(17) Odvoďte z Maxwellových rovnic zákon zachování elektromagnetické energie.

Maxwellovy rovnice v základním tvaru:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (4)$$

Uvažujme prostředí s permitivitou ε a permeabilitou μ.
Hustota energie v elektromagnetickém poli je dána vztahem

$$w = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \left|\vec{E}\right|^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \left|\vec{B}\right|^2$$

Časovou změnu hustoty energie lze psát

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon \cdot \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \cdot \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Časovou změnu elektrické intenzity $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ získáme na základě Maxwellovy rovnice pro rotaci intenzity magnetického pole

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ ... základní tvar 4. Maxw. rovnice

$$\vec{D} = \varepsilon . \vec{E}$$ ... vztah mezi vektorem elektrické indukce a elektrické intenzity

$$\vec{B} = \mu . \vec{H}$$ .. vztah mezi vektorem magnetické indukce a magnetické intenzity.

Lze psát

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu . \vec{j} + \mu . \varepsilon . \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dále pro časovou změnu magnetické indukce $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ použijeme Maxwellovu rovnici pro rotaci elektrické intenzity

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Po dosazení za $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ a $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ můžeme psát časovou změnu hustoty elektromagnetické energie

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon . \vec{E} . \left(\frac{\mathrm{rot}\,\vec{B} - \mu . \vec{j}}{\mu . \varepsilon} \right) + \frac{1}{\mu} . \vec{B} . (-\mathrm{rot}\,\vec{E})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\mu} . \vec{E} (\mathrm{rot}\,\vec{B} - \mu . \vec{j}) - \frac{1}{\mu} . \vec{B} . \mathrm{rot}\,\vec{E}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{\mu} . (\vec{E} . \mathrm{rot}\,\vec{B} - \vec{B} . \mathrm{rot}\,\vec{E}) - \vec{j} . \vec{E}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\cdot\left(\vec{B}\cdot \operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}\right) - \vec{j}\cdot\vec{E}$$

($\operatorname{div}(\vec{X}\times\vec{Y}) = \vec{Y}\cdot\operatorname{rot}\vec{X} - \vec{X}\cdot\operatorname{rot}\vec{Y}$ ... pro libovolné vektory $\vec{X}$, $\vec{Y}$)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\cdot\operatorname{div}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) - \vec{j}\cdot\vec{E}$$

Výraz $\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu}\cdot\vec{E}\times\vec{B}}$ je tzv. Poyntingův vektor představující hustotu toku energie. Dále lze psát

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{S} - \vec{j}\cdot\vec{E}}$$

Tento výsledný vztah je již zákonem zachování energie, neboť divergence vektoru $\vec{S}$ odpovídá výtoku energie za jednotku času z daného jednotkového objemu ($-\operatorname{div}\vec{S}$ odpovídá vtoku) a výraz $\vec{j}\cdot\vec{E}$ je hustou výkonu sil, jimiž elektromagnetické pole působí na náboje a jímž je tak část energie předávána, resp. odebírána.