Příklad 6 Raketa o hmotnosti 100 kg nese pohonné látky o hmotnosti 1 300 kg. Plyny tryskají z rakety (relativní) rychlostí 3 $km.s^{-1}$.

Určete možné zvýšení rychlosti rakety v kosmickém prostoru.

V kosmickém prostoru je zanedbatelný odpor prostředí (pro dostatečně malé rychlosti rakety) a stejně tak se může zanedbat gravitační působení vzdálených kosmických těles.

Raketa s tryskajícími plyny tedy tvoří izolovaný systém a její hybnost se zachovává. Toto platí v každém okamžiku pohybu rakety.

Nejprve se uvažuje raketa s neseným a zatím nevytrysklým palivem v čase t. Hybnost rakety je určena vztahem

$$p(t) = m(t) \cdot v(t), \qquad (1)$$

kde $p(t)$ je aktuální hybnost rakety, $m(t)$ aktuální hmotnost rakety a $v(t)$ aktuální rychlost rakety.

Nyní se uvažuje raketa s neseným a právě vytrysklým palivem o čas dt později. Hybnost systému raketa a právě vytrysklé palivo v čase dt se rovná

$$p(t+dt) = m(t+dt) \cdot v(t+dt) + \mu \cdot \left[v(t) - u\right], \qquad (2)$$

kde levý člen na pravé straně rovnice popisuje hybnost rakety s právě neseným palivem v čase t+dt, pravý člen na pravé straně rovnice vyjadřuje hybnost paliva vytrysklého v plynné podobě v čase mezi t a t+dt. Vytrysklé plyny mají hmotnost μ a jejich rychlost vůči raketě je u. Protože se však raketa pohybuje rychlostí v(t) vůči souřadnému systému, který je v klidu, pak rychlost plynů vytrysklých z rakety je vzhledem k tomuto souřadnému systému právě v(t) − u.

Hmotnost m(t + dt) a rychlost v(t + dt) lze zapsat rovnicemi

$$m(t+dt) = m(t) + dm, \qquad (3)$$

$$v(t+dt) = v(t) + dv \,, \tag{4}$$

kde dm je změna hmotnosti rakety za čas dt a dv je změna rychlosti rakety za čas dt (tyto změny jsou definované jako rozdíl nových hodnot v čase $t+dt$ a původních hodnot v čase t).

Dále platí, že hmotnost právě vytrysklých plynů z rakety za čas dt (mezi časy t a $t+dt$) je

$$\mu = -\,dm\,. \tag{5}$$

Zákon zachování hybnosti systému raketa a vytrysklé palivo je vyjádřen vztahem

$$p(t+dt) = p(t) \,, \tag{6}$$

odkud se po dosazení z rovnic (2), (1) a s přihlédnutím k rovnicím (3) až (5) dostává

$$\left[m(t) + dm\right] . \left[v(t) + dv\right] - dm . \left[v(t) - u\right] =$$

$$= m(t) \,.\, v(t)\,. \tag{7}$$

Po roznásobení se dostane

$$\cancel{m(t)\cdot v(t)} + m(t)\cdot dv + \cancel{v(t)\cdot dm} + dm\cdot dv - \cancel{v(t)\cdot dm} + u\cdot dm = \cancel{m(t)\cdot v(t)}\,. \qquad (8)$$

Po zanedbání velmi malého členu $\underline{dm\cdot dv}$ se získá

$$m(t)\cdot dv = -u\cdot dm\,. \qquad (9)$$

Rovnici (9) lze přepsat do tvaru

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{u}{m(t)}\,, \qquad (10)$$

a dále se již nebudeme zabývat závislostí rychlosti $\underline{v(t)}$ na čase, ani závislostí hmotnosti systému na čase $\underline{m(t)}$, ale <u>rychlostí rakety</u> $\underline{v(m)}$ v závislosti na její aktuální hmotnosti $\underline{m}$. Proto se bude psát

$$\frac{dv}{dm} = -\frac{u}{m}\,. \qquad (11)$$

Rovnice (11) je rovnice typu $\frac{dv}{dm} = \frac{f(m)}{g(v)}$, což je <u>diferenciální rovnice se separovanými proměnnými</u>. Její obecné řešení se hledá ve tvaru $\int g(v) \cdot dv = \int f(m) \cdot dm$.

Diferenciální rovnice (11) se bude řešit po dobu spalování paliva v raketě, což znamená od času t_0, kdy se začalo spalovat až do času t_1, kdy se veškeré palivo spotřebovalo. V čase t_0 měla raketa rychlost v_0 a hmotnost $m_0 = m_R + m_P$, kde m_R je hmotnost rakety a m_P je hmotnost paliva. V čase t_1 raketa již měla rychlost v_1 a její hmotnost se snížila na $m_1 = m_R$.

Rovnice (11) se tedy přepíše do tvaru

$$dv = -\frac{u}{m} \cdot dm \tag{12}$$

a bude se integrovat od času t_0 do času t_1, resp. levá strana rovnice od rychlosti v_0 do rychlosti v_1, resp. pravá strana rovnice od hmotnosti m_0 do hmotnosti m_1

$$\int_{v_0}^{v_1} dv = -\int_{m_0}^{m_1} \frac{u}{m} \cdot dm. \tag{13}$$

Provedením integrace se postupně dostává

$$v \Big|_{v_0}^{v_1} = - u \cdot \ln(m) \Big|_{m_0}^{m_1} , \qquad (14)$$

$$v_1 - v_0 = - u \cdot \left[\ln(m_1) - \ln(m_0) \right] . \qquad (15)$$

Zde se provádí určitý integrál, takže žádná matematická konstanta (vyplývající z neurčitého integrálu) se zde nevyskytuje. Po dosazení za hmotnosti m_1, m_0 se dostane

$$v_1 - v_0 = - u \cdot \left[\ln(m_R) - \ln(m_R + m_P) \right] , \qquad (16)$$

$$v_1 - v_0 = u \cdot \left[\ln(m_R + m_P) - \ln(m_R) \right] . \qquad (17)$$

Po úpravě (rozdíl logaritmů se rovná logaritmu podílu) se získá

$$v_1 - v_0 = u \cdot \ln \left(\frac{m_R + m_P}{m_R} \right) , \qquad (18)$$

$$v_1 - v_0 = u \cdot \ln \left(1 + \frac{m_P}{m_R} \right) . \qquad (19)$$

Pokud označíme přírůstek rychlosti rakety jako Δv, pak se dostává výsledný tvar pro přírůstek rychlosti kosmické rakety

$$\boxed{\Delta v = u \cdot \ln\left(1 + \frac{m_P}{m_R}\right),} \qquad (20)$$

což je tzv. Ciolkovského vztah. Zvýšení rychlosti rakety závisí slabě (logaritmicky) na hmotnostech rakety a pohonných látek, dále je zvýšení rychlosti přímo úměrné rychlosti tryskajících plynů.

Po dosazení číselných hodnot se získá přírůstek rychlosti kosmické rakety

$$\boxed{\Delta v = 7{,}9 \ km \cdot s^{-1}.} \qquad (21)$$