Příklad 9   Koule zadaného poloměru mírně kývá na závěsu zadané délky.

Spočtěte dobu kyvu kyvadla. Jaké chyby se dopustíme, budeme-li kouli považovat za bodovou hmotnost?

(kyv = pohyb ze strany na stranu, kmit = 2 kyvy = pohyb z jedné strany na druhou a zpět).

Pro kývání kyvadla se využije 2. impulzová věta (pohybová rovnice rotačního pohybu)

$$\vec{M}(t) = \frac{d\vec{L}(t)}{dt} , \qquad (1)$$

kde $\vec{L}(t)$ je moment hybnosti, $\vec{M}(t)$ je moment vnější síly. Po úpravách (viz. příklad 7, nemění se tvar ani rozložení hmotnosti kyvadla) lze tuto rovnici převést do tvaru

$$M(t) = I \cdot \frac{d\,\omega(t)}{dt} , \qquad (2)$$

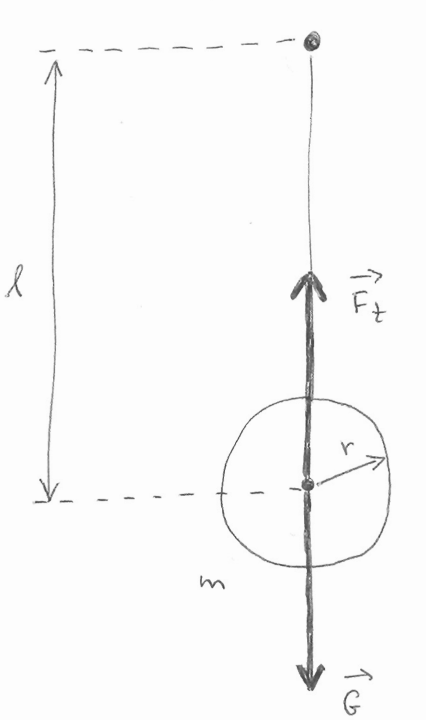
kde $M(t)$ je moment vnější síly, I je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení a $\omega(t)$ je úhlová rychlost kyvadla.

Moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení se podle <u>Steinerovy věty</u> určí jako součet momentu setrvačnosti koule vzhledem k jejímu těžišti a momentu setrvačnosti bodového tělesa o hmotnosti koule vzhledem k ose otáčení kyvadla (zanedbává se hmotnost závěsu)

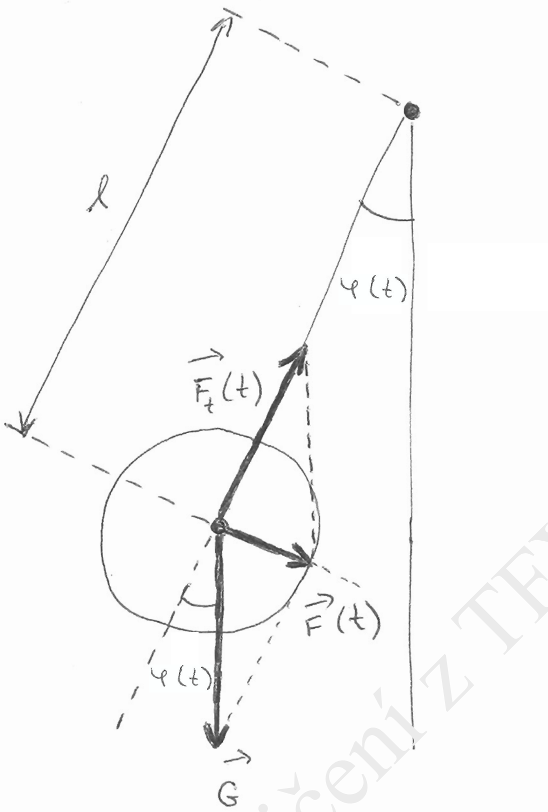
$$I = \frac{2}{5} m r^2 + m . l^2 \, , \qquad (3)$$

kde $\underline{\frac{2}{5} m r^2}$ je moment setrvačnosti koule o hmotnosti $\underline{m}$ a poloměru $\underline{r}$ vzhledem k jejímu těžišti, $\underline{l}$ je délka závěsu kyvadla od osy otáčení do středu koule.

Na kuličku kyvadla působí tíhová síla $\underline{\vec{G} = m . \vec{g}}$ a tahová síla závěsu $\underline{\vec{F}_t(t)}$. Pokud je kyvadlo v rovnovážné poloze, tíhová síla $\underline{\vec{G}}$ se rovná tahové síle $\underline{\vec{F}_t(t)}$ závěsu a celkové působení na kuličku (kyvadlo) je nulové. Pokud se kyvadlo vychýlí, složením tíhové síly $\underline{\vec{G}}$ a tahové síly $\underline{\vec{F}_t(t)}$ vzniká výsledná síla $\underline{\vec{F}(t)}$, která vždy směřuje do rovnovážné polohy a vytváří tak kmitavý pohyb kyvadla.



kyvadlo je v rovnovážné poloze



kyvadlo je vychýlené z rovnovážné polohy

Moment výsledné síly $\underline{F(t)}$ vzhledem k ose otáčení kyvadla je roven

$$M(t) = - F(t) \,.\, l \,, \qquad (4)$$

kde

$$\sin \varphi(t) = \frac{F(t)}{G} \,. \qquad (5)$$

Znaménko (–) v rovnici (4) vyjadřuje skutečnost, že moment síly působí proti směru výchylky kyvadla.

S využitím výše uvedených vztahů (3) až (5) se pohybová rovnice kyvadla (2) dostává do tvaru

$$-m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi(t) = \left(\frac{2}{5} m r^2 + m \cdot l^2 \right) \cdot \frac{d\,\omega(t)}{dt} \,, \qquad (6)$$

neboli

$$-\cancel{m} \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi(t) = \left(\frac{2}{5} \cdot \cancel{m} r^2 + \cancel{m} \cdot l^2 \right) \cdot \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} \,, \qquad (7)$$

přičemž $\underline{\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega(t)}$. Pro malé úhly $\underline{\varphi(t)}$, přibližně do 5°, lze použít matematické zjednodušení $\underline{\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)}$. Poté se dostává rovnice

$$-g \cdot l \cdot \varphi(t) = \left(\frac{2}{5} r^2 + l^2 \right) \cdot \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} \,, \qquad (8)$$

$$\boxed{\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = -\left(\frac{g \cdot l}{\frac{2}{5} r^2 + l^2} \right) \cdot \varphi(t) \,.} \qquad (9)$$

<u>Poznámka 1:</u>

<u>Netlumený harmonický oscilátor</u> je každý fyzikální objekt schopný vykonávat periodický pohyb, na který při jeho vychýlení z rovnovážné polohy působí síla $\underline{F(t)}$ přímo úměrná výchylce $\underline{\varphi(t)}$ a

směřující do rovnovážné polohy

$$F(t) = -k \cdot \varphi(t), \tag{10}$$

kde k je konstanta úměrnosti. Pohybová rovnice netlumeného harmonického oscilátoru (ve tvaru kmitajícího kyvadla vykonávajícího rotační pohyb) má tvar

$$-k \cdot l \cdot \varphi(t) = I \cdot \varepsilon(t), \tag{11}$$

kde $\varepsilon(t)$ je úhlové zrychlení, l je délka závěsu, I je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení. Dále se dostává

$$-k \cdot l \cdot \varphi(t) = I \cdot \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2}. \tag{12}$$

Zavedením $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k \cdot l}{I}}}$ se dostává diferenciální rovnice

$$\boxed{\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = -\omega^2 \cdot \varphi(t).} \tag{13}$$

Obecným řešením této diferenciální rovnice je funkce

$$\varphi(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t), \tag{14}$$

Perioda funkce $\varphi(t)$, neboli perioda funkcí $\sin(\omega \cdot t)$ a $\cos(\omega t)$ je 2π, tedy pro periodu T této funkce $\varphi(t)$ platí

$$\omega \cdot T = 2\pi \,, \tag{15}$$

neboli

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \,, \tag{16}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{A \cdot \ell}} \,, \tag{17}$$

což je perioda kmitavého pohybu netlumeného harmonického oscilátoru.

Zavedením substituce $\omega = \sqrt{\dfrac{g \cdot \ell}{\frac{2}{5} r^2 + \ell^2}}$ do rovnice (9) se

dostává rovnice

$$\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = -\omega^2 \cdot \varphi(t) \,. \tag{18}$$

Tato rovnice je rovnicí netlumeného harmonického oscilátoru (viz. rovnice (13)), s periodou kmitavého pohybu (viz. rovnice (16))

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \,, \tag{19}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5} \cdot r^2 + \ell^2}{g \cdot \ell}} \,, \tag{20}$$

a <u>doba kyvu kyvadla</u> <u>T_k</u> je tedy

$$\boxed{T_k = \frac{T}{2} = \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5} r^2 + l^2}{g \cdot l}}} \qquad (21)$$

Rovnici lze ještě upravit do tvaru

$$T_k = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{5} r^2 + l^2}{l^2}} \,, \qquad (22)$$

$$T_k = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{r^2}{l^2}} \qquad (23)$$

a pokud je poloměr kuličky <u>r</u> mnohem menší než délka závěsu <u>l</u> <u>$(r \ll l)$</u>, lze s pomocí matematického zjednodušení

$$\underline{\sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{l^2}}$$ psát

$$T_k = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} \cdot \frac{r^2}{l^2}\right) , \qquad (24)$$

$$\boxed{T_k = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{r^2}{l^2}\right) ,} \qquad (25)$$

což je <u>doba kyvu kyvadla tvořeného koulí zavěšenou na nehmotném závěsu</u>. Dobu kyvu kyvadla ovlivňuje pouze délka závěsu kyvadla a poloměr zavěšené koule, hmotnost koule na ní nemá vliv.

Poznámka 2:

Pokud by se místo koule uvažoval hmotný bod, dostává se matematické kyvadlo. Pro matematické kyvadlo $(r = 0)$ se vztah (25) přepíše do tvaru

$$\boxed{T_k = \pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}\,,} \tag{26}$$

což je doba kyvu matematického kyvadla.

Pokud kyvadlo bude mít kouli s poloměrem 10 % délky závěsu, tj.

$$r = 0{,}1 \cdot \ell\,, \tag{27}$$

pak je relativní chyba doby kyvu reálného kyvadla oproti matematickému kyvadlu (reálného harmonického kyvadla bez tlumení)

$$\frac{T_{k\,\text{reálné bez tlumení}} - T_{k\,\text{matematické}}}{T_{k\,\text{matematické}}} =$$

$$= \frac{\cancel{\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{r^2}{\ell^2}\right) - \cancel{\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}}}{\cancel{\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{r^2}{\ell^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{0{,}1^2 \cdot \cancel{\ell^2}}{\cancel{\ell^2}} = 0{,}002 =$$

$\boxed{= 0{,}2\ \%\,,}$ což je velmi malá chyba.

Poznámka 3:

Pokud by se neuvažovaly pouze malé výchylky kyvadla, musela by se řešit plná rovnice (7) místo zjednodušené rovnice (9). Řešit rovnici (7) je mnohem náročnější a dostal by se složitější vztah pro dobu kyvu kyvadla. Kyvadlo popsané vztahem (7) již není netlumeným harmonickým oscilátorem, je to pouze netlumený oscilátor.