Příklad 11

Spočtěte délku matematického sekundového kyvadla, víte-li, že jeho výchylka klesne, nejsou-li hrazeny energetické ztráty, za 5 minut na 1/10. Jakému logaritmickému dekrementu to odpovídá? (Uvažujeme malé kmity.)

V předchozích dvou příkladech se uvažovaly kmity harmonické. Zde se již uvažuje realističtější popis se zahrnutím vlivu energetických ztrát. Kyvadlo pak vykonává tlumený pohyb.

Jinak řečeno, při pohybu harmonického oscilátoru v reálných podmínkách působí vždy síly, které amplitudu kmitavého pohybu zmenšují a po určitém čase kmitání přestane. Takový oscilátor se pak nazývá tlumený oscilátor.

Pro matematické kyvadlo platí, že závaží je tvořeno hmotným bodem. Kývání matematického kyvadla lze popsat 2. impulzovou větou (pohybovou rovnicí rotačního pohybu)

$$\vec{M}(t) = \frac{d\vec{L}(t)}{dt}, \qquad (1)$$

kde $\vec{L}(t)$ je moment hybnosti, $\vec{M}(t)$ je moment vnější síly. Po úpravách (viz příklad 7, nemění se tvar ani rozložení hmotnosti kyvadla) lze rovnici převést do tvaru

$$M(t) = I \cdot \frac{d\,\omega(t)}{dt} \,, \tag{2}$$

kde $\underline{M(t)}$ je moment vnější síly, $\underline{I}$ je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení a $\underline{\omega(t)}$ je úhlová rychlost kyvadla. Moment setrvačnosti matematického kyvadla je vlastně (zanedbává se hmotnost závěsu) moment setrvačnosti hmotného bodu vzhledem k ose otáčení kyvadla

$$I = m \cdot l^2 \,, \tag{3}$$

kde $\underline{m}$ je hmotnost hmotného bodu a $\underline{l}$ je délka závěsu.

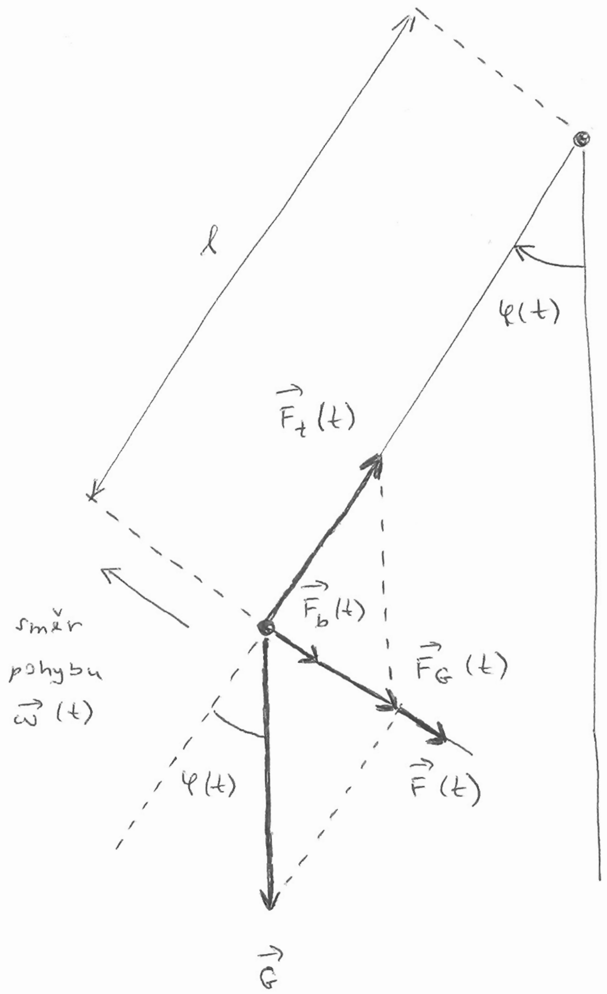
Na hmotný bod matematického kyvadla působí tíhová síla $\underline{\vec{G} = m \cdot \vec{g}}$, tahová síla závěsu $\underline{\vec{F}_t(t)}$ a brzdná síla $\underline{\vec{F}_b(t)}$, která působí proti směru pohybu a je úměrná velikosti rychlosti. Složením těchto sil vzniká výsledná síla $\underline{\vec{F}(t)}$, která vždy směřuje do rovnovážné polohy a vytváří tak kmitavý pohyb kyvadla.

Výslednou sílu $\underline{\vec{F}(t)}$ lze zapsat ve tvaru

$$\vec{F}(t) = \vec{F}_G(t) + \vec{F}_b(t) \,, \tag{4}$$

kde $\vec{F}_G(t)$ je síla vzniklá složením sil $\underline{\vec{G}}$ a $\vec{F}_t(t)$, neboli

$$\sin \varphi(t) = \frac{F_G(t)}{G} \,. \tag{5}$$



kyvadlo je vychýlené z rovnovážné polohy a ještě nedosáhlo levé krajní polohy

Velikost síly $\underline{F_b(t)}$ je úměrná rychlosti pohybu kyvadla, tj.

$$F_b(t) = k_b \cdot \omega(t) = k_b \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt}, \qquad (6)$$

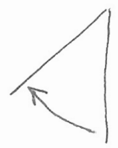
kde $\underline{k_b}$ je koeficient odporu prostředí.

Moment výsledné síly $\underline{F(t)}$ vzhledem k ose otáčejícího se kyvadla je roven

$$M(t) = -m \cdot g \cdot \sin\varphi(t) \cdot l - k_b \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} \cdot l, \qquad (7)$$

kde znaménka (−) v rovnici (7) vyjadřují skutečnost, že moment síly působí proti směru výchylky kyvadla i proti směru rychlosti kyvadla,

Poznámka 1:

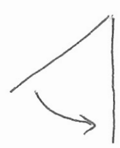


$\varphi(t) > 0$

$\omega(t) = \dfrac{d\varphi(t)}{dt} > 0$

Při pohybu z rovnovážné polohy do levé krajní polohy kyvadla jsou $\varphi(t)$ i $\omega(t)$ kladné a jak síla $F_G(t)$ tak síla $F_b(t)$ směřují do rovnovážné polohy ($F_b(t)$ směřuje proti směru pohybu)

Před součtovými členy na pravé straně rovnice (7) zůstávají znaménka (−), neboť výrazy $\sin\varphi(t)$ i $\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$ jsou kladné.



$\varphi(t) > 0$

$\omega(t) = \dfrac{d\varphi(t)}{dt} < 0$

Při pohybu z levé krajní polohy kyvadla do rovnovážné polohy je $\varphi(t)$ kladné, $\omega(t)$ záporné a tak síla $F_G(t)$ opět směřuje do rovnovážné polohy a síla $F_b(t)$ směřuje do levé krajní polohy ($F_b(t)$ směřuje proti směru pohybu).

Před levým součtovým členem na pravé straně rovnice (7) zůstává znaménko (−), neboť $\sin\varphi(t)$ je kladné.

Před pravý člen na pravé straně rovnice (7) se dostává znaménko (+), neboť se násobí znaménko (−) před tímto členem a znaménko (−) ze záporné hodnoty výrazu $\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$.

S využitím vztahů (7) a (3) lze psát pohybovou rovnici (2) ve tvaru

$$-m \cdot g \cdot \cancel{\ell} \cdot \sin \varphi(t) - k_b \cdot \cancel{\ell} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = m \cdot \ell^{\cancel{2}} \cdot \frac{d\,\omega(t)}{dt}, \qquad (8)$$

neboli

$$-m \cdot g \cdot \sin \varphi(t) - k_b \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = m \cdot \ell \cdot \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2}, \qquad (9)$$

přičemž platí $\frac{d\,\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\varphi(t)}{dt}$. <u>Při uvažování malých úhlů $\varphi(t)$</u> (což je řečeno v zadání) přibližně do $5°$, lze použít matematické zjednodušení <u>$\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$</u>. Poté lze psát

$$-m \cdot g \cdot \varphi(t) - k_b \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = m \cdot \ell \cdot \frac{d^2 \varphi(t)}{dt}, \qquad (10)$$

$$\boxed{\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -\left(\frac{k_b}{m \cdot \ell}\right) \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} - \left(\frac{g}{\ell}\right) \cdot \varphi(t),} \qquad (11)$$

<u>což je pohybová rovnice matematického kyvadla při uvažování malých úhlů.</u>

<u>Poznámka 2:</u>

<u>Tlumený oscilátor</u> je takový fyzikální objekt schopný vykonávat pohyb, na nějž při jeho vychýlení z rovnovážné polohy působí síla <u>$F(t)$</u>

určená vztahem (pro tlumený oscilátor vykonávající rotační pohyb)

$$F(t) = -k \cdot \varphi(t) - k_b \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} , \qquad (12)$$

kde $\varphi(t)$ je výchylka, k je konstanta úměrnosti, k_b je koeficient odporu prostředí, $\frac{d\varphi(t)}{dt}$ je úhlová rychlost pohybu.

Levý součtový člen na pravé straně rovnice odpovídá složce síly, která působí na netlumený harmonický oscilátor (působí proti směru výchylky $\varphi(t)$). Pravý součtový člen na pravé straně rovnice odpovídá síle odporu prostředí, přičemž pro relativně malé rychlosti pohybu platí, že síla, kterou prostředí brzdí pohyb tělesa, je přímo úměrná okamžité rychlosti tělesa a působí proti směru rychlosti $\frac{d\varphi(t)}{dt}$.

Pohybová rovnice tlumeného oscilátoru (ve tvaru kmitajícího kyvadla vykonávajícího rotační pohyb) má tvar (plynoucí z pohybové rovnice pro rotační pohyb, viz. příklad 7, za předpokladu, že se nemění tvar ani rozložení hmotnosti kyvadla)

$$M(t) = I \cdot \varepsilon(t) , \qquad (13)$$

kde $M(t)$ je celkový moment vnějších sil působících na kyvadlo, I je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení a $\varepsilon(t)$ je úhlové zrychlení.

Po rozepsání momentu vnější síly (podobně jako v příkladu 9) a zapsání úhlového zrychlení pomocí druhé derivace výchylky podle času se dostává

$$- k \cdot \varphi(t) \cdot l - k_b \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} \cdot l = I \cdot \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} , \qquad (14)$$

kde l je délka závěsu kyvadla.

Pomocí známé substituce

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k \cdot l}{I}}}$$

(podobně jako u netlumeného harmonického oscilátoru)

a další substituce

$$\boxed{b = \frac{k_b \cdot l}{2 \cdot I}}$$

(nové pro tlumený oscilátor)

se dostává diferenciální rovnice

$$\boxed{\frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = - 2 b \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} - \omega_0^2 \cdot \varphi(t) .} \qquad (15)$$

Veličina <u>ω_0</u> se nazývá <u>vlastní úhlová frekvence</u> (odpovídá úhlové frekvenci <u>ω</u> pro netlumený harmonický oscilátor) a veličina <u>b</u> se nazývá <u>konstanta útlumu</u>. Rovnice (15) je <u>pohybová rovnice tlumeného oscilátoru</u> a z hlediska matematiky to je lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.

Zavedením substitucí $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$, $\boxed{b = \frac{k_b}{2ml}}$

do rovnice (11) se dostává

$$\boxed{\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = -2b\cdot\frac{d\varphi(t)}{dt} - \omega_0^2\cdot\varphi(t)\,.} \qquad (16)$$

Tato rovnice je rovnicí tlumeného oscilátoru (viz rovnice (15)).
Pro úhlovou frekvenci kmitů tlumeného oscilátoru (tj. matematického kyvadla ze zadání příkladu) platí (viz přednáška, nebo substituce v poznámce 3)

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}\,,} \qquad (17)$$

kde pro matematické kyvadlo ze zadání příkladu platí (viz použité substituce) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ je vlastní úhlová frekvence a

$b = \frac{k_b}{2ml}$ je konstanta útlumu.

Dle zadání je matematické kyvadlo sekundové, tj. doba kyvu je 1 s a doba kmitu (doba periody pohybu) je $T = 2\,s$. Perioda funkce $\varphi(t)$ pro výchylku kyvadla je (viz přednáška, nebo rovnice (49) v poznámce 3) je $\omega\cdot T = 2\pi$, tj. platí

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}\,.} \qquad (18)$$

Pro časově proměnnou amplitudu výchylky tlumeného oscilátoru (tj. matematického kyvadla ze zadání) platí (viz přednáška, nebo rovnice (50) v poznámce 3)

$$\boxed{A(t) = A_0 \cdot e^{-b \cdot t},} \tag{19}$$

kde A_0 je amplituda kmitů v čase $t = 0\ \mathrm{s}$. Pokud je známa amplituda výchylky v čase t_1, která je A_1, a amplituda výchylky v čase t_2, která je A_2 (přičemž v zadání příkladu je zadán rozdíl $t_2 - t_1$ a podíl $\frac{A_2}{A_1}$), lze psát poměr amplitud

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\cancel{A_0} \cdot e^{-b \cdot t_1}}{\cancel{A_0} \cdot e^{-b \cdot t_2}} = e^{-b \cdot (t_1 - t_2)}, \tag{20}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = e^{b \cdot (t_2 - t_1)}, \tag{21}$$

odkud lze dále psát

$$\ln \frac{A_1}{A_2} = \ln e^{b(t_2 - t_1)}, \tag{22}$$

$$\ln \frac{A_1}{A_2} = b \cdot (t_2 - t_1), \tag{23}$$

$$\boxed{b = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \ln \frac{A_1}{A_2}.} \tag{24}$$

Dosazením konstanty útlumu $\underline{b}$ z rovnice (24), úhlové frekvence tlumeného kyvadla $\underline{\omega}$ z rovnice (18), a vlastní úhlové frekvence $\underline{\omega_0}$ ze substituce v rovnici (11), do vztahu pro úhlovou frekvenci tlumeného oscilátoru (kyvadla) (rovnice (17)) se získává

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l} - \frac{1}{(t_2 - t_1)^2} \cdot \ln^2 \frac{A_1}{A_2}} \, , \tag{25}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{1}{(t_2 - t_1)^2} \cdot \ln^2 \frac{A_1}{A_2} = \frac{g}{l} \, , \tag{26}$$

$$\boxed{l = \frac{g}{\frac{4\pi^2}{T^2} + \frac{1}{(t_2 - t_1)^2} \cdot \ln^2 \frac{A_1}{A_2}}} \, , \tag{27}$$

což je hledaná <u>délka závěsu matematického kyvadla</u>.

Po dosazení číselných hodnot se dostává <u>délka závěsu</u>

$$l = \frac{9{,}81}{\frac{4\pi^2}{4} + \frac{1}{300^2} \ln^2 10} \doteq \underline{0{,}994 \text{ m}} \, .$$

<u>Logaritmický dekrement δ</u> je pro tlumený oscilátor (tj. matematické kyvadlo ze zadání) definován jako

$$\boxed{\delta = \ln d} \, , \tag{28}$$

kde <u>útlum</u> $\underline{d}$ je definován jako <u>podíl dvou po sobě</u>

následujících maximálních výchylek oscilátoru (kyvadla) na jednu stranu

$$\boxed{\lambda = \frac{A(t)}{A(t+T)}} , \qquad (29)$$

neboli s využitím vztahu pro $A(t)$ z rovnice (19) plyne

$$\lambda = \frac{\cancel{A_0} \cdot e^{-b.t}}{\cancel{A_0} \cdot e^{-b.(t+T)}} , \qquad (30)$$

$$\lambda = \frac{\cancel{e^{-b.t}}}{\cancel{e^{-b.t}} \cdot e^{-b.T}} , \qquad (31)$$

$$\lambda = e^{b.T} , \qquad (32)$$

a tedy pro logaritmický dekrement δ lze psát po dosazení rovnice (32) do vztahu (28)

$$\delta = \ln e^{b.T} = b.T . \qquad (33)$$

Po dosazení za b z rovnice (24) do rovnice (33) se získá

$$\boxed{\delta = \frac{T}{t_2 - t_1} \cdot \ln \frac{A_1}{A_2} ,} \qquad (34)$$

což je hledaný logaritmický dekrement matematického kyvadla.

Po dosazení číselných hodnot se dostává logaritmický dekrement

$$\delta = \frac{2}{300} \cdot \ln 10 \doteq \underline{1{,}5 \times 10^{-2}}.$$