

12

Efektivní brzdná síla působící na elektron v kovu je přímo úměrná hybnosti elektronu a nepřímo úměrná tlumicí době. Odvoďte mikroskopický tvar Ohmova zákona a odhadněte tlumicí dobu v případě mědi.

měrný elektrický odpor mědi	$\rho_{el} = 1,55 \times 10^{-8} \text{ } \Omega \cdot \text{m}$
hustota mědi	$\rho_{hm} = 8,96 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
relativní atomová hmotnost mědi	$A_r(\text{Cu}) = 63,5$
náboj elektronu	$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$
Avogadrova konstanta	$N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
klidová hmotnost elektronu	$m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
koncentrace elektronů v kovu	... n
tlumicí doba	... τ

A

Odvození mikroskopického tvaru Ohmova zákona

Pohybová rovnice elektronu je

$$m_e \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

kde \vec{F} je síla působící na elektron v kovu. Můžeme psát

$$m_e \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \cdot \vec{E} - \frac{m_e \cdot \vec{v}}{\tau}$$

kde $-e \cdot \vec{E}$ je síla působící na náboj elektronu $-e$ v elektrickém poli s intenzitou \vec{E} , druhý člen vpravo je brzdná síla (znaménko minus odpovídá tomu, že brzdná síla působí proti směru pohybu). Kdybychom nezapočetli s brzdou sílu $\frac{m_e \cdot \vec{v}}{\tau}$, konstantní síla $-e \cdot \vec{E}$ by vedla k tomu, že rychlost \vec{v} a tedy proudová hustota \vec{j} by rostly nade všechny meze.

Řešením pohybové rovnice se dostane

$$m_e \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -e \cdot \vec{E} - \frac{m_e \cdot \vec{v}(t)}{\tau}$$

$$\cancel{m_e} \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = - \left(\frac{e \cdot \vec{E}}{m_e} \cdot \tau + \vec{v}(t) \right) \cdot \frac{\cancel{m_e}}{\tau}$$

$$\frac{d\vec{v}(t)}{\frac{e \cdot \vec{E}}{m_e} \cdot \tau + \vec{v}(t)} = - \frac{1}{\tau} \cdot dt$$

Integrací rovnice se dostane

$$\ln \left(\frac{e \cdot \vec{E}}{m_e} \cdot \tau + \vec{v}(t) \right) = - \frac{t}{\tau} + \ln \vec{C}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{C} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{e \cdot \vec{E}}{m_e} \cdot \tau$$

pro $\vec{v}(0) = 0 \Rightarrow 0 = \vec{c} - \frac{e \cdot \vec{E}}{m_e} \cdot \tau$

$$\vec{c} = \frac{e \cdot \vec{E}}{m_e} \cdot \tau$$

Po dosažení ziskáme vztah pro rychlost elektronů

$$\vec{v}(t) = \frac{e \cdot \vec{E}}{m_e} \cdot \tau \cdot \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right)$$

Po dostatečně dlouhém čase se rychlost ustálí na hodnotě ($t \rightarrow \infty$) (stačí však $t \gg \tau$)

$$\vec{v}(\infty) = - \frac{e \cdot \vec{E}}{m_e} \cdot \tau$$

Proudová hustota je pak ($q = -e$)

$$\vec{j} = n \cdot q \cdot \vec{v}$$

$$\vec{j} = n \cdot (-e) \cdot \left(- \frac{e \cdot \vec{E}}{m_e} \cdot \tau \right) = \frac{n \cdot e^2 \cdot \tau}{m_e} \cdot \vec{E}$$

Tento uvedený tvar rovnice je mikroskopický tvar Ohmova zákona.

ⓑ Odhad velikosti tlumivé doby τ

konstanta úměrnosti mezi \vec{j} a \vec{E} je měrná elektrická vodivost, neboli (měrný elektrický odpor)⁻¹.

$$\frac{1}{\rho_{el}} = \frac{n \cdot e^2 \cdot \tau}{m_e} \Rightarrow$$

$$\tau = \frac{m_e}{n \cdot e^2 \cdot \rho_{el}}$$

V minulém příkladu byl odvozen vztah pro koncentraci elektronů ve tvaru

$$n = \frac{\rho_{hm} \cdot N_A}{A_r \cdot 10^{-3}} \cdot (\text{počet elektronů vodičových v atomu})$$

Atomy mědi mají, vzhledem k jejich umístění v periodické tabulce prvků, jeden vodičový elektron na atom

$$n = \frac{\rho_{hm} \cdot N_A}{A_r \cdot 10^{-3}} \cdot 1$$

Po dosazení se dostane tlumivá doba τ

$$\tau = \frac{m_e \cdot A_r \cdot 10^{-3}}{e^2 \cdot \rho_{el} \cdot \rho_{hm} \cdot N_A}$$

Po dosazení číselných hodnot

$$\tau = \frac{9,1 \times 10^{-31} \cdot 63,5 \cdot 10^{-3}}{(1,602 \times 10^{-19})^2 \cdot 1,55 \times 10^8 \cdot 8,96 \times 10^3 \cdot 6,022 \times 10^{23}} \doteq 2,7 \times 10^{-14} \text{ s}$$

Ve většině případů je tedy možno považovat tlumivou dobu za malou veličinu.