(8) Vyšetřete intenzitu elektrického pole u povrchu nabitého vodivého tělesa obecného tvaru.

Jedná se o zobecnění předchozích vybraných částí úloh.

Pro libovolné vodivé nabité těleso platí, že elektrický náboj se rozloží po jeho povrchu.

Objemová hustota náboje uvnitř tělesa je proto nulová

$$\rho = 0 ,$$

plošná hustota náboje na povrchu tělesa je nenulová, obecně však není homogenní, závisí na geometrii povrchu tělesa

$$\sigma \neq 0 .$$

Potenciál elektrického pole uvnitř a na povrchu tělesa je konstantní

$$\varphi = konst .$$

Povrch tělesa je tedy ekvipotenciální plochou.

Intenzita elektrického pole uvnitř a na povrchu tělesa je podle definice

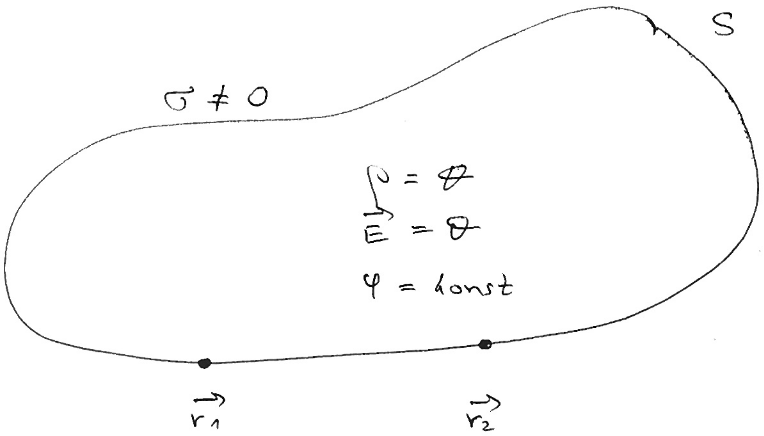
$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \,, \qquad \text{avšak} \qquad \varphi = \text{konst.},$$

z čehož vyplývá

$$\vec{E} = \theta \,.$$

Platí tedy, že uvnitř nabitého (ale i nenabitého) vodivého tělesa je v rovnovážném stavu vždy nulové elektrické pole ($\vec{E} = \theta$) i nulová objemová hustota náboje.

Vně nabitého vodivého tělesa je ~~ale~~ situace úplně odlišná. Náboje soustředěné na povrchu tělesa vytvářejí vně tělesa nenulové elektrické pole a libovolné místo v prostoru získává svůj elektrický potenciál, tedy i každý bod na povrchu tělesa má svůj potenciál (povrch tělesa je ekvipotenciální plochou) a při přemísťování dalších nábojů je nutné konat práci.



$E(x,y,z) \neq konst.$

$\varphi(x,y,z) \neq konst.$

Pro rozdíl potenciálů mezi dvěma místy $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ na povrchu tělesa platí

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_{\infty}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r} - \int_{\infty}^{\vec{r}_1} -\vec{E}\cdot d\vec{r} =$$

$$= \cancel{\int_{\infty}^{\vec{r}_1} -\vec{E}\cdot d\vec{r}} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r} - \cancel{\int_{\infty}^{\vec{r}_1} -\vec{E}\cdot d\vec{r}} =$$

$$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Zároveň však povrch vodivého tělesa je na konstantním potenciálu, z čehož vyplývá

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 0.$$

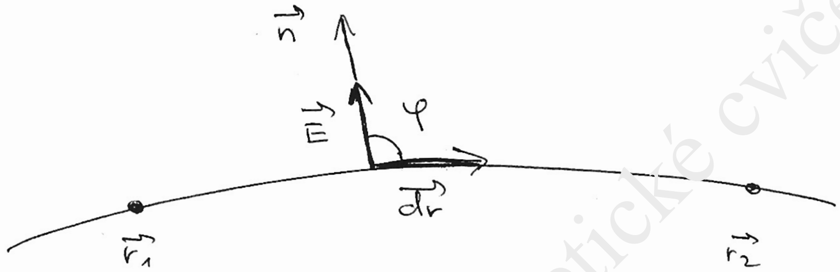
Dostáváme tedy

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0.$$

Tento integrál nezávisí na integrační cestě, můžeme proto zvolit integrační cestu takovou, která leží celá na povrchu nabitého vodivého tělesa. Pak v každém místě povrchu, které leží na integrační cestě, musí platit

$$\vec{E}\,.\,\vec{dr} = 0$$

$$|\vec{E}|\,.\,|\vec{dr}|\,.\,\cos\varphi = 0$$



Protože $|\vec{dr}| \neq 0$ a blízko povrchu tělesa je $|\vec{E}| \neq 0$, musí platit

$$\cos\varphi = 0,$$

což dává

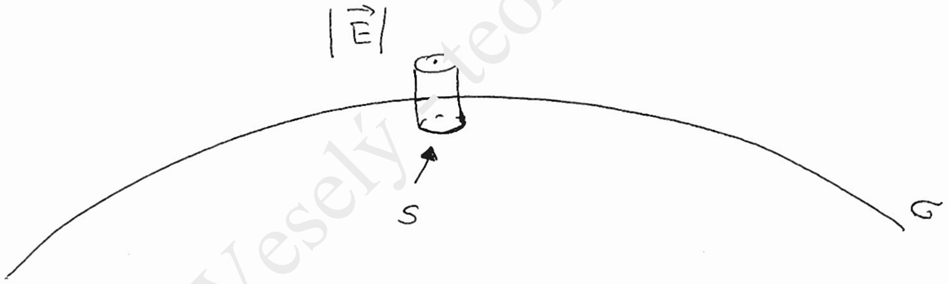
$$\varphi = \frac{\pi}{2} = 90°,$$ neboli

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{E} \perp \vec{dr} \\ \vec{E} \parallel \vec{n} \end{array}}$$

Protože integrační cestu mezi body $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ na povrchu tělesa si můžeme zvolit libovolně, platí výše uvedený vztah pro všechna místa na povrchu, resp. blízko povrchu tělesa.

Intenzita elektrického pole vně nabitého vodivého tělesa blízko u jeho povrchu je vždy kolmá na povrchovou plochu, tj. vektor intenzity $\vec{E}$ u vnějšího povrchu nabitého vodivého tělesa je vždy rovnoběžný s normálou příslušného místa povrchu tělesa.

Velikost intenzity elektrického pole blízko povrchu nabitého vodivého tělesa můžeme určit z Gaussova zákona.



Zvolíme Gaussovu plochu jako velmi malý válec s podstavou o velikosti S, jehož osa je kolmá na povrch tělesa

$$\int\limits_{\text{Gaussův válec}} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\varepsilon} .$$

Uvnitř tělesa je $\vec{E} = \vec{0}$, vně tělesa je $\vec{E}$ kolmé na povrch tělesa, takže integrál přes celý povrch Gaussova válce lze napsat jako integrál přes podstavu S, která je vně tělesa. Protože se jedná o velmi malý válec lze na jeho horní podstavě uvažovat konstantní hodnotu E.

$$\int\limits_{\substack{\text{Gaussův}\\ \text{válec}}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\int\limits_{\substack{\text{spodní podstava} \,+\, \text{stěny uvnitř tělesa}}} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\vec{E} = \vec{0}} + \underbrace{\int\limits_{\substack{\text{stěny válce}\\ \text{vně tělesa}}} \vec{E}\cdot d\vec{S}}_{\vec{E} \perp d\vec{S}} +$$

$$+ \int\limits_{\substack{\text{horní}\\ \text{podstava}}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = E \, . \, S$$

Také uvnitř nabitého vodivého tělesa není žádný elektrický náboj a vně tělesa je uvažován prostor bez náboje. Veškerý náboj umístěný v Gaussově válci se proto nachází na povrchu tělesa a lze psát

$$\frac{Q}{\varepsilon} = \frac{S\,.\,\sigma}{\varepsilon}$$

Lze proto psát

$$E\,.\,\cancel{S} = \frac{\cancel{S}\,.\,\sigma}{\varepsilon}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

neboli

$$\boxed{E(x,y,z)_{\text{blízko povrchu}} = \frac{\sigma(x,y,z)_{\text{na povrchu}}}{\varepsilon}}$$

Intenzita elektrického pole u vnějšího povrchu nabitého vodivého tělesa je přímo úměrná povrchové hustotě náboje v příslušném místě povrchu tělesa.

Povrchová hustota náboje σ závisí na celkovém náboji tělesa a na geometrii povrchu tělesa, resp. jeho křivosti. Čím vyšší křivost povrchu tělesa, tím vyšší σ a tedy vyšší E.

Na hrotech vyčnívajících z povrchu nabitého tělesa je největší σ a tedy kolem nich je největší intenzita elektrického pole E.

↑ křivost povrchu ⇒ ↑ větší σ ⇒ ↑ větší E