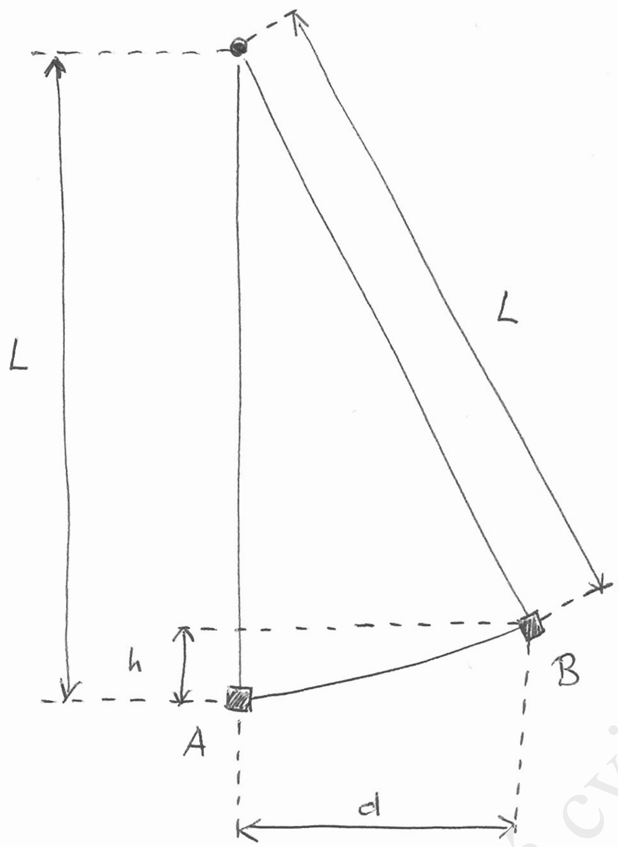
Příklad 8

Balistické kyvadlo je tvořeno truhlíkem s pískem zavěšeným na dlouhých drátech. Vstřelíme-li do truhlíku projektil, kyvadlo se vychýlí, a na základě této výchylky můžeme určit rychlost projektilu.

Prozkoumejte činnost balistického kyvadla, zjistěte jak se počítá rychlost projektilu, a navrhněte vhodnou délku závěsu.

Konstrukce balistického kyvadla je již popsána v zadání příkladu. Vstřelením projektilu ve vodorovném směru do balistického kyvadla dojde k jeho pohlcení a dále se kyvadlo a projektil pohybují společnou rychlostí. Jedná se tedy o nepružný ráz. Při nepružné srážce se nezachovává kinetická energie, ale zachovává se hybnost.

Po zásahu kyvadla projektilem dojde tedy k vychýlení kyvadla z rovnovážné polohy A. Z maximální vychylky, poloha B, je možné určit velikost hybnosti projektilu a následně tak rychlost projektilu.



Předpokládejme, že počáteční hybnost střely (projektilu) je rovna $\underline{m \cdot v}$, kde $\underline{m}$ je hmotnost střely a $\underline{v}$ je její rychlost. Počáteční hybnost balistického kyvadla je rovna nule, neboť kyvadlo je v klidu v poloze A. Po vniknutí střely do kyvadla (střela zůstane v truhlíku s pískem) je hybnost systému střely a kyvadla rovna $\underline{(M+m) \cdot V}$, kde $\underline{M}$ je hmotnost kyvadla (hmotnost truhlíku s pískem) a $\underline{V}$ je rychlost systému střely a kyvadla.

Ze <u>zákona zachování hybnosti</u> plyne

$$m \cdot v = (M + m) \cdot V \quad , \tag{1}$$

neboli rychlost balistického kyvadla těsně po vniknutí střely je rovna

$$V = \frac{m}{M + m} \cdot v \ . \tag{2}$$

Podle <u>zákona zachování energie</u> balistické kyvadlo po zásahu střelou vystoupí do výšky $\underline{h}$

$$\frac{1}{2}(M + m) \cdot V^2 = (M + m) \cdot g \cdot h \quad , \tag{3}$$

kde vlevo je kinetická energie systému v poloze A a vpravo je potenciální energie systému v poloze B, kde je výchylka maximální.

Z rovnice (3) lze vyjádřit rychlost $\underline{V}$

$$V = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \tag{4}$$

Užitím rovnic (2) a (4) by bylo možné určit rychlost střely $\underline{v}$

na základě změřené výšky $\underline{h}$ do které kyvadlo po zásahu vystoupí. Protože však výška $\underline{h}$ je malá, bývá výhodnější měřit horizontální výchylku kyvadla $\underline{d}$. Z Pythagorovy věty vyplývá

$$(L-h)^2 + d^2 = L^2 , \tag{5}$$

odkud se postupně získá

$$L - h = \sqrt{L^2 - d^2} , \tag{6}$$

$$\boxed{h = L - \sqrt{L^2 - d^2} .} \tag{7}$$

Vztah (7) lze upravit

$$h = L \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{L^2}{L^2} - \frac{d^2}{L^2}}\right) = L \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{L^2}}\right) , \tag{8}$$

a zjednodušit s využitím matematické poučky $\left(\text{pro } L >> d \text{ platí } \sqrt{1 - \frac{d^2}{L^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{L^2}\right)$. Lze tedy dále psát

$$h = L \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{L^2}\right)\right) , \tag{9}$$

$$h = L \cdot \left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{L^2}\right) , \tag{10}$$

$$\boxed{h = \frac{d^2}{2 \cdot L}} \qquad (11)$$

Spojením rovnic (2), (4) a (11) se dostane

$$\frac{m}{M+m} \cdot v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \frac{d^2}{2L}} \, , \qquad (12)$$

a tedy pro <u>rychlost projektilu</u> platí rovnice

$$\boxed{v = \frac{M+m}{m} \cdot d \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} \, .} \qquad (13)$$

Při volbě délky závěsu musí být samozřejmě dodržena podmínka $L \gg d$, ale jinak může být libovolná. Pro jednoduchost výpočtu je vhodnější, aby odmocnina byla celé číslo. Pro podmínku $\sqrt{\frac{g}{L}} = 1$ se získává příliš velká délka závěsu $L = 9{,}81$ m.

Pro podmínku $\sqrt{\frac{g}{L}} = 2$ se získá délka závěsu

$$L = \frac{g}{4} \doteq 2{,}45 \text{ m} .$$