Příklad 10

Na misku zavěšenou na pružině dopadne ze zadané výšky kousek plastelíny a přilepí se. Miska s plastelínou začne kmitat.

Určete počáteční amplitudu kmitů. Předpokládejte, že znáte hmotnost misky i plastelíny a tuhost pružiny, na níž je miska zavěšena. Hmotnost pružiny zanedbáváme.

Padá-li plastelína z výšky $\underline{h}$ nad miskou, při na misku dopadne rychlostí $\underline{w}$, kterou lze určit ze zákona zachování energie pro volný pád plastelíny

$$\cancel{m} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m}\, w^2 , \qquad (1)$$

$$w = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} , \qquad (2)$$

kde $\underline{m}$ je hmotnost plastelíny. Levá strana rovnice představuje potenciální energii plastelíny ve výšce $\underline{h}$ nad miskou, kdy je rychlost plastelíny nulová. Pravá strana rovnice představuje kinetickou energii padající plastelíny těsně před dopadem na misku, kdy je výška plastelíny nad miskou, a tedy potenciální energie plastelíny, nulová.

Při dopadu plastelíny na misku dochází k nepružné srážce s miskou, při níž platí zákon zachování hybnosti soustavy.

$$m \cdot w = (M + m) \cdot V \,, \tag{3}$$

kde $\underline{M}$ je hmotnost misky a $\underline{V}$ je rychlost misky s plastelínou ihned po srážce. Rovnice předpokládá, že rychlost samotné misky těsně před srážkou byla nulová. Pro rychlost misky s plastelínou ihned po srážce platí

$$V = \frac{m}{M+m} \cdot w \,, \tag{4}$$

a s využitím vztahu (2) lze psát

$$\boxed{V = \frac{m}{M+m} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}} \,. \tag{5}$$

Při určování počáteční amplitudy kmitů misky s plastelínou lze postupovat dvěma způsoby: A) pomocí výpočtu integračních konstant ve vztazích pro polohu a rychlost misky s plastelínou při kmitání, B) pomocí zákona zachování energie kmitavého pohybu misky s plastelínou.

<u>Postup A</u> <u>pomocí výpočtu integračních konstant ve vztazích pro polohu a rychlost kmitání misky s plastelínou</u>

Pro vyjádření kmitavého pohybu je potřeba nejprve sepsat pohybovou rovnici kmitání misky s plastelínou. Hmotnost pružiny se zanedbává.

Na misku s plastelínou působí tíhová síla $\vec{G}$ a síla pružiny $\vec{F}_p(t)$, která je přímo úměrná výchylce misky s plastelínou z rovnovážné polohy $x(t)$ a směřuje do rovnovážné polohy

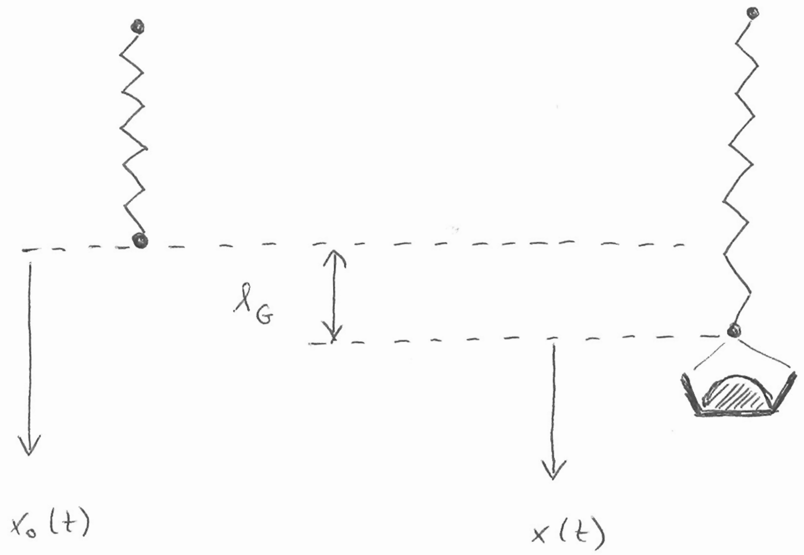
$$F_p(t) = -k \cdot x(t), \tag{6}$$

kde k je konstanta vyjadřující tuhost pružiny, $x(t)$ je výchylka misky s plastelínou vůči rovnovážné poloze pružiny, která je zatížena miskou s plastelínou. Statická tíhová síla $\vec{G} = (M+m)\cdot\vec{g}$ způsobí pouze statické natažení pružiny, tj. posunutí rovnovážné polohy kmitavého pohybu misky s plastelínou oproti prázdné pružině. Tíhová síla $\vec{G}$ nezpůsobuje kmitání misky s plastelínou. Do výsledné síly $F(t)$ působící na misku s plastelínou způsobující kmitání se zahrnuje pouze síla $F_p(t)$

$$F(t) = -k \cdot x(t). \tag{7}$$

Poznámka 1: Fyzikálně exaktní odvození vztahu (7)

Uvažuje se nehmotná pružina, na kterou se zavěsí miska s plastelínou.



samotná pružina

pružina na které je zavěšena miska s plastelínou

Celková síla působící na misku s plastelínou po jejich zavěšení na prázdnou pružinu je

$$F(t) = -k \cdot x_0(t) + G, \tag{8}$$

kde $x_0(t)$ je výchylka měřená od rovnovážné polohy samotné pružiny.

Tíhová síla $G = (M+m) \cdot g$ působící na pružinu způsobí její natažení o délku l_G

$$(M+m) \cdot g = G = k \cdot l_G. \tag{9}$$

Potom lze psát

$$F(t) = -k \cdot x_0(t) + k \cdot l_G, \tag{10}$$

$$F(t) = -k \cdot (x_0(t) - l_G), \tag{11}$$

a označíme $\boxed{x(t) = x_0(t) - l_G}$ jako výchylku měřenou vůči rovnovážné poloze pružiny, která je zatížena miskou s plastelínou.

Výsledně se dostane

$$\boxed{F(t) = -k \cdot x(t).} \tag{12}$$

Pohybovou rovnici kmitání misky s plastelínou lze psát ve tvaru

$$F(t) = (M+m) \cdot a(t), \tag{13}$$

kde $F(t)$ je výsledná síla působící na misku s plastelínou způsobující kmitání. Rovnici (7) lze s využitím rovnice (13) přepsat do tvaru

$$-k \cdot x(t) = (M+m) \cdot a(t), \tag{14}$$

neboli:

$$-k \cdot x(t) = (M+m) \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \tag{15}$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\left(\frac{k}{M+m}\right) \cdot x(t), \tag{16}$$

a použitím substituce $\underline{\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M+m}}}$ se dostane rovnice

$$\boxed{\frac{d^2\, x(t)}{dt^2} = -\,\omega^2 .\, x(t)\,,} \qquad (17)$$

což je <u>rovnice netlumeného harmonického oscilátoru</u>. <u>Obecným řešením</u> této rovnice <u>je funkce</u>

$$\boxed{x(t) = a .\sin(\omega . t) + b .\cos(\omega . t)\,,} \qquad (18)$$

kde $\underline{a}$, $\underline{b}$ jsou integrační konstanty. Pomocí matematické substituce

$$a = A .\cos\varphi\,, \qquad (19)$$

$$b = A .\sin\varphi\,, \qquad (20)$$

si integrační konstanty $\underline{a}$, $\underline{b}$ nahradíme jinými integračními konstantami $\underline{A}$, $\underline{\varphi}$ a lze psát

$$x(t) = A .\left(\sin(\omega . t) .\cos\varphi + \sin\varphi .\cos(\omega . t)\right), \qquad (21)$$

což s použitím součtových vztahů pro goniometrické funkce $\left(\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha .\cos\beta \pm \sin\beta .\cos\alpha\right)$ lze upravit do tvaru

$$\boxed{x(t) = A .\sin(\omega . t + \varphi)\,,} \qquad (22)$$

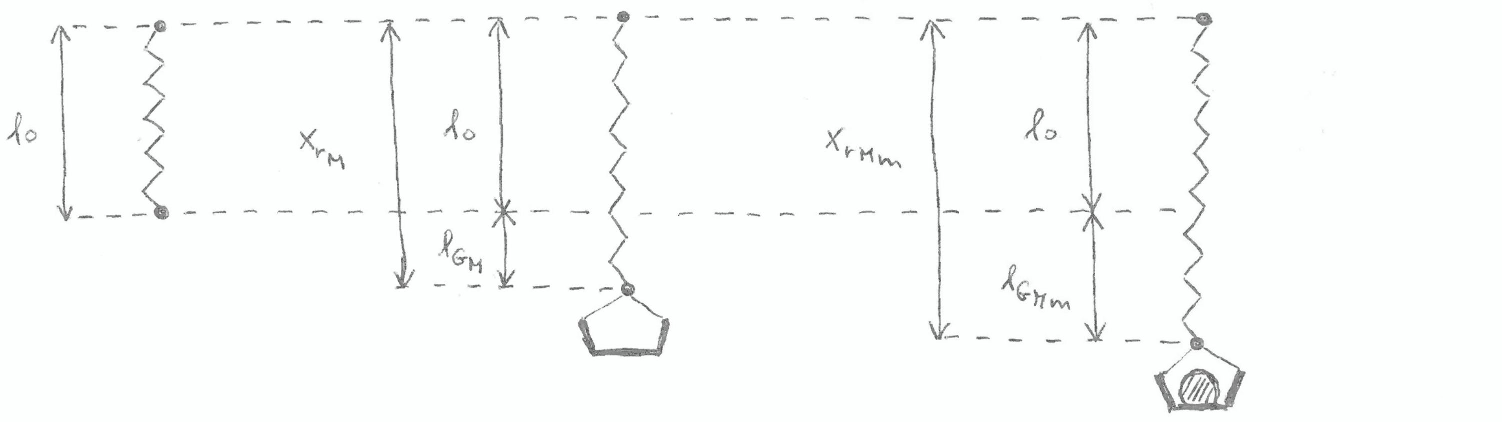
což je <u>rovnice pro polohu misky</u> <u>s plastelínou při kmitavém pohybu</u>.

Rychlost misky s plastelínou při kmitavém pohybu $v(t)$ se určí vztahem

$$v(t) = \frac{d\,x(t)}{dt}, \qquad (23)$$

$$v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi), \qquad (24)$$

přičemž se využil vztah pro derivaci složené funkce $\left([f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)\right)$.
Ve vztazích (22) a (24) jsou tzv. integrační konstanty A a φ, kde A je hledaná počáteční amplituda kmitavého pohybu misky s plastelínou. K určení těchto integračních konstant se využívá počáteční podmínka pro rovnice (22) a (24). Počáteční poloha misky s plastelínou (těsně po dopadu plasteliny) není však v rovnovážné poloze. Délka volné nezatížené pružiny se uvažuje l_0.



samotná pružina — pružina s miskou — pružina s miskou a plastelínou

Pro rovnovážné polohy pružiny s miskou $\underline{x_{r_M}}$ a pružiny s miskou a plastelínou $\underline{x_{r_{Mm}}}$ platí (tíhová síla $\underline{G}$ způsobí natažení pružiny o délku $\underline{l}$, kde $\underline{G = k.l}$)

$$x_{r_M} = l_0 + l_{G_M} = l_0 + \frac{M.g}{k}, \qquad (25)$$

$$x_{r_{Mm}} = l_0 + l_{G_{Mm}} = l_0 + \frac{(M+m).g}{k}, \qquad (26)$$

neboli

$$x_{r_{Mm}} - x_{r_M} = \left(\cancel{l_0} + \frac{(M+m).g}{k}\right) - \left(\cancel{l_0} + \frac{M.g}{k}\right), \qquad (27)$$

$$x_{r_{Mm}} - x_{r_M} = \frac{g}{k}.\left(\cancel{M} + m - \cancel{M}\right), \qquad (28)$$

$$\boxed{x_{r_{Mm}} - x_{r_M} = \frac{g.m}{k}}, \qquad (29)$$

což je zároveň počáteční poloha misky těsně po dopadu plastelíny vůči rovnovážné poloze kmitavého pohybu misky s plastelínou.

<u>Rovnice pro integrační konstanty</u> mají tvar

$$x(t=0) = A.\sin\varphi = -\frac{m.g}{k}, \qquad (30)$$

$$v(t=0) = A.\omega.\cos\varphi = V. \qquad (31)$$

Protože se hledá pouze amplituda kmitů $\underline{A}$, lze rovnice (30) a (31) umocnit na druhou mocninu

$$A^2 \cdot \sin^2\varphi = \frac{m^2 \cdot g^2}{k^2}, \qquad (32)$$

$$A^2 \cdot \cos^2\varphi = \frac{V^2}{\omega^2}, \qquad (33)$$

a sečíst

$$A^2 \cdot \underbrace{\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)}_{=1} = \frac{m^2 \cdot g^2}{k^2} + \frac{V^2}{\omega^2}, \qquad (34)$$

po dosazení za $\underline{\omega}$ zpět ze substituce se dostává

$$A = \sqrt{\frac{m^2 \cdot g^2}{k^2} + \frac{V^2 \cdot (M+m)}{k}}, \qquad (35)$$

a po dosazení za rychlost $\underline{V}$ ze vztahu (5) plyne

$$A = \sqrt{\frac{m^2 \cdot g^2}{k^2} + \frac{m^2 \cdot 2 \cdot g \cdot h \cdot \cancel{(M+m)}}{(M+m)^{\cancel{2}} \cdot k}}, \qquad (36)$$

$$A = \sqrt{\frac{m^2 \cdot g^2}{k^2} \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot \cancel{g} \cdot h}{(M+m) \cdot \cancel{k}} \cdot \frac{k^{\cancel{2}}}{g^{\cancel{2}}}\right)}, \qquad (37)$$

$$\boxed{A = \frac{m \cdot g}{k} \cdot \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h \cdot k}{(M+m) \cdot g}}}, \qquad (38)$$

což je hledaný výraz pro počáteční amplitudu kmitavého pohybu misky s plastelínou.

Výraz $h \cdot k$ odpovídá síle $F = h \cdot k$, která by způsobila natažení pružiny o délku h. Lze předpokládat, že tato délka h (též výška, ze které padá plastelína na misku) je větší než skutečné prodloužení pružiny silou $(M + m) \cdot g$. Proto je druhý součtový člen pod odmocninou obvykle významnější.

Postup B   pomocí zákona zachování energie kmitavého pohybu misky s plastelínou

Při řešení úlohy pomocí zákona zachování energie je potřeba brát v úvahu tři druhy energií – kinetickou energii, potenciální energii v gravitačním poli a potenciální energii napjatosti pružiny.

V okamžiku ihned po dopadu plastelíny na misku je kinetická energie misky s plastelínou $\frac{1}{2}(M + m) \cdot V^2$ a potenciální energie misky s plastelínou v gravitačním poli je rovna $(M+m) \cdot g \cdot \Delta x$, přičemž nulová hladina potenciální energie v gravitačním poli se bere v nové rovnovážné poloze pro niž platí $\Delta x = \frac{m \cdot g}{k}$ (viz rovnice (29)).

Potenciální energie elastického napětí pružiny je rovna $\underline{\frac{1}{2}\,k\cdot l_{G_M}^2}$,

kde $\underline{l_{G_M}^2 = \frac{M^2\cdot g^2}{k^2}}$ je druhá mocnina roztažení pružiny v okamžiku

dopadu plastelíny na misku (viz rovnice (25)).

<u>V okamžiku, kdy je pružina maximálně natažena</u>, je kinetická energie misky s plastelínou rovna nule a potenciální energie v gravitačním poli je $\underline{-(M+m)\cdot g\cdot A}$, kde $\underline{A}$ je amplituda kmitavého pohybu misky s plastelínou. Potenciální energie elastického napětí pružiny je rovna

$\underline{\frac{1}{2}\cdot k\cdot\left(l_{G_{Mm}}+A\right)^2}$, kde $\underline{\left(l_{G_{Mm}}+A\right)^2 = \left(\frac{(M+m)\cdot g}{k}+A\right)^2}$

je druhá mocnina roztažení pružiny v nové rovnovážné poloze (viz rovnice (26)) zvětšené o amplitudu kmitavého pohybu.

<u>Zákon zachování energie pro kmitavý pohyb misky s plastelínou zavěšené na pružině</u> lze zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{2}(M+m)\cdot V^2 + (M+m)\cdot\frac{m\cdot g^2}{k} + \frac{1}{2}\cdot\cancel{k}\cdot\frac{M^2\cdot g^2}{k^{\cancel{2}}} =$$

$$= 0 - (M+m)\cdot g\cdot A + \frac{1}{2}\,k\cdot\left(\frac{(M+m)\cdot g}{k}+A\right)^2, \qquad (39)$$

$$\frac{1}{2}(M+m).V^2+\frac{M.m.g^2}{k}+\frac{m^2.g^2}{k}+\frac{M^2.g^2}{2k}=$$

$$=-(M+m).g.A+\frac{1}{2}k.\frac{(M+m)^2.g^2}{k^2}+\frac{1}{2}.k.\frac{2.(M+m).g}{k}.A+$$

$$+\frac{1}{2}.k.A^2, \tag{40}$$

$$\frac{1}{2}.(M+m).V^2+\cancel{\frac{M.m.g^2}{k}}+\frac{m^2.g^2}{k}+\cancel{\frac{M^2.g^2}{2k}}=$$

$$=\cancel{\frac{M^2.g^2}{2k}}+\cancel{\frac{2.M.m.g^2}{2k}}+\frac{m^2.g^2}{2k}+\frac{1}{2}kA^2, \tag{41}$$

$$\frac{1}{2}(M+m).V^2+\frac{m^2.g^2}{k}.\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}kA^2, \tag{42}$$

a pro amplitudu kmitů plyne

$$A=\sqrt{\frac{(M+m).V^2}{k}+\frac{m^2.g^2}{k^2}}. \tag{43}$$

Po dosazení počáteční rychlosti $\underline{V}$ misky s plastelínou ihned po dopadu plastelíny na misku (viz rovnice (5))

$$A=\sqrt{\frac{\cancel{(M+m)}.m^2.2.g.h}{k.(M+m)^{\cancel{2}}}+\frac{m^2.g^2}{k^2}}, \tag{44}$$

$$A = \sqrt{\frac{m^2 \cdot g^2}{k^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \cancel{g} \cdot h \cdot k^{\cancel{2}}}{\cancel{k} \cdot (M+m) \cdot g^{\cancel{2}}} + 1 \right)} \, , \tag{45}$$

$$\boxed{A = \frac{m \cdot g}{k} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot k}{(M+m) \cdot g} + 1} \, ,} \tag{46}$$

což je výraz pro počáteční amplitudu kmitavého pohybu misky s plastelínou. Získaný výsledek je samozřejmě stejný jako v případě postupu A.