Příklad 5

Zjistěte jak se pohybuje bodové těleso ve stacionárním homogenním silovém poli (takovým polem může být gravitační nebo elektrostatické pole v určité oblasti prostoru).

V obecném silovém poli působí na bodové těleso síla, která je závislá na poloze a čase, tj.

$$\vec{F}(x, y, z, t) \;. \tag{1}$$

Stacionárnost silového pole znamená jeho nezávislost na čase

$$\vec{F}(x, y, z, t) = \vec{F}(x, y, z) \;, \tag{2}$$

homogennost silového pole znamená nezávislost vektoru síly na poloze

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{F} = \overrightarrow{konst.} \tag{3}$$

Zjistit pohyb bodového tělesa ve stacionárním homogenním silovém poli znamená řešit pohybovou rovnici

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} \;. \tag{4}$$

Souřadný systém je vhodné zvolit tak, aby vektor síly byl rovnoběžný se směrem některé ze souřadnicových os, nechť je touto osou osa y. Potom lze vektor síly zapsat ve tvaru

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (0, F, 0), \tag{5}$$

a pohybová rovnice bude mít souřadnicový tvar

$$\boxed{\begin{aligned} m \cdot a_x &= 0, \\ m \cdot a_y &= F, \\ m \cdot a_z &= 0. \end{aligned}} \tag{6}$$

Z rovnic (6) vyplývá, že pohyb ve směru osy x a z je rovnoměrný a pohyb ve směru osy y je rovnoměrně zrychlený. Pro rychlosti těchto pohybů platí

$$\begin{aligned} v_x &= \int a_x \, dt = \text{konst.} = v_{x0}, \\ v_y &= \int a_y \, dt = \frac{F}{m} \cdot t + \text{konst.} = \frac{F}{m} \cdot t + v_{y0}, \\ v_z &= \int a_z \, dt = \text{konst.} = v_{z0}. \end{aligned} \tag{7}$$

Zvolený souřadnicový systém není podmínkou rovnoběžnosti síly $\vec{F}$ s osou y určen jednoznačně. Souřadnicový systém lze ještě otáčet kolem této osy. Tím lze dosáhnout nulovosti rychlosti ve směru osy z, tzn. lze položit $v_{z0} = 0$. Zkoumaný pohyb je tedy rovinný a probíhá v rovině určené vektory $\vec{F}$ a $\vec{v}_0$. Navíc, jsou-li oba vektory rovnoběžné, jedná se dokonce o pohyb po přímce.

V případě obecnějšího rovinného pohybu platí pro rychlosti v souřadnicových osách vztahy

$$\boxed{\begin{aligned} v_{x} &= v_{x0}\,, \\ v_y &= \frac{F}{m}\cdot t + v_{y0}\,, \\ v_z &= 0\,. \end{aligned}} \tag{8}$$

Poloha bodového tělesa vůči takto zvolenému souřadnicovému systému se určí integrací složek rychlosti podle času

$$x = \int v_x \cdot dt = v_{x0}\cdot t + konst.\,,$$

$$y = \int v_y \cdot dt = \frac{F}{2m}\cdot t^2 + v_{y0}\cdot t + konst.\,, \tag{9}$$

$$z = \int v_z \cdot dt = konst.\,,$$

kde konstanty opět vyplývají z neurčitého integrálu a mají fyzikální význam polohy v čase $t = 0$ s. Pro polohu bodového tělesa tedy platí rovnice

$$x = v_{x0}\cdot t + x_0\,,$$

$$y = \frac{F}{2m}\cdot t^2 + v_{y0}\cdot t + y_0\,, \tag{10}$$

$$z = z_0 .$$

Zvolený souřadnicový systém lze ještě posunout tak, aby v čase $t = 0$ procházelo bodové těleso počátkem.

Parametrické rovnice polohy bodového tělesa (neboli parametrické rovnice trajektorie bodového tělesa) mají výsledný tvar

$$\boxed{\begin{aligned} x &= v_{x0} \cdot t , \\ y &= \frac{F}{2 \cdot m} \cdot t^2 + v_{y0} \cdot t , \\ z &= 0 . \end{aligned}} \qquad (11)$$

V ose x se jedná o pohyb rovnoměrný, v ose y o pohyb rovnoměrně zrychlený.

Ke zjištění tvaru trajektorie se z parametrických rovnic vyloučí parametr t. Podle hodnoty v_{x0} se uvažují dva případy.

A) V případě $v_{x0} = 0$ jsou parametrické rovnice trajektorie ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= 0 , \\ y &= \frac{F}{2 \cdot m} \cdot t^2 + v_{y0} \cdot t , \end{aligned} \qquad (12)$$

$$\boxed{z = 0,}$$

a <u>trajektorií je přímka</u>.

B) <u>V případě $v_{x0} \neq 0$</u> lze parametr $\underline{t}$ vyjádřit z rovnice pro polohu v ose $\underline{x}$ a dosadit do rovnice pro polohu v ose $\underline{y}$. Získá se tak

$$t = \frac{x}{v_{x0}} \tag{13}$$

a po dosazení do zbylých rovnic pro polohu nejen v ose $\underline{y}$, ale i v ose $\underline{z}$ se dostává

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \frac{F}{2m \cdot v_{x0}^2} \cdot x^2 + \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \cdot x \,, \\ z &= 0 . \end{aligned}} \tag{14}$$

<u>Trajektorií bodového tělesa je parabola s osou rovnoběžnou s osou</u> $\underline{y}$. Dále se zjistí souřadnice vrcholu paraboly a její orientace vzhledem k ose $\underline{y}$.

Pro první derivaci $\frac{dy}{dx}$ platí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F}{m \cdot v_{x0}^2} \cdot x + \frac{v_{y0}}{v_{x0}} \qquad (15)$$

Pro vrchol paraboly (rovnovážný bod) platí

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_v} = 0 \,, \qquad (16)$$

neboli

$$\frac{F}{m \cdot v_{x0}^2} \cdot x_v + \frac{v_{y0}}{v_{x0}} = 0 \,, \qquad (17)$$

odkud se dostává

$$x_v = - \frac{v_{y0}}{\cancel{v_{x0}}} \cdot \frac{m \cdot v_{x0}^{\cancel{2}}}{F} \,, \qquad (18)$$

$$\boxed{x_v = - \frac{m \cdot v_{x0} \cdot v_{y0}}{F}} \qquad (19)$$

Pro vrchol paraboly lze ještě nalézt souřadnice v osách $\underline{y}$, $\underline{z}$

$$y_v = y \Big|_{x = x_v} \qquad (20)$$

$$y_v = \frac{\cancel{F}}{2 \cdot \cancel{m} \cdot \cancel{v_{x0}^2}} \cdot (-\cancel{1})^2 \cdot \frac{m^{\cancel{2}} \cdot \cancel{v_{x0}^2} \cdot v_{y0}^2}{F^{\cancel{2}}} +$$

$$+ \frac{N_{y0}}{\cancel{N_{x0}}} \cdot (-1) \cdot \frac{m \cdot \cancel{N_{x0}} \cdot N_{y0}}{F} , \qquad (21)$$

$$y_v = \frac{m \cdot N_{y0}^2}{2 \cdot F} - \frac{m \cdot N_{y0}^2}{F} = \frac{m \cdot N_{y0}^2 - 2 \cdot m \cdot N_{y0}^2}{2 \cdot F} , \qquad (22)$$

$$\boxed{y_v = - \frac{m \cdot N_{y0}^2}{2 \cdot F} ,} \qquad (23)$$

a dále

$$z_v = z \,\Big|_{x = x_v} = 0 , \qquad (24)$$

$$\boxed{z_v = 0 .} \qquad (25)$$

Podle druhé derivace $\frac{d^2y}{dx^2}$ se zjistí orientace paraboly vzhledem k ose <u>y</u>, tzn. zda ve svém vrcholu má maximum či minimum

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{F}{m \cdot N_{x0}^2} \cdot x + \frac{N_{y0}}{N_{x0}} \right) = \frac{F}{m \cdot N_{x0}^2} , \qquad (26)$$

tzn. při $F > 0$, $m > 0$ platí $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ a tedy <u>vrchol paraboly</u> <u>je rovnovážný bod stabilní</u>, neboli zde <u>má parabola minimum</u> a parabola je otevřená směrem ke kladné polovce <u>y</u>.