(13) Ohmův zákon neplatí obecně. Odvoďte tzv. třípolovinový zákon ($I \sim U^{3/2}$) pro elektrický proud ve vakuu. Řešte rovinný případ.

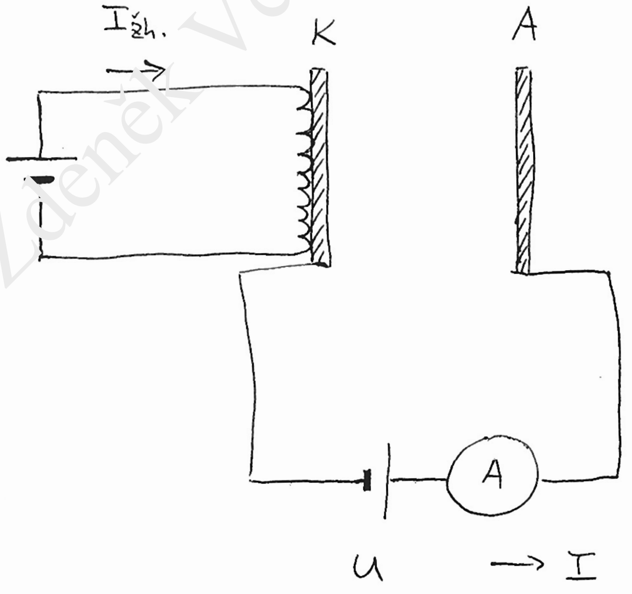
Ohmův zákon má tvar $R = \frac{U}{I}$,

nebol: $I = \frac{U}{R}$,

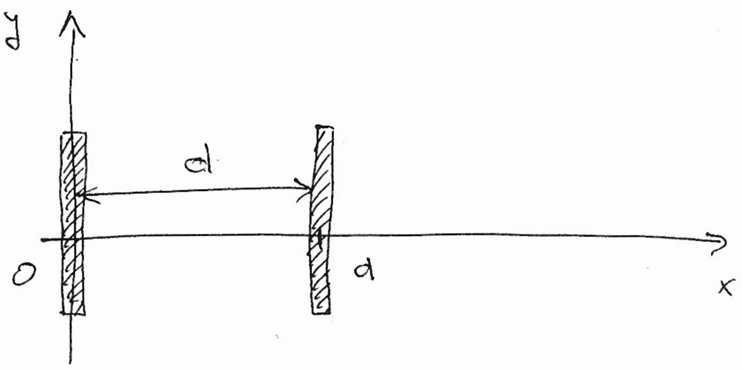
nebol: $\boxed{I \sim U.}$

Pro elektrický proud ve vakuu však platí jiný zákon, tzv. zákon třípolovinový.

Předpokládejme následující uspořádání žhavené katody, a dále anody ve vakuu



Žhavicí proud $I_{žh}$ nám žhaví katodu, ze které jsou emitovány elektrony putující vakuem ke druhé elektrodě, anodě.



Jako výchozí rovnice použijeme tři následující vztahy.

(1) Vyjádření pro konstantní velikost hustoty proudu

$$\vec{j} = n(x) \cdot q \cdot \vec{v}(x)$$

Mezi elektrodami putují pouze elektrony, tzn.

$n(x)$ je koncentrace elektronů, $q = -e$ náboj elektronu, $\vec{v}(x)$ je střední rychlost elektronů.

Pro velikost proudové hustoty j platí

$$j = +n(x) \cdot e \cdot v(x)$$

nebolí:

$$n(x) \cdot e = +\frac{j}{v(x)}$$

② Laplaceovu – Poissonovu rovnici pro potenciál

$$\boxed{\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}}\,,$$

kde $\boxed{\rho(x) = -n(x).e}$ je objemová hustota náboje.

Potenciál $\varphi(x)$ je dán jednak rozložením elektronů $\rho(x)$, dále přiloženým napětím $U = \varphi(d) - \varphi(0)$.

Předpokládá se, že pro $x = 0$ platí $\varphi(0) = 0$ (katoda), kde je dále $v(0) = 0$, neboli z katody vylétají elektrony s nulovou počáteční rychlostí.

③ Zákon zachování energie

$$\frac{1}{2}m.v^2(x) = e.\varphi(x)\,,$$

neboli
$$\boxed{v(x) = \sqrt{\frac{2.e.\varphi(x)}{m}}}$$

Vyjdeme ze vztahu ② a postupným přidáváním vztahů ① a ③ dostáváme

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = \frac{n(x).e}{\varepsilon_0} = \frac{j}{v(x).\varepsilon_0} = \frac{j}{\varepsilon_0.\sqrt{\frac{2.e.\varphi(x)}{m}}}$$

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = \frac{j}{\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{m}{2 . e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

Provedeme substituci

$$a = \frac{j}{\varepsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{m}{2 . e}}$$

a dostáváme

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = a \, . \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}} \, .$$

Řešení předpokládáme ve tvaru

$$\varphi(x) = \alpha \, . \, x^k \, .$$

Po dosazení máme

$$\alpha \, . \, k \, . \, (k-1) \, . \, x^{k-2} = a \, . \, \alpha^{-\frac{1}{2}} \, . \, x^{-\frac{k}{2}}$$

Mají-li být výrazy na obou stranách rovnice stejné, musí současně platit

$$k - 2 = -\frac{k}{2}$$

$$2k - 4 = -k$$

$$k = \frac{4}{3}$$

$$\alpha \, . \, k \, . \, (k-1) = a \, . \, \alpha^{-\frac{1}{2}}$$

$$\alpha^{\frac{3}{2}} \, . \, \frac{4}{3} \, . \, \frac{1}{3} = a$$

$$\alpha = \left(\frac{9 \, . \, a}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Výsledné řešení je tedy

$$\boxed{\varphi(x) = \left(\frac{9 . a}{4}\right)^{2/3} . \, x^{\frac{4}{3}}}$$

Toto řešení musí splňovat okrajové podmínky na elektrodách, tj.

(1) $\varphi(0) = 0$ ... platí

(2) $\varphi(d) = U = \left(\frac{9 . a}{4}\right)^{2/3} . \, d^{\frac{4}{3}}$

$$\boxed{a = \left(\frac{U}{d^{\frac{4}{3}}}\right)^{3/2} . \, \frac{4}{9}}$$

Pro proudovou hustotu platí výše uvedený vztah substituce

$$a = \frac{j}{\varepsilon_0} . \sqrt{\frac{m}{2.e}} \, ,$$

neboli

$$\boxed{j = a . \, \varepsilon_0 . \sqrt{\frac{2.e}{m}}} \, .$$

Po dosazení za $\underline{a}$ se dostává proudová hustota

$$j = \frac{U^{3/2}}{d^2} . \, \varepsilon_0 . \sqrt{\frac{2.e}{m}} . \, \frac{4}{9}$$

a dále výsledný proud

$$I = j . S \, ,$$ neboli

$$\boxed{I = \frac{U^{3/2}}{d^2} \cdot \varepsilon_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot e}{m}} \cdot \frac{4}{9} \cdot S}$$

Výše uvedený vztah představuje závislost proudu I na napětí U ve vakuu.

Dostáváme tedy

$$\boxed{I \sim U^{3/2}}$$

což je tzv. třípolovinový zákon.