Příklad 13 Jeden mol ideálního plynu byl převeden ze stavu o teplotě 30 °C a objemu 10 l na stav s teplotou 120 °C a objemem 40 l.

Určete vykonanou práci, dodané teplo a změnu vnitřní energie, byl-li plyn jednak nejdříve izotermicky rozepnut na konečný objem a pak izochoricky doohřát a ve druhém případě nejdříve izochoricky ohřát na konečnou teplotu a pak izotermicky dorozepnut.

Potřebná data jsou molární plynová konstanta $R = 8,3\ J.K^{-1}.mol^{-1}$, molární tepelná kapacita při konstantním objemu $c_v = 20,8\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.

Označme počáteční teplotu (přepočtenou na absolutní) jako T_1 a počáteční objem V_1 a obdobně konečnou teplotu a objem jako T_2 a V_2.

1. varianta

První proces je izotermické rozepnutí plynu na konečný objem. Pro změnu vnitřní energie ΔU_I platí

$$\Delta U_I = n \cdot c_V \cdot (T_1 - T_1) = 0 , \qquad (1)$$

a z I. věty termodynamické v integrálním tvaru

$$\Delta U = Q - A \,, \tag{2}$$

kde ΔU je změna vnitřní energie, Q je dodané teplo a A je vykonaná práce, plyne rovnost dodaného tepla a vykonané práce, tj.

$$\boxed{Q_I = A_I \,.} \tag{3}$$

Vykonaná práce při tomto izotermickém ději se s použitím stavové rovnice pro ideální plyn ve tvaru

$$\frac{p \cdot V}{T} = n \cdot R \,, \tag{4}$$

spočítá podle

$$A_I = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} \cdot dV \,, \tag{5}$$

$$A_I = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = n \cdot R \cdot T_1 \cdot (\ln V_2 - \ln V_1) \,, \tag{6}$$

$$\boxed{A_I = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \,.} \tag{7}$$

Druhý proces je izochorické dohřátí plynu (nemění se objem), tj. při tomto procesu se nekoná práce

$$A_{II} = \int_{V_2}^{V_2} p \cdot dV = 0 \,, \qquad (8)$$

pro změnu vnitřní energie platí

$$\Delta U_{II} = n \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) \,, \qquad (9)$$

a z I. věty termodynamické (rovnice (2)) plyne

$$\Delta U_{II} = Q_{II} \,. \qquad (10)$$

Celkově pro první variantu se dostává pro změnu vnitřní energie ΔU, dodané teplo Q a vykonanou práci A

$$\Delta U = \Delta U_I + \Delta U_{II} = n \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) \,, \qquad (11)$$

$$Q = Q_I + Q_{II} = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} + n \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) \,, \qquad (12)$$

$$A = A_I + A_{II} = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \,. \qquad (13)$$

Po číselném dosazení se získá změna vnitřní energie $\Delta U = 1872$ J, dodané teplo $Q = 3486 + 1872 = 5358$ J a vykonaná práce $A = 3486$ J.

2. varianta

První proces je izochorické ohřátí na konečnou teplotu. Při tomto procesu se nekoná práce, neboť se nemění objem

$$A_{I} = \int_{V_1}^{V_1} p \cdot dV = \underline{0} . \qquad (14)$$

Pro změnu vnitřní energie platí

$$\Delta U_{I} = n \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) , \qquad (15)$$

a z I. věty termodynamické (rovnice (2)) plyne

$$\Delta U_{I} = Q_{I} . \qquad (16)$$

Druhý proces je izotermické dorozepnutí plynu. Pro změnu vnitřní energie ΔU_{II} platí

$$\Delta U_{II} = n \cdot c_V \cdot (T_2 - T_2) = \underline{0} . \qquad (17)$$

Z I. věty termodynamické (rovnice (2)) plyne

$$Q_{II} = A_{II} . \qquad (18)$$

Pro vykonanou práci platí (s využitím rovnice (4))

$$A_{II} = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} \cdot dV \, , \qquad (19)$$

$$A_{II} = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = n \cdot R \cdot T_2 \, (\ln V_2 - \ln V_1) \, , \qquad (20)$$

$$\boxed{A_{II} = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}} \, . \qquad (21)$$

Celkově pro druhou variantu se dostává pro změnu vnitřní energie ΔU, dodané teplo Q a vykonanou práci A

$$\Delta U = \Delta U_I + \Delta U_{II} = n \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) \, , \qquad (22)$$

$$Q = Q_I + Q_{II} = n \cdot c_V \cdot (T_2 - T_1) + n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \, , \qquad (23)$$

$$A = A_I + A_{II} = n \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \, . \qquad (24)$$

Po číselném dosazení se dostane změna vnitřní energie $\Delta U = 1872$ J, dodané teplo $Q = 1872 + 4522 = 6394$ J a vykonaná práce $A = 4522$ J.

Poznámka 1:

Vnitřní energie plynu U je stavová veličina, která nezávisí na uskutečněném procesu, ale pouze na počátečním a koncovém stavu plynu.

Proto je změna vnitřní energie U u obou variant stejná.

Dodané teplo Q a vykonaná práce A jsou procesní veličiny, které závisejí jak na počátečním a koncovém stavu plynu, tak na uskutečněném procesu. Proto jsou teplo Q a práce A u obou variant různé.