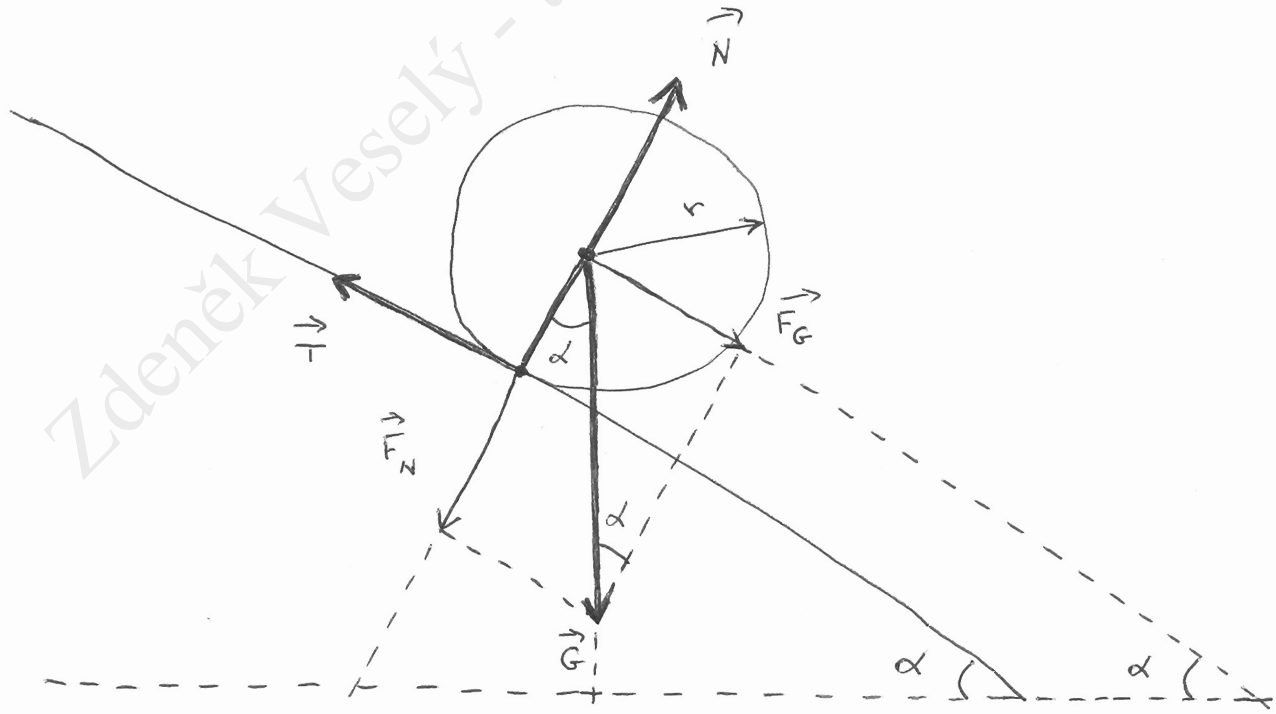
Příklad 7

Vyšetřete pohyb kuličky na nakloněné rovině. Jak závisí rychlost, kterou kulička získá, na výškovém rozdílu mezi počáteční a koncovou polohou? Koeficient vlečného tření je znám.

Na kuličku při jejím pohybu po nakloněné rovině působí tři síly. Jedná se o tíhovou sílu $\vec{G}$, sílu reakce nakloněné roviny $\vec{N}$ a sílu tření $\vec{T}$.



Pro posuvný pohyb kuličky lze uvážit, že složka tíhové síly $\vec{G}$ kolmá k nakloněné rovině $\vec{F}_N$ se kompenzuje silou reakce nakloněné roviny $\vec{N}$, neboli $|\vec{F}_N| = |\vec{N}|$.

Pro pohyb podél nakloněné roviny lze využít 1. impulzovou větu (pohybová rovnice posuvného pohybu) ve tvaru

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (1)$$

vyjadřující skutečnost, že změnu hybnosti (časovou derivaci hybnosti) může vyvolat jen působení vnější síly $\vec{F}$. Tato rovnice platí jak pro hmotný bod o hmotnosti dm, tak pro obecné těleso o hmotnosti m, ve stejném tvaru.

Zapsáním vektorové rovnice pouze ve směru nakloněné roviny se dostane

$$F = \frac{d}{dt}(m \cdot v), \qquad (2)$$

pokud se hmotnost tělesa nemění, dostává se dále

$$F = m \cdot a, \qquad (3)$$

kde v je rychlost kuličky ve směru nakloněné roviny, a je zrychlení kuličky ve směru nakloněné roviny, a síla $\underline{F}$ je výsledná síla působící na kuličku ve směru nakloněné roviny

$$F = F_G - T \,, \tag{4}$$

kde síla $\underline{F_G}$ je složka síly $\underline{G = m \cdot g}$ rovnoběžná s nakloněnou rovinou

$$\sin\alpha = \frac{F_G}{m \cdot g} \,. \tag{5}$$

Po dosazení z rovnic (4) a (5) do vztahu (3) se dostává

$$\boxed{m \cdot a = m \cdot g \cdot \sin\alpha - T} \tag{6}$$

Pro <u>otáčivý pohyb kuličky</u> vztažený vůči těžišti kuličky lze použít <u>2. impulzovou větu</u> (<u>pohybová rovnice rotačního pohybu</u>) ve tvaru

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{7}$$

vyjadřující skutečnost, že změnu momentu hybnosti $\vec{L}$ (časovou derivaci momentu hybnosti) může vyvolat jen moment vnější síly $\underline{\vec{M}}$. Tato rovnice platí pro hmotný bod o hmotnosti $\underline{dm}$, pro obecné těleso je potřeba pravou stranu integrovat přes celé těleso.

Moment hybnosti $\vec{L}$ a moment síly $\vec{M}$ vzhledem k počátku souřadného systému jsou dány (pro hmotný bod) výrazy

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} , \tag{8}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} , \tag{9}$$

kde $\vec{p}$ je hybnost, $\vec{F}$ je síla a $\vec{r}$ je polohový vektor hybnosti nebo síly vzhledem k počátku souřadného systému.

Zapsáním vektorové rovnice (7) pro osu procházející středem otáčející se kuličky a kolmou na její posuvný pohyb (a rovnoběžnou s nakloněnou rovinou) se získá

$$M = \int\limits_{\text{celé těleso}} \frac{d}{dt}\left(r \,.\, dm \,.\, v\right) \tag{10}$$

Integrál na pravé straně rovnice je vyjádřením součtu časových změn momentu hybnosti všech hmotných bodů příslušného tělesa.

Pokud nahradíme $v = \omega . r$, lze dále psát

$$M = \int\limits_{\text{celé těleso}} \frac{d}{dt}\left(r^2 . \, dm \,.\, \omega\right) . \tag{11}$$

Za předpokladu, že se nemění tvar tělesa (kuličky) ani její hmotnost během otáčení, lze považovat $r^2 . \, dm$ za konstantu vzhledem k času a dostává se

$$M = \int_{\text{celé těleso}} r^2 . dm . \frac{d\omega}{dt} , \qquad (12)$$

$$M = I . \frac{d\omega}{dt} , \qquad (13)$$

$$M = I . \varepsilon , \qquad (14)$$

kde $I = \int_{\text{celé těleso}} r^2 . dm$ je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení, ε je úhlové zrychlení otáčejícího se tělesa.

Pro moment setrvačnosti kuličky vzhledem k ose procházející jejím těžištěm platí

$$I = \frac{2}{5} m r^2 . \qquad (15)$$

Momentem vnějších sil působících na kuličku je pouze moment síly tření $\vec{T}$, neboť moment gravitační (tíhové) síly $\vec{G}$ i moment síly reakce nakloněné roviny $\vec{N}$ jsou vzhledem k ose otáčení kuličky nulové. Pak lze psát

$$T . \cancel{r} = \frac{2}{5} m . r^{\cancel{2}} \varepsilon , \qquad (16)$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{5}{2} \cdot \frac{T}{m \cdot r}} \quad . \qquad (17)$$

Nyní je potřeba rozlišit dva případy podle situace závisející na tom, zda-li bude či nebude docházet ke sklouzávání (prokluzování) kuličky při jejím pohybu.

<u>Případ A</u> – <u>čistě valivý pohyb kuličky</u> <u>bez sklouzávání</u>

Podmínkou valení kuličky bez prokluzování je

$$T < f \cdot F_N \, , \qquad (18)$$

kde T je třecí síla, f je koeficient tření a F_N je přítlačná síla. Při čistě valivém pohybu platí $\underline{v = \omega \cdot r}$ (obvodová rychlost = rychlost posuvu kuličky) a též $\underline{a = \varepsilon \cdot r}$.

Po dosazení výrazu $\underline{a = \varepsilon \cdot r}$ do vztahu (6) a dále dosazení úhlového zrychlení ze vztahu (17) se dostává

$$\cancel{m} \cdot \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{T}{\cancel{m} \cdot \cancel{r}} \right) \cdot \cancel{r} = m \cdot g \cdot \sin\alpha - T \, , \qquad (19)$$

$$\left(\frac{5}{2} + \frac{2}{2}\right) \cdot T = m \cdot g \cdot \sin\alpha \,, \tag{20}$$

$$\boxed{T = \frac{2}{7} \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha \,.} \tag{21}$$

Pro přítlačnou sílu F_N lze psát (viz obrázek)

$$F_N = \cos\alpha \cdot m \cdot g \,. \tag{22}$$

Podmínkou valení kuličky bez prokluzování je rovnice (18), odkud se po dosazení za T a F_N z rovnic (21) a (22) dostane

$$\frac{2}{7} \cdot \cancel{m} \cdot \cancel{g} \cdot \sin\alpha < f \cdot \cancel{m} \cdot \cancel{g} \cdot \cos\alpha \tag{23}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha < \frac{7}{2} \cdot f \,.} \tag{24}$$

Tento vztah udává omezení na úhel α nakloněné roviny, aby nedocházelo ke sklouzávání kuličky.

Po dosazení za T z rovnice (21) do vztahu (6) plyne

$$\cancel{m} \cdot a = \cancel{m} \cdot g \cdot \sin\alpha - \frac{2}{7} \cdot \cancel{m} \cdot g \cdot \sin\alpha \,, \tag{25}$$

$$\boxed{a = \frac{5}{7} \cdot g \cdot \sin\alpha \,,} \tag{26}$$

což je zrychlení posuvného pohybu kuličky při čistě otáčivém pohybu bez sklouzávání a jedná se pohyb rovnoměrně zrychlený.

Rovnoměrně zrychlený je i pohyb otáčivý $\left(\varepsilon = \frac{a}{r}\right)$

a pro úhlové zrychlení rotačního pohybu platí

$$\boxed{\varepsilon = \frac{5}{7} \cdot \frac{g}{r} \cdot \sin \alpha \, .} \qquad (27)$$

Ke zjištění závislosti rychlosti na výškovém rozdílu h mezi počáteční a koncovou polohou se využije zákon zachování energie. Vzhledem k tomu, že nedochází ke sklouzávání, tak nekoná tření žádnou práci a lze psát

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \, , \qquad (28)$$

kde na levé straně je potenciální energie kuličky v počáteční poloze (byla v klidu), na pravé straně rovnice je pak kinetická energie posuvného pohybu (levý člen) a rotačního pohybu (pravý člen) v koncové poloze. Po dosazení $v = \omega \cdot r$ a momentu setrvačnosti kuličky vzhledem k jejímu těžišti $I = \frac{2}{5} m r^2$ se dostává

$$\cancel{m} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \left(\frac{\cancel{2}}{5} \cdot \cancel{m} \cdot \cancel{r^2} \right) \cdot \frac{v^2}{\cancel{r^2}} \, , \qquad (29)$$

$$g \cdot h = \frac{v^2}{2} + \frac{v^2}{5} , \tag{30}$$

$$g \cdot h = v^2 \cdot \left(\frac{5+2}{10} \right) , \tag{31}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{10}{7} \cdot g \cdot h} ,} \tag{32}$$

což je rychlost posuvného pohybu kuličky při čistě valivém pohybu bez prokluzování v závislosti na výškovém rozdílu mezi počáteční a koncovou polohou na nakloněné rovině.

Případ B – valivý pohyb kuličky se sklouzáváním (prokluzováním)

Pokud bude platit vztah

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha > \frac{7}{2} f ,} \tag{33}$$

pak bude při valivém pohybu docházet též ke sklouzávání kuličky po nakloněné rovině. Třecí síla bude přímo rovna součinu $f . F_N$, neboli:

$$T = f . F_N , \tag{34}$$

$$T = f . m . g . \cos \alpha . \tag{35}$$

Rovnice popisující pohyb pak mají tvar (dosazení vztahu (35) do rovnic (6) a (17))

$$\cancel{m}.a = \cancel{m}.g.\sin\alpha - f.\cancel{m}.g.\cos\alpha\ , \tag{36}$$

$$\cancel{m}.r.\varepsilon = \frac{5}{2}.f.\cancel{m}.g.\cos\alpha\ . \tag{37}$$

Z rovnice (36) lze získat zrychlení

$$\boxed{a = g.(\sin\alpha - f.\cos\alpha)\ ,} \tag{38}$$

což je zrychlení posuvného pohybu kuličky při valení s prokluzováním, opět se jedná o pohyb rovnoměrně zrychlený.

Pro úhlové zrychlení rotačního pohybu kuličky při valení s prokluzováním platí (viz rovnice (37))

$$\boxed{\varepsilon = \frac{5}{2}.\frac{f.g}{r}.\cos\alpha\ ,} \tag{39}$$

a rotační pohyb je též rovnoměrně zrychlený.

Integrací zrychlení $\underline{a}$ podle času $\underline{t}$ z rovnice (38) se dostává rychlost $\underline{v(t)}$

$$v(t) = \int a \cdot dt \, , \tag{40}$$

$$v(t) = \int g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) \cdot dt \, , \tag{41}$$

$$v(t) = g \cdot t \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) + v_0 \, , \tag{42}$$

kde se opět uvažuje nulová rychlost $\underline{v_0}$ v počáteční poloze a tedy platí

$$\boxed{v(t) = g \cdot t \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) \, .} \tag{43}$$

Integrací rychlosti $\underline{v(t)}$ podle času $\underline{t}$ se dostane uražená vzdálenost $\underline{s(t)}$

$$s(t) = \int v(t) \cdot dt \, , \tag{44}$$

$$s(t) = \int g \cdot t \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) \cdot dt \, , \tag{45}$$

$$s(t) = \frac{g \cdot t^2}{2} \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) + s_0 \, , \tag{46}$$

kde lze opět uvažovat nulovou uraženou dráhu $\underline{s_0}$ v počáteční poloze

$$\boxed{s(t) = \frac{g \cdot t^2}{2} \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) \, .} \tag{47}$$

Porovnáním rovnic (38), (43) a (47) plyne (z rovnice (38) se dosadí do rovnic (43) a (47))

$$v(t) = a \cdot t \,, \qquad (48)$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot a t^2 \,. \qquad (49)$$

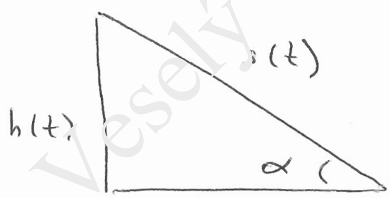
Dále se z rovnice (48) vyjádří čas $\underline{t}$ a dosadí do rovnice (49)

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot \cancel{a} \cdot \frac{v^2(t)}{a^{\cancel{2}}} \,, \qquad (50)$$

odkud se získá

$$v(t) = \sqrt{2 \cdot a \cdot s(t)} \,. \qquad (51)$$

Ještě lze vyjádřit vzdálenost $\underline{s(t)}$ pomocí výšky $\underline{h}$ jako



$$\sin \alpha = \frac{h(t)}{s(t)} \,, \qquad (52)$$

a po dosazení do rovnice (51) se získá

$$v(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot a \cdot h(t)}{\sin \alpha}} \qquad (53)$$

Hledá se závislost v na h, tj. lze psát $v(h)$, h.

Po dosazení za zrychlení ze vztahu (38) se dostane

$$v(h) = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha) \cdot h}{\sin\alpha}} \quad (54)$$

,

$$\boxed{v(h) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot (1 - f \cdot \operatorname{ctg}\alpha)}\,,} \quad (55)$$

což je rychlost posuvného pohybu kuličky při valivém pohybu s prokluzováním v závislosti na výškovém rozdílu mezi počáteční a koncovou polohou na nakloněné rovině.

Poznámka na závěr: Aplikace 2. impulzové věty (pohybové rovnice rotačního pohybu) v dvasobrušlení

Rovnice (7) ve tvaru

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}\,, \quad (56)$$

se po úpravách dostává do tvaru (11)

$$M = \int\limits_{\text{celé těleso}} \frac{d}{dt}\left(r^2 \cdot dm \cdot \omega\right), \quad (57)$$

který lze upravit jiným způsobem

$$M = \frac{d}{dt} \cdot \left(\omega \cdot \int_{\text{celé těleso}} r^2 \cdot dm \right) , \qquad (58)$$

obecně platí

$$\boxed{M = \frac{d}{dt} \left(\omega \cdot I \right) .} \qquad (59)$$

Pro případ nulového momentu vnějších sil se dostává

$$\vartheta = \frac{d}{dt} \left(\omega \cdot I \right) , \qquad (60)$$

$$\omega \cdot I = \text{konst.} \qquad (61)$$

Pokud chce krasobruslař změnit rychlost své rotace bez působení momentu vnější síly $M = \vartheta$, tak musí změnit svůj moment setrvačnosti I. Reálně to znamená, že pokud chce zvýšit rychlost rotace, musí snížit moment setrvačnosti, tj. přesunout hmotu dm na menší poloměr r vzhledem k ose rotace, tedy např. připažit.