9 Spočítejte celkovou elektrostatickou energii homogenně nabité koule. Jak velký by byl elektron, kdybychom si jej takto představili? Možné další příspěvky k energii elektronu neuvažujte.

Energie W elektrostatického pole se počítá pomocí hustoty energie w

$$w = \frac{1}{2}\,\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\cdot\varepsilon\cdot E^2,$$

kde $\vec{D}$ je vektor elektrické indukce a $\vec{E}$ je intenzita elektrického pole v příslušném místě elektrického pole, přičemž platí

$$\vec{D} = \varepsilon\cdot\vec{E} = \varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\vec{E}.$$

Celková energie elektrostatického pole je dána vztahem

$$W = \int\limits_{\text{celý prostor}} w\cdot dV$$

Zdeněk Veselý - teoretické cvičení z FYA2

(A) celková elektrostatická energie homogenně nabité dielektrické koule

V příkladu č. 6 jsme získali intenzitu elektrického pole vně i uvnitř homogenně nabité nevodivé koule s nábojem Q_k vyjádřenou vztahy

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon} \cdot \frac{Q_k \cdot r}{R^3} \quad \ldots \text{ pro } r < R \,!$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_k}{r^2} \quad \ldots \text{ pro } r > R \,.$$

Energii W elektrostatického pole lze potom psát

$$W = \int\limits_{\substack{\text{celý}\\ \text{prostor}}} \frac{1}{2}\,\varepsilon \cdot E^2 \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \int_0^R \varepsilon \left(\frac{Q_k \cdot r}{4\pi\,\varepsilon \cdot R^3}\right)^2 \cdot 4\pi r^2 \cdot dr \; +$$

$$+ \; \frac{1}{2} \cdot \int_R^\infty \varepsilon_0 \cdot \left(\frac{Q_k}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}\right)^2 \cdot 4\pi \cdot r^2 \cdot dr$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_k^2}{4\pi\,\varepsilon \cdot R^6} \cdot \int_0^R r^4 \cdot dr + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_k^2}{4\pi\,\varepsilon_0} \cdot \int_R^\infty r^{-2} \cdot dr$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_k^2}{4\pi\,\varepsilon \cdot R^6} \cdot \left(\left. \frac{r^5}{5} \right|_0^R \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_k^2}{4\pi\,\varepsilon_0} \cdot \left(\left. -\frac{1}{r} \right|_R^\infty \right)$$

Zdeněk Veselý - teoretické cvičení z FYA2

$$W = \frac{1}{10} \cdot \frac{Q_k^2}{4\pi\, \varepsilon \cdot R} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_k^2}{4\pi\, \varepsilon_0 \cdot R}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_k^2}{4\pi\, \varepsilon_0 \cdot R} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\varepsilon_r} + 1 \right)$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_k^2}{4\pi\, \varepsilon_0 \cdot R} \cdot \left(\frac{1 + 5 \cdot \varepsilon_r}{5 \cdot \varepsilon_r} \right)}$$

což je celková elektrostatická energie homogenní nabité dielektrické koule s relativní permitivitou ε_r umístěné ve vakuu.

Lze si povšimnout, že příspěvek vnějšího prostředí, ve kterém je koule, je větší než příspěvek vnitřku koule, neboť

$$\frac{1}{5 \cdot \varepsilon_r} < 1 .$$

(B) velikost elektronu odpovídajícího výše uvedené kouli

Má-li elektron odpovídat výše uvedené kouli, bude vnitřním prostředím koule též vakuum $(\varepsilon_r = 1)$.

Celková energie W přechází na

$$W = \frac{3}{5} \cdot \frac{Q_k^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R}$$

Zdeněk Veselý - teoretické cvičení z FYA2

Tato energie je rovna klidové energii elektronu $\underline{E_0}$ s klidovou hmotností $\underline{m_{e0}}$

$$E_0 = m_{e0} \cdot c^2$$

Z rovnosti energií lze psát ($Q_k = -e$ .. náboj elektronu)

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R} = m_{e0} \cdot c^2$$

$$\boxed{R = \frac{3}{5} \cdot \frac{e^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot m_{e0} \cdot c^2}}$$

Výraz $\frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 \cdot m_{e0} \cdot c^2}$ je nazýván <u>klasickým poloměrem</u> <u>elektronu</u> a je přibližně roven $2{,}8 \times 10^{-15}$ m.

Zdeněk Veselý - teoretické cvičení z FYA2