<u>Poznámka 3 :</u> Pouze <u>volně doplňuje řešený příklad</u>, <u>lze ji nahradit</u> znalostí některých vztahů z přednášky.

<u>Pohybová rovnice tlumeného oscilátoru</u> (rovnice (15)) má <u>partikulární řešení</u> ve tvaru

$$\varphi(t) = c \cdot e^{\alpha . t} , \tag{35}$$

kde $\underline{c}$ je integrační konstanta a $\underline{\alpha}$ je kořenem tzv. <u>charakteristické rovnice</u>, která vznikne dosazením tohoto řešení do diferenciální rovnice (rovnice (15))

$$\cancel{c} \cdot \alpha^2 \cdot \cancel{e^{\alpha . t}} = -2b \cdot \cancel{c} \cdot \alpha \cdot \cancel{e^{\alpha t}} - \omega_0^2 \cdot \cancel{c} \cdot \cancel{e^{\alpha t}} , \tag{36}$$

$$\boxed{\alpha^2 + 2b \cdot \alpha + \omega_0^2 = 0} . \tag{37}$$

<u>Řešení</u> této <u>charakteristické rovnice</u> jsou <u>dvě</u> a to ve tvaru

$$\alpha_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} . \tag{38}$$

Existují tak dvě partikulární řešení a <u>obecné řešení pohybové rovnice tlumeného oscilátoru</u> bude mít tvar

$$\varphi(t) = c_1 . e^{\alpha_1 . t} + c_2 . e^{\alpha_2 . t} . \tag{39}$$

O konkrétní podobě tohoto matematického výrazu rozhodne velikost veličin <u>b</u> a <u>ω_0</u>. Zde se budeme zabývat <u>pouze případem malého tlumení pro které platí $b < \omega_0$</u>. Za této podmínky je pod odmocninou v rovnici (38) záporné číslo a oba kořeny charakteristické rovnice jsou <u>komplexní čísla</u>

$$\boxed{\alpha_{1,2} = -b \pm i . \sqrt{\omega_0^2 - b^2}} . \tag{40}$$

Pomocí substituce $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$ se dostane z rovnice (40) vztah

$$\alpha_{1,2} = -b \pm i . \omega , \tag{41}$$

a po dosazení do obecného řešení se získá

$$\varphi(t) = c_1 . e^{(-b+i\omega).t} + c_2 . e^{(-b-i\omega).t} , \tag{42}$$

$$\varphi(t) = e^{-b.t} . \left(c_1 . e^{i\omega t} + c_2 . e^{-i\omega t} \right) . \tag{43}$$

Vhodnou volbou integračních konstant $\underline{c_1}$, $\underline{c_2}$ lze výraz v závorce upravit. Pokud se zvolí substituce $\boxed{c_1 = \frac{1}{2}(d_2 - i \cdot d_1)}$, $\boxed{c_2 = \frac{1}{2}(d_2 + i \cdot d_1)}$, pak se dostává

$$\varphi(t) = e^{-b.t} \cdot \left[\frac{1}{2}(d_2 - i d_1) . e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(d_2 + i d_1) . e^{-i\omega t} \right], \qquad (44)$$

a podle <u>Eulerova vztahu</u> ($e^{i\alpha} = \cos\alpha + i . \sin\alpha$) se dále dostává

$$\varphi(t) = e^{-b.t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big[(d_2 - i d_1) . \big(\cos(\omega t) + i . \sin(\omega t) \big) +$$
$$(d_2 + i d_1) . \big(\underbrace{\cos(-\omega t)}_{= \cos(\omega t)} + \underbrace{i . \sin(-\omega t)}_{= - \sin(\omega t)} \big) \Big], \qquad (45)$$

$$\varphi(t) = e^{-b.t} \cdot \frac{1}{2} \Big[d_2 . \cos(\omega t) + \cancel{i d_2 . \sin(\omega t)} - \cancel{i d_1 . \cos(\omega t)} - i^2 . d_1 . \sin(\omega t) +$$
$$+ d_2 . \cos(\omega t) - \cancel{i d_2 . \sin(\omega t)} + \cancel{i d_1 . \cos(\omega t)} - i^2 . d_1 . \sin(\omega t) \Big], \qquad (46)$$

$$\varphi(t) = e^{-bt} \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \Big[\cancel{2} . d_2 . \cos(\omega t) + \cancel{2} . d_1 . \sin(\omega t) \Big], \qquad (47)$$

$$\varphi(t) = e^{-b.t} \cdot \big(d_1 . \sin(\omega t) + d_2 . \cos(\omega t) \big). \qquad (48)$$

Další vhodnou substitucí integračních konstant $\underline{d_1}$, $\underline{d_2}$ za integrační konstanty $\underline{A_0}$, $\underline{\varphi}$ ($\underline{d_1 = A_0 . \cos\varphi}$, $\underline{d_2 = A_0 . \sin\varphi}$) (již použitou v <u>příkladu 10</u>) se rovnice (48) upraví do tvaru

$$\boxed{\varphi(t) = A_0 . e^{-b.t} . \sin(\omega t + \varphi) .} \qquad (49)$$

Z této rovnice vyplývá, že výraz $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$ použitý jako substituce v rovnici (40) má význam úhlové frekvence tlumených kmitů a platí $\omega < \omega_0$. Při malém tlumení se kmitání nazývá kvaziharmonické, které má stálou frekvenci ω, ale časově proměnnou amplitudu tlumených kmitů $A(t)$, která klesá s časem dle vztahu

$$\boxed{A(t) = A_0 . e^{-b.t} ,} \qquad (50)$$

kde A_0 je amplituda kmitů v čase $t = 0$ s.

I pro tlumený oscilátor (kyvadlo) se využívá veličina T, která má význam periody kmitů (avšak amplituda klesá, tj. průběh kmitání se nikdy neopakuje) jejíž velikost plyne z rovnice (49), neboť perioda funkce sin je 2π

$$\omega . T = 2\pi , \qquad (51)$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} .} \qquad (52)$$