} \vec{E}(x)\,.\,d\vec{S} = \frac{\sigma\,.\,S_{pd}}{\varepsilon_0}$$



$$\vec{E}(x)\,.\,d\vec{S} = |\vec{E}(x)|\,.\,|d\vec{S}|\,.\cos\varphi$$

Protože $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ a mají stejný směr, pak platí $\varphi = 0$ a tedy $\cos\varphi = 1$. Můžeme tedy psát

$$\vec{E}(x)\,.\,d\vec{S} = E\,.\,dS\,.\,1 = E\,.\,dS$$

$$E(x)\,.\,\cancel{S_{pd}}\,.\,2 = \frac{\sigma\,.\,\cancel{S_{pd}}}{\varepsilon_0}$$

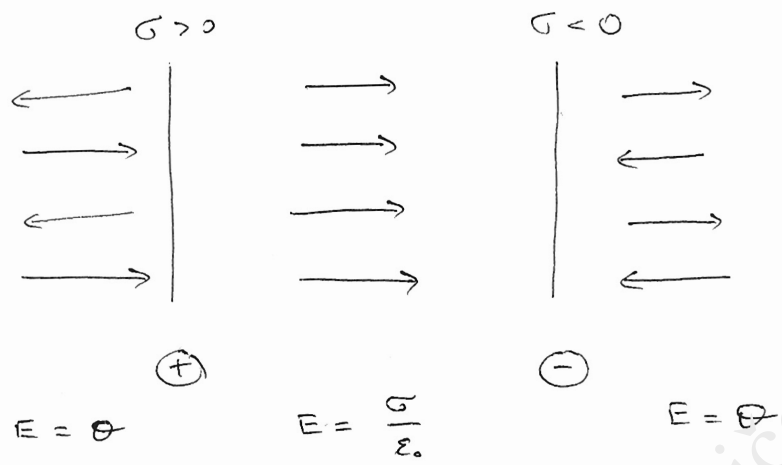
$$\boxed{E(x) = \frac{\sigma}{2\,.\,\varepsilon_0}}$$

Pro $\sigma > 0$ platí $E(x) > 0$ ... tj. $\vec{E}$ směřuje od roviny.

Pro $\sigma < 0$ platí $E(x) < 0$ ... tj. $\vec{E}$ směřuje opačně než je nakresleno na obrázku, tj. $\vec{E}$ směřuje k rovině.

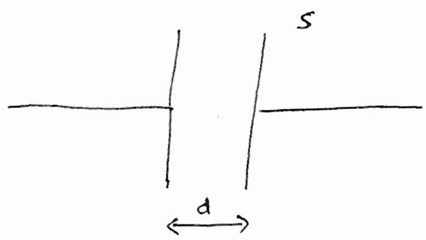
přičemž míří od kladně nabité roviny směrem k záporně nabité.

Vně obou rovin se pole vzájemně ruší.



ⓒ <u>přibližný výpočet kapacity deskového kondenzátoru</u>

V případě deskového kondenzátoru můžeme předpokládat, zanedbáme-li tzv. okrajové vlivy, že elektrické pole mezi deskami má stejný charakter jako pole mezi opačně nabitými rovinami.



Kapacitou kondenzátoru se rozumí poměr mezi nábojem Q na kondenzátoru a přiloženým napětím U, tedy

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma \cdot S}{U} .$$

V homogenním poli platí pro napětí vztah $E = \frac{U}{d}$, neboli

$$U = E \cdot d \, .$$

Můžeme proto dále psát <u>kapacitu deskového kondenzátoru</u>

$$\boxed{C = \frac{\sigma \cdot S}{E \cdot d} = \frac{\cancel{\sigma} \cdot S}{\frac{\cancel{\sigma}}{\varepsilon_0} \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d}}$$