PROGRAM SEMINÁŘŮ (TEORETICKÝCH CVIČENÍ) Z PŘEDMĚTU "TECHNICKÁ FYZIKA (TFY)" PRO POSLUCHAČE 1. ROČ. FS ZČU

Tento materiál obsahuje řešené problémy, koncipované jako aplikace poznatků prezentovaných na přednášce k příslušnému předmětu. Výběr problémů i jejich řešení zohledňuje připomínky a náměty, sdělené jak posluchači tak vyučujícími v uplynulých 2 letech. Všechny zde uvedené problémy jsou závazné v tom smyslu, že jejich nepatrné obměny budou nedílnou součástí zkoušky.

<u>Podmínky zápočtu</u> : <u>Úspěšné</u> absolvování <u>zápočtového testu</u>, který je tvořen dvěma náhodně vybranými problémy (nebo jejich částmi) z obsahu **seminářů č. 1 – 5.**

<u>Podmínky úspěšnosti</u> :

a) <u>v 1. kole</u> :

$N_1 \geqq 7$ (N_1... počet získaných bodů z 13 možných)

b) <u>v 2. kole</u> (tj. když $N_1 < 7$) :

$$\left[\frac{N_1}{2}\right] + \underbrace{N_2}_{\text{počet bodů získaných ve 2. kole}} \geqq 8$$

c) <u>ve 3. kole</u> (tj. když $\left[\frac{N_1}{2}\right] + N_2 < 8$) :

$$\left[\frac{N_1}{2}\right] + \left[\frac{N_2}{2}\right] + N_3 \geqq 9$$

⋮

atd.

SEMINÁŘ č. 1

První a druhý výukový týden

Problém č. 1

Jsou dány vektory $\vec{a} = 2(\vec{i}+\vec{j})$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$.

Najděte :
- a) jejich velikosti
- b) jejich součet a rozdíl
- c) jejich skalární součin
- d) úhel mezi nimi
- e) jejich vektorový součin .

Ukažte dále , že vektorový součin obou vektorů je kolmý ke každému z nich.

Řešení : Nejdříve vektory přepíšeme do standardní formy:

$$\vec{a} = 2(\vec{i}+\vec{j}) = \underbrace{2}_{a_x}\vec{i} + \underbrace{2}_{a_y}\vec{j} + \underbrace{0}_{a_z}\vec{k}$$

$$\vec{b} = \vec{i} - \vec{k} = \underbrace{1}_{b_x}\vec{i} + \underbrace{0}_{b_y}\vec{j} + \underbrace{(-1)}_{b_z}\vec{k} \qquad (1)$$

Podle příslušných formulí z přednášky pak máme :

$$\text{a)} \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{8}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \qquad (2)$$

b)

$$\underline{\underline{\vec{a}+\vec{b}}} = (a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}+(a_z+b_z)\vec{k} = (2+1)\vec{i}+(2-0)\vec{j}+(0+(-1))\vec{k} = \underline{\underline{3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}}}$$

$$\underline{\underline{\vec{a}-\vec{b}}} = (a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}+(a_z-b_z)\vec{k} = (2-1)\vec{i}+(2-0)\vec{j}+(0-(-1))\vec{k} = \underline{\underline{\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}} \tag{3}$$

c)

$$\underline{\underline{(\vec{a}\cdot\vec{b})}} = a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z = 2.1+2.0+0.(-1) = \underline{\underline{2}} \tag{4}$$

d)

$$\underline{\underline{\cos\phi}} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{8}.\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \tag{5}$$

$$\boxed{\phi = 60^\circ}$$

e)

$$\underline{\underline{(\vec{a}\times\vec{b})}} = (a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k} = (2(-1)-0.0)\vec{i}+(0.1-2.(-1))\vec{j}+(2.0-2.1)\vec{k} = \underline{\underline{-2\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}}} \tag{6}$$

K důkazu kolmosti vektorového součinu $(\vec{a}\times\vec{b})$ ke každému z vektorů $\vec{a}, \vec{b}$ stačí spočítat skalární součiny $((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a})$, $((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b})$ a ukázat, že jsou rovny $\underline{0}$. Užitím (1) a (6) máme:

$$\underline{\underline{((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a})}} = (-2).2+2.2+(-2).0 = -4+4+0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b})}} = (-2).1+2.0+(-2).(-1) = -2+0+2 = \underline{\underline{0}} \tag{7}$$

čímž je příslušná kolmost prokázána.

* * * * *

Problém č. 2

Parametrické rovnice trajektorie hmotného bodu jsou:

$$x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$$
$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot t^2 \qquad (t \ldots \text{čas})$$
$$z(t) = 2 \quad .$$

Najděte:

a) souřadnice a velikost vektoru okamžité rychlosti v libovolném čase t;

b) souřadnice a velikost vektoru okamžitého zrychlení v libovolném čase t.

Řešení:

a)
$$v_x(t) = \frac{d}{dt}\big(x(t)\big) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t^3 - t\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}t^3\right) - \frac{d}{dt}(t) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}(t^3)}_{3.t^{3-1}} - \underbrace{\frac{d}{dt}(t^1)}_{1.t^{1-1}} = \frac{1}{3}.3.t^2 - 1.\underbrace{t^0}_{1} = t^2 - 1 \quad ;$$

$$v_y(t) = \frac{d}{dt}\big(y(t)\big) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}t^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\frac{d}{dt}(t^2)}_{2.t^{2-1}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 . t^1 = \sqrt{2}.t \quad ;$$

$$v_z(t) = \frac{d}{dt}\big(z(t)\big) = \frac{d}{dt}\underbrace{(2)}_{\text{konst}} = 0 \quad .$$

Souřadnice vektoru okamžité rychlosti v libovolném čase t tedy jsou:

$$\boxed{v_x(t) = t^2 - 1 \quad ; \quad v_y(t) = \sqrt{2}.t \quad ; \quad v_z(t) = 0} \quad ! \quad (1)$$

Pro velikost tohoto vektoru pak máme:

$$\left|\vec{v}(t)\right| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)} = \sqrt{(t^2-1)^2 + (\sqrt{2}t)^2 + 0^2} =$$
$$= \sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 2t^2} = \sqrt{t^4 + 1} \quad ! \quad (2)$$

b) $\underline{\underline{a_x(t)}} = \frac{d}{dt}\left(v_x(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(t^2-1\right) = \underbrace{\frac{d}{dt}(t^2)}_{2t^1} - \underbrace{\frac{d}{dt}(1)}_{0} = \underline{\underline{2t}}$;

$\underline{\underline{a_y(t)}} = \frac{d}{dt}\left(v_y(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}.t\right) = \sqrt{2}.\underbrace{\frac{d}{dt}(t)}_{1} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$;

$\underline{\underline{a_z(t)}} = \frac{d}{dt}\left(v_z(t)\right) = \underbrace{\frac{d}{dt}(0)}_{0} = \underline{\underline{0}}$.

Souřadnice vektoru okamžitého zrychlení v libovolném čase $\underline{t}$ tedy jsou:

$$\boxed{a_x(t) = 2t \quad ; \quad a_y(t) = \sqrt{2} \quad ; \quad a_z(t) = 0}$$! (3)

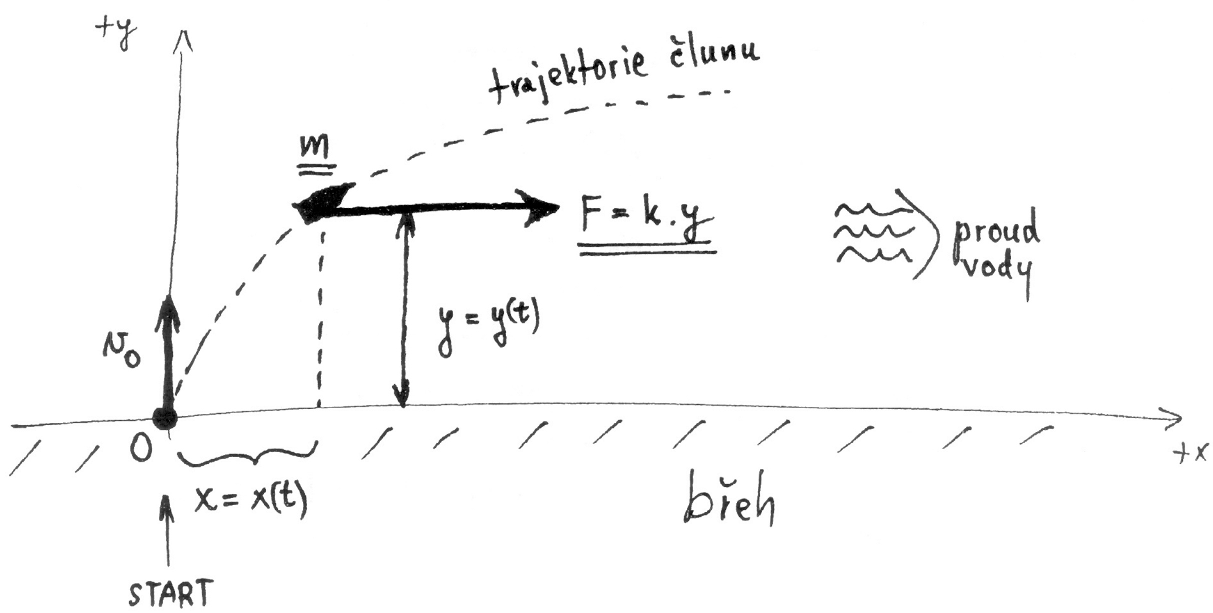
Pro velikost tohoto vektoru dostáváme:

$$\boxed{\underline{\underline{|\vec{a}(t)|}} = \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t) + a_z^2(t)} = \sqrt{(2t)^2 + (\sqrt{2})^2 + 0^2} = \underline{\underline{\sqrt{4t^2+2}}}}$$! (4)

Problém č. 3

Člun o hmotnosti $\underline{m = 50\,kg}$ startuje kolmo ke břehu a pohybuje se dále v tomto směru konstantní rychlostí $\underline{v_0} = 2\,ms^{-1}$ vůči vodě. Současně je unášen podél břehu proudem vody, který na něj působí silou $\underline{F = k.y}$, kde konstanta $\underline{k}$ má hodnotu $\underline{k = 150\,Nm^{-1}}$ a $\underline{y}$ je okamžitá vzdálenost člunu od břehu.
Najděte parametrické rovnice trajektorie, po níž se člun pohybuje.

Řešení:



Pohyb člunu ve směru kolmém ke břehu:

$$\boxed{\underbrace{\frac{d}{dt}\left(y(t)\right)}_{v_y(t)} = \underbrace{v_0}_{\text{konst.}}} \quad (1)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y(t) = \int v_0 \, dt = v_0 \cdot \int 1 dt = v_0 \cdot (t + C_1)} \quad (2)$$

V čase $t=0$ se člun nachází na břehu, tj. $y(0) = 0$.
Dosazením této podmínky do (2) máme:

$$0 = v_0 (0 + C_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = 0} \quad (3)$$

Dosazením (3) do (2) pak dostáváme první parametrickou rovnici trajektorie člunu:

$$\boxed{y(t) = v_0 . t} \quad ! \quad (4)$$

Nyní prozkoumejme pohyb člunu podél břehu :

V čase t se člun nachází ve vzdálenosti $y = y(t)$ od břehu a podle zadání na něj působí ve směru proudu vody síla

$$\boxed{F = k.y = k.\underbrace{y(t)}_{\substack{v_0.t \\ \text{dle (4)}}} = kv_0.t}$$,

která mu uděluje podél břehu zrychlení

$$\boxed{a_x(t) = \frac{F}{m} = \frac{kv_0.t}{m} = \frac{kv_0}{m}.t} \qquad (5)$$

Podle definice zrychlení ve směru x platí

$$\boxed{a_x(t) = \frac{d}{dt}\left(v_x(t)\right)} \qquad (6)$$,

takže porovnáním (5) a (6) máme rovnici

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(v_x(t)\right) = \frac{kv_0}{m}.t} \qquad (7)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underline{\underline{v_x(t)}} = \int \frac{kv_0}{m}.t\,dt = \frac{kv_0}{m}.\int t\,dt = \underline{\underline{\frac{kv_0}{m}.\left(\frac{1}{2}t^2 + C_2\right)}}} \qquad (8)$$.

V čase $\underline{t=0}$ je podle zadání x-ová souřadnice vektoru rychlosti nulová, tj.

$$\underline{\underline{v_x(0) = 0}} \; .$$

Dosazením této podmínky do (8) máme :

$$0 = \frac{kv_0}{m}.\left(\frac{1}{2}0^2 + C_2\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_2 = 0} \quad (9)$$

Dosazením (9) do (8) dostáváme:

$$\boxed{v_x(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{k v_0}{m}\cdot t^2} \qquad (10)$$

rychlost člunu podél břehu v čase $\underline{\underline{t}}$.

Podle definice současně platí:

$$\boxed{v_x(t) = \frac{d}{dt}\left(x(t)\right)} \qquad (11)$$

Kombinací (10) a (11) tak máme rovnici:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(x(t)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{k v_0}{m}\cdot t^2} \qquad (12)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underline{\underline{x(t)}} = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{k v_0}{m}\cdot t^2\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{k v_0}{m}\cdot\int t^2\,dt = \underline{\underline{\frac{k v_0}{2m}\cdot\left(\frac{1}{3}t^3 + C_3\right)}}} \qquad (13)$$

Pro $\underline{\underline{t=0}}$ musí být $\underline{\underline{x(0) = 0}}$ (počátek byl zvolen v místě startu),

takže $\boxed{0 = \frac{k v_0}{2m}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 + C_3\right)} \Rightarrow \boxed{C_3 = 0}$. (14)

Dosazením (14) do (13) nakonec máme <u>druhou parametrickou rovnici trajektorie člunu</u>:

$$\boxed{x(t) = \frac{k v_0}{6m}\cdot t^3} \qquad (15)$$

<u>ZÁVĚR</u>: Parametrické rovnice trajektorie člunu v rovině $\underline{\underline{xy}}$ jsou:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{k v_0}{6m}\cdot t^3 \\ y(t) &= v_0\cdot t \end{aligned}} \qquad (16)$$

<u>Číselně</u>: $v_0 = 2\,[ms^{-1}]$; $\frac{k v_0}{6m} = \frac{150\,[Nm^{-1}]\cdot 2\,[ms^{-1}]}{6\cdot 50\,[kg]} = 1\,[ms^{-3}]$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x(t) = t^3\,[m] \quad ; \quad y(t) = 2t\,[m]} \qquad (17)$$

* * * * *

SEMINÁŘ Č. 2

Třetí a čtvrtý výukový týden

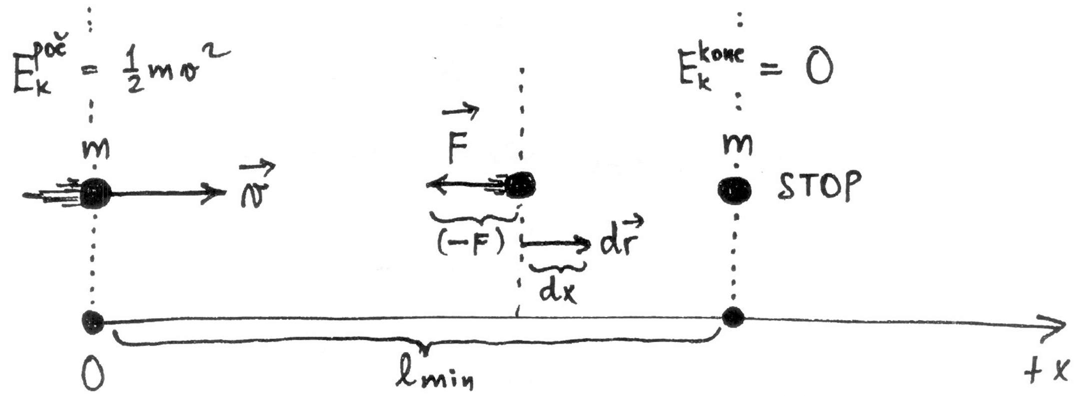
Problém č. 1

Střela o hmotnosti $m = 100\,g$ vletí rychlostí $v = 200\ ms^{-1}$ do hmotného prostředí, kde na ni působí proti směru pohybu konstantní brzdicí síla o velikosti $F = 10^4\ N$.
Jakou minimální tloušťku musí mít brzdicí prostředí, aby v něm střela uvízla?

Řešení: Problém budeme řešit na základě věty o ekvivalenci mechanické práce a změny kinetické energie (viz přednáška):

$$\underbrace{\int_{\vec{r}_{poč}}^{\vec{r}_{konc}} (\vec{F} \cdot d\vec{r})}_{\text{mechanická práce vykonaná silou } \vec{F} \text{ působící na daný objekt při jeho přemístění z počátečního místa o polohovém vektoru } \vec{r}_{poč} \text{ do koncového místa o polohovém vektoru } \vec{r}_{konc}} = \underbrace{E_k^{konc} - E_k^{poč}}_{\text{rozdíl kinetických energií objektu v koncovém a počátečním místě}} \qquad (1)$$

Minimální tloušťku l_{min} pro uviznutí střely bude mít brzdící prostředí tehdy, když se střela zastaví právě na jeho konci. Zvolíme-li souřadný systém tak, že počátek je v místě vniku střely do brzdícího prostředí a osa x je orientována ve směru pohybu střely, vypadá situace následovně:



$\vec{r}_{poč} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ $\qquad$ $\vec{r}_{konc} = l_{min}\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= (-F)\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \\ d\vec{r} &= (dx)\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = (-F)(dx) + 0.0 + 0.0 = (-F)dx \qquad (2)$$

Odtud dostaneme:

a) $$\int_{\vec{r}_{poč}}^{\vec{r}_{konc}} (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_0^{l_{min}} \underbrace{(-F)}_{konst.} dx = (-F) \cdot \int_0^{l_{min}} 1\, dx = (-F) \cdot (l_{min} - 0) = -F \cdot l_{min} \qquad \ldots (3)$$

b) $$E_k^{konc} - E_k^{poč} = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Dosazením (3) a (4) do rovnice (1) máme:

$$\boxed{-F \cdot l_{min} = -\frac{1}{2}mv^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{l_{min} = \frac{mv^2}{2F}} \qquad (5)$$

Číselně: $$l_{min} = \frac{10^{-1}[kg] \cdot (2 \cdot 10^2 [ms^{-1}])^2}{2 \cdot 10^4 [N]} = 2 \cdot 10^{-1} [m] = 20\,cm \qquad (6)$$

Problém č. 2

Potenciální energie hmotného bodu je dána vztahem

$$E_{pot}(x) = (x^3 - 3x^2).$$

Určete: a) velikost a směr síly $F(x)$ působící na hmotný bod v místech $x=1$ a $x=3$;

b) místo a druh všech rovnovážných poloh hmotného bodu.

Řešení: a) Mezi silou a potenciální energií platí vztah:

$$\boxed{F(x) = -\frac{d}{dx}\left(E_{pot}(x)\right)} \quad (1).$$

V daném konkrétním případě tak máme:

$$\underline{\underline{F(x)}} = -\frac{d}{dx}\left(\underbrace{x^3 - 3x}_{E_{pot}(x)}\right) = -\left\{\frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(3x^2)\right\} =$$

$$= -\left\{3x^2 - 6x\right\} = \underline{\underline{3x.(2-x)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F(x) = 3x(2-x)} \quad (2).$$

$\underline{\underline{x=1}}$ ... $F(1) = 3.1.(2-1) = \underline{\underline{+3}}$

$\underline{\underline{x=3}}$ ... $F(3) = 3.3.(2-3) = \underline{\underline{-9}}$

Rovnovážná poloha x_r je definována požadavkem:

$$\boxed{F(x_r) = 0} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Dosadíme-li do (3) výraz (2) pro $x = x_r$, máme:

$$\boxed{3x_r \cdot (2 - x_r) = 0}$$

$$\boxed{(x_r)_1 = 0 \quad ; \quad (x_r)_2 = 2} \quad (4)$$

2 rovnovážné polohy uvažovaného hmotného bodu

Druh rovnovážné polohy se určí podle znaménka derivace $\frac{d}{dx}(F(x))$:

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dx}\left(3x(2-x)\right) = \frac{d}{dx}\left(6x - 3x^2\right) = 6 - 6x = 6(1-x) .$$

V rovnovážných polohách (4) máme:

$$\boxed{\left.\frac{d}{dx}(F(x))\right|_{x=(x_r)_1=0} = 6.(1-0) = +6 > 0} \quad (5)$$

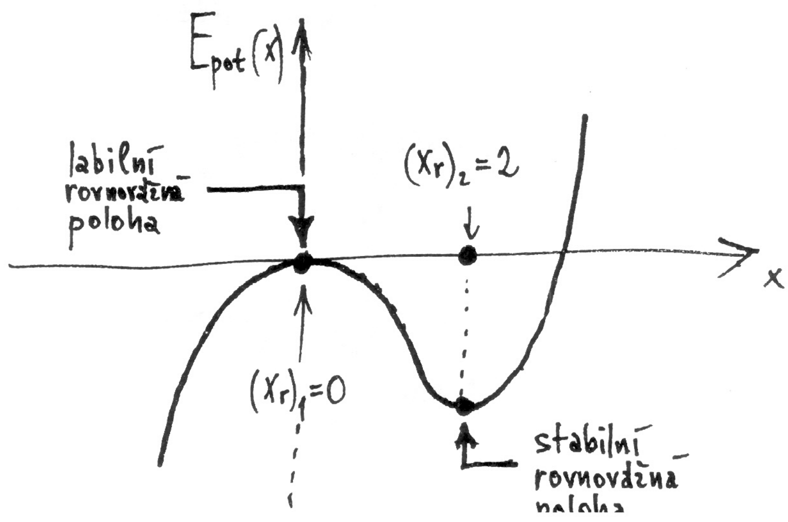
$\Downarrow$

rovnovážná poloha $(x_r)_1 = 0$ je LABILNÍ.

$$\boxed{\left.\frac{d}{dx}(F(x))\right|_{x=(x_r)_2=2} = 6.(1-2) = -6 < 0} \quad (6)$$

$\Downarrow$

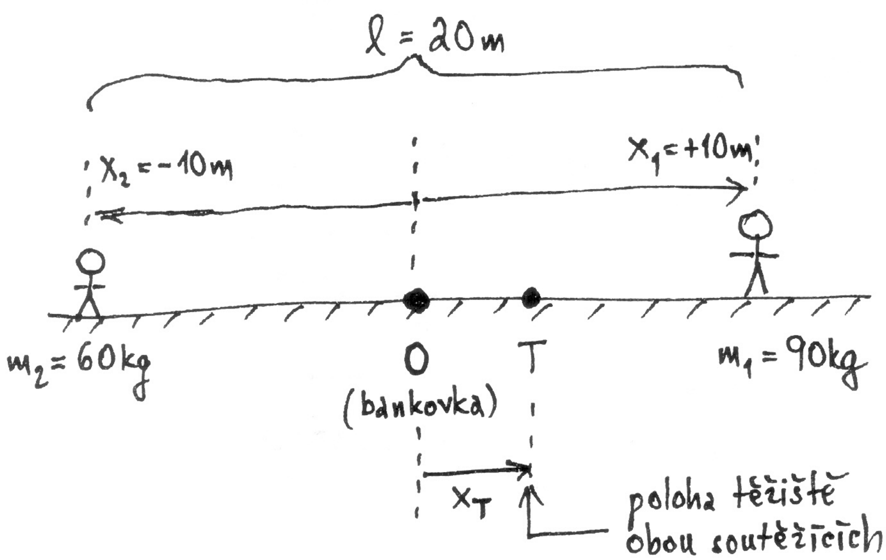
rovnovážná poloha $(x_r)_2 = 2$ je STABILNÍ.



Problém č. 3

Dva soutěžící o hmotnostech $m_1 = 90\,kg$ a $m_2 = 60\,kg$ stojí proti sobě na bruslích ve vzájemné vzdálenosti $l = 20\,m$ na vodorovné, dokonale hladké rovině a mohou se navzájem přitahovat pomocí pevného lana o zanedbatelné hmotnosti. Přesně uprostřed mezi nimi leží tisícikorunová bankovka. Soutěžící s větší hmotností je výkonnější a je schopen ručkovat po laně dvojnásobnou rychlostí než druhý. Kdo bude vítězem a odnese si bankovku?

Řešení: Zvolíme-li souřadný systém tak, že jeho počátek je v ležící bankovce, vypadá situace na počátku soutěže takto:



$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{90[kg].(+10)[m] + 60[kg].(-10)[m]}{(60+90)[kg]} = \frac{(900-600)[kgm]}{150\,[kg]} = (+2)[m]$$

Těžiště obou soutěžících tedy leží 2m vpravo od bankovky směrem k těžšímu soutěžícímu.

Při zadaných podmínkách je <u>celková vnější síla</u>, působící na systém složený z uvažovaných 2 soutěžících, <u>nulová</u> (ve svislém směru je tíha soutěžících plně kompenzována reakcí vodorovné roviny, dokonalá hladkost této roviny pak zaručuje absenci třecí síly ve vodorovném směru).
Systém obou soutěžících je tedy <u>izolovaný ($\vec{F}_{celk}^{vnější} = \vec{0}$)</u>, takže

první impulsová věta $\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{celk}\right) = \vec{F}_{celk}^{vnější}$ se pro něj redukuje na tvar:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{P}_{celk}\right) = \vec{0}}$$

$$\Downarrow$$

$$!\ \boxed{\vec{P}_{celk} = \overrightarrow{konst}}\ ! \qquad (1)$$

zákon zachování celkové hybnosti izolovaného systému.

Celková hybnost našeho systému 2 soutěžících je:

$$\boxed{\underline{\underline{\vec{P}_{celk}}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \underbrace{(m_1+m_2)}_{M_{celk}} \cdot \underbrace{\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{(m_1+m_2)}}_{\substack{\vec{v}_T \\ (\text{rychlost těžiště})}} = \underline{\underline{M_{celk}\cdot\vec{v}_T}}} \qquad (2)$$

Dosadíme-li (2) do (1), dostáváme:

$$\boxed{M_{celk}\cdot\vec{v}_T = \overrightarrow{konst}}$$

$$\Downarrow$$

$$!\ \boxed{\vec{v}_T = \frac{1}{M_{celk}}\cdot\overrightarrow{konst}}\ ! \qquad (3)$$

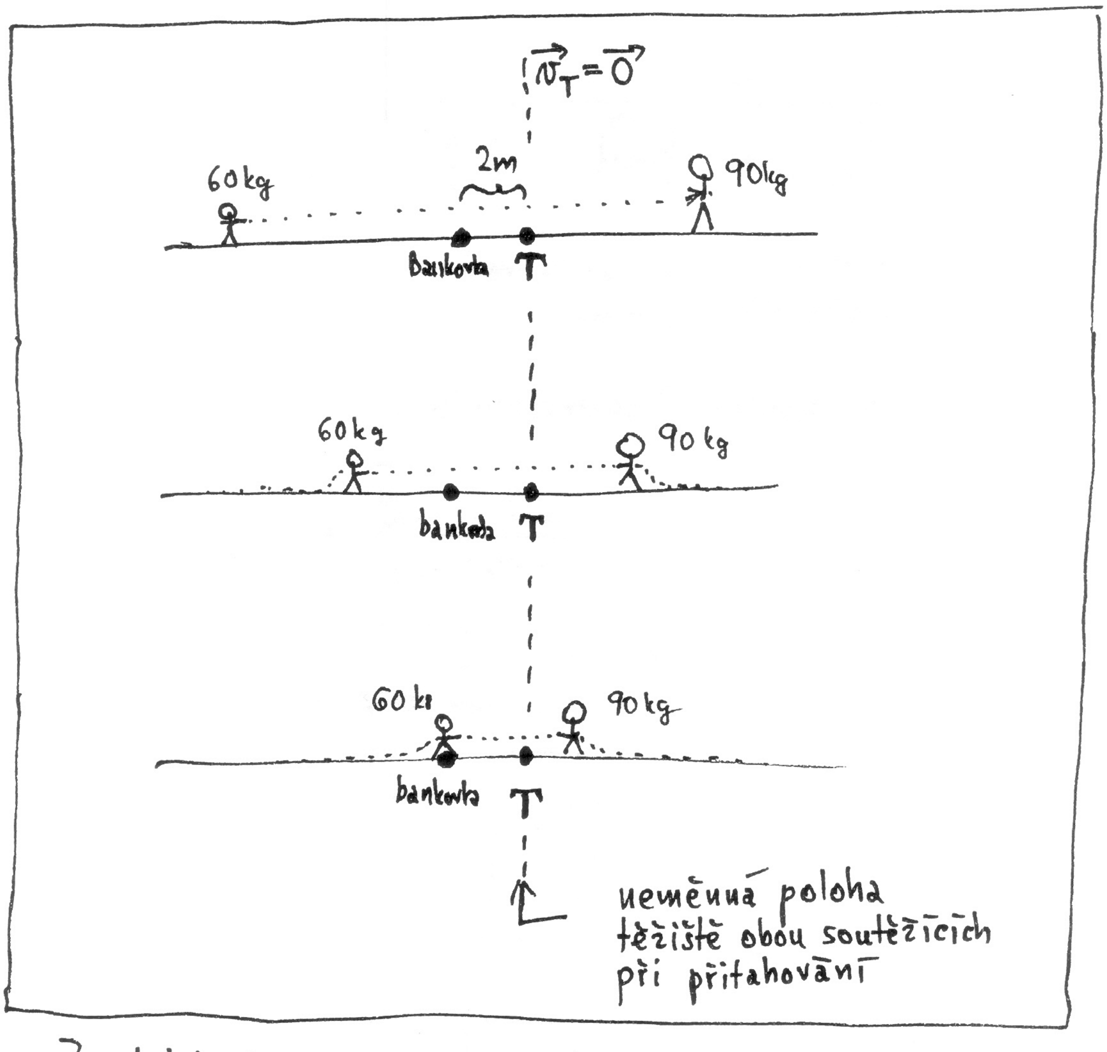
těžiště izolovaného systému se pohybuje buď rovnoměrně přímočaře (když $\overrightarrow{konst} \neq \vec{0}$) nebo je v klidu (když $\overrightarrow{konst} = \vec{0}$).

věta o pohybu těžiště izolovaného systému.

V našem případě jsou oba soutěžící na počátku v klidu, což znamená, že $\vec{P}_{celk} = \underbrace{\vec{O}}_{\overrightarrow{konst}}$, takže podle (3)

$$\boxed{\text{těžiště obou soutěžících zůstane v klidu stále, bez ohledu na to, začnou-li se oni sami vůči sobě nějak pohybovat.}} \quad (4)$$

Při přitahování obou soutěžících lanem tedy situace vypadá na základě (4) postupně takto:



(5)

Z obrázku je zřejmé, že těžší soutěžící se k bankovce nikdy nedostane, což znamená, že bez ohledu na sílu a výkonnost vyhraje vždy lehčí soutěžící.

Problém č. 4

Mezi dvěma objekty o hmotnostech m_1 a m_2, pohybujícími se rychlostmi $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$, dojde při absenci vnějšího silového působení k centrální nepružné srážce, při níž se část kinetické energie obou objektů přemění na jejich vnitřní energii.
Určete, jaký musí být vztah mezi rychlostmi $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$, aby přírůstek vnitřní energie po srážce byl maximální.

Řešení: Při centrální nepružné srážce se oba objekty spojí v jediný objekt o hmotnosti (m_1+m_2), jehož rychlost označme $\vec{v}$.
Absence vnějšího silového působení znamená, že systém uvažovaných objektů je izolovaný. Podle věty o pohybu těžiště izolovaného systému (viz problém č. 3) se těžiště našich 2 objektů pohybuje před i po srážce toutéž konstantní rychlostí.
Rychlost těžiště objektů před srážkou je dle definice:

$$\boxed{\vec{v}_T = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}} \quad (1)$$

Rychlost těžiště týchž objektů po srážce je:

$$\boxed{\vec{v}_T{}' = \vec{v}} \quad , \quad \ldots (2)$$

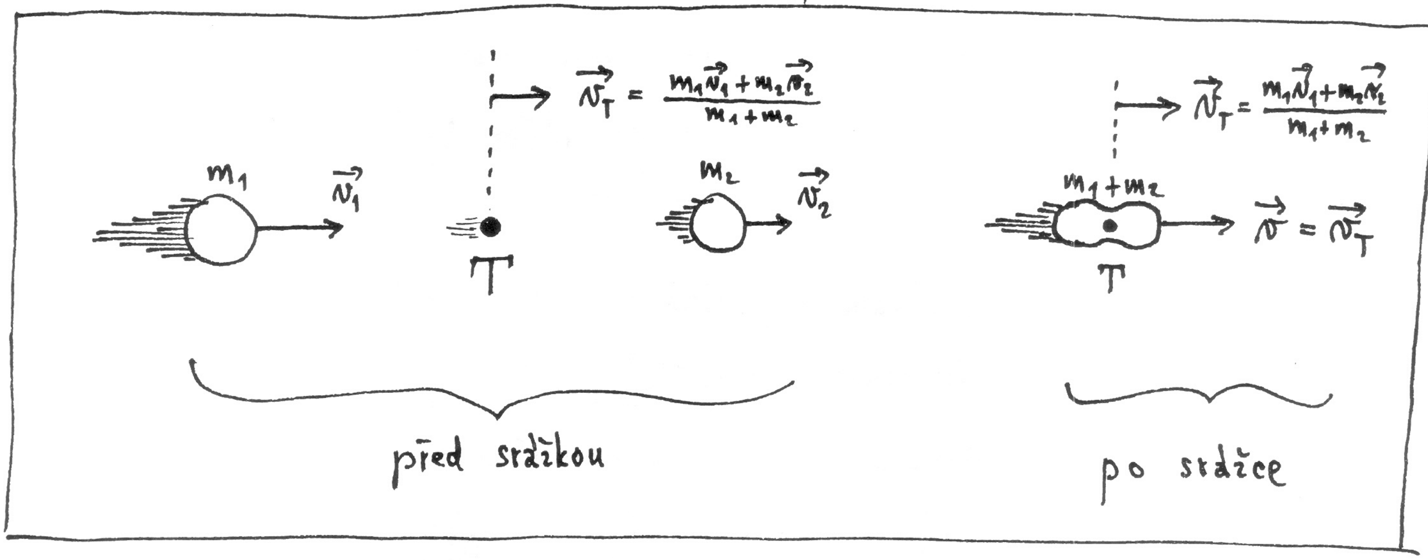
neboť oba objekty se spojily v jediný objekt, pohybující se rychlostí $\vec{v}$.
Věta o pohybu těžiště izolovaného systému požaduje, aby platilo:

$$\boxed{\vec{v}_T{}' = \vec{v}_T} \quad \ldots (3)$$

Dosadíme-li do podmínky (3) výrazy (2) a (1), máme:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}} \quad (4)$$

Popsanou situaci můžeme schématicky znázornit takto:



* * * * *

Místo <u>věty o pohybu těžiště izolovaného systému</u> lze použít i její ekvivalentní formulaci – <u>zákon zachování celkové hybnosti izolovaného systému</u> (opět viz problém č. 3), který říká, že celková hybnost izolovaného systému <u>před</u> a <u>po</u> srážce musí být <u>stejná</u>.

Celková hybnost našich objektů <u>před</u> srážkou je:

$$\boxed{\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2} . \quad (5)$$

Celková hybnost týchž objektů <u>po</u> srážce je:

$$\boxed{\vec{p}\,' = (m_1 + m_2)\,\vec{v}} . \quad \ldots (6)$$

Zákon zachování celkové hybnosti izolovaného systému požaduje, aby platilo:

$$\boxed{\vec{p}\,' = \vec{p}} . \quad \ldots (7)$$

Dosadíme-li do podmínky (7) vztahy (6) a (5), dostaneme:

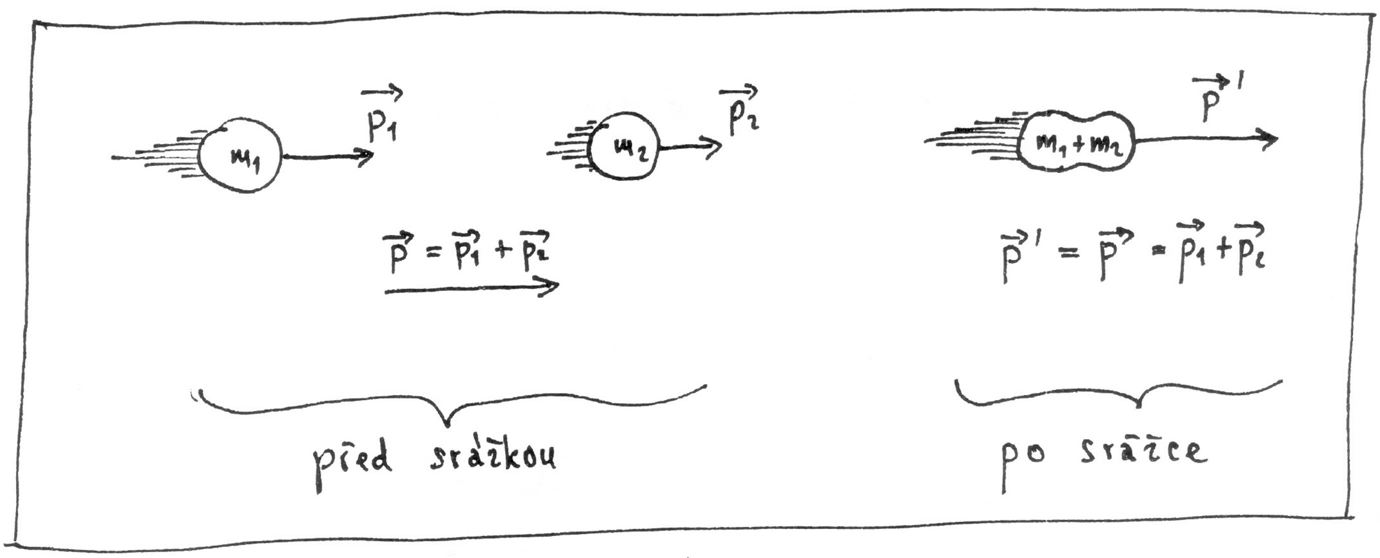
$$\boxed{(m_1+m_2)\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2} \qquad (8)$$

$$\Downarrow$$

$$!\quad \boxed{\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}} \quad ! \qquad (9)$$

což je výsledek <u>shodný se vztahem (4)</u>.

Průběh srážky na základě zákona zachování celkové hybnosti izolovaného systému můžeme schematicky znázornit takto:



Z výše uvedeného je zřejmé, že ať už pro izolovaný systém použijeme větu o pohybu těžiště nebo zákon zachování celkové hybnosti, obojí vede k <u>témuž výsledku</u> pro rychlost $\underline{\underline{\vec{v}}}$ spojených objektů po srážce (viz vztahy (4) a (9)).

* * * * *

Nyní přistoupíme k určení <u>přírůstku vnitřní energie ΔE_v</u> uvažovaných objektů v důsledku jejich nepružné srážky.

Kinetická energie objektů <u>před</u> srážkou je :

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2} \qquad (10)$$

Kinetická energie týchž objektů <u>po</u> srážce je :

$$\underline{\underline{E_k'}} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)(\vec{v})^2 \underset{\substack{\uparrow \\ (4)\ \text{resp.}(9)}}{=} \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}\right)^2 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)^2}{2(m_1+m_2)}}} \qquad (11)$$

<u>Přírůstek vnitřní energie ΔE_v</u> je dán <u>rozdílem</u> těchto kinetických energií:

$$\boxed{\Delta E_v = E_k - E_k'} \quad \ldots \quad (12)$$

Tento přírůstek vnitřní energie se projeví např. jako <u>deformace</u> či <u>zahřátí</u> objektů, ale je-li dostatečně velký, může se dokonce <u>materializovat (zhmotnit) ve formě nově vzniklých objektů</u>. To je jeden z pozoruhodných důsledků speciální teorie relativity, se kterým se blíže seznámíme v příštím semináři.

Dosadíme-li nyní vztahy (10) a (11) do výrazu (12), dostaneme :

$$! \quad \boxed{\Delta E_v = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)^2}{2(m_1+m_2)}} \quad ! \qquad (13)$$

Vztah (13) představuje obecné vyjádření přírůstku vnitřní energie při nepružné srážce 2 objektů s hmotnostmi m_1 a m_2, pohybujícími se rychlostmi $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$.

Pravá strana vztahu (13) nabývá své maximální hodnoty zřejmě tehdy, když

$$\boxed{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0}} \qquad (14)$$

$$\Downarrow$$

$$!\ \boxed{\vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1}\ ! \qquad (15)$$

což je hledaný vztah mezi rychlostmi $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$.

Příslušná maximální hodnota ΔE_v^{max} pak podle (13) je:

$$\boxed{\Delta E_v^{max} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = E_k} \qquad (16)$$

tj. na přírůstek vnitřní energie systému se spotřebuje veškerá kinetická energie objektů před srážkou.

To ovšem znamená, že po srážce se oba objekty, spojené v jeden celek, zcela zastaví.

Podle věty o pohybu těžiště izolovaného systému z toho dále plyne, že v klidu muselo být i těžiště obou objektů před srážkou.

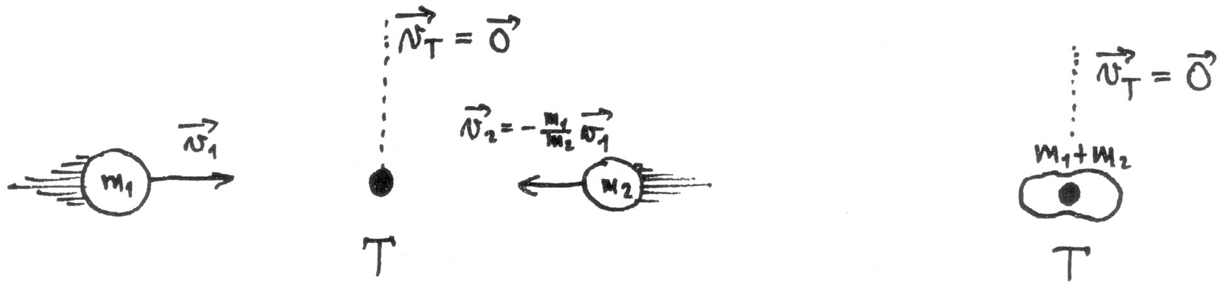
O tom se můžeme přesvědčit i přímo, dosadíme-li výsledek (15) do výrazu (1) pro rychlost těžiště před srážkou:

$$\boxed{\vec{v}_T = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\left(-\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1\right)}{m_1+m_2} = \frac{m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2} = \vec{0}} \qquad (17)$$

ZÁVĚR :

Z výše provedeného rozboru je zřejmé, že maximálního přírůstku vnitřní energie při nepružné srážce 2 objektů lze dosáhnout tehdy, když oba objekty se pohybují proti sobě rychlostmi $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1$ (viz (15)), což odpovídá tomu, že jejich těžiště se nachází v klidu, nebo ekvivalentně, jejich celková hybnost je nulová.

V takovém případě se na vnitřní energii přemění veškerá kinetická energie objektů ($\Delta E_v^{max} = E_k$).



$\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$

$$\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2 = m_2\left(-\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1\right) = -m_1\vec{v}_1 = -\vec{p}_1$$

v klidu

$$\vec{P}_{celk} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1 + (-\vec{p}_1) = \vec{0}$$

$$\vec{P}_{celk} = (m_1+m_2)\underbrace{\vec{v}_T}_{\vec{0}} = \vec{0}$$

Poznámka : Pokud výše uvedený vztah $\vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_1$ mezi rychlostmi objektů splněn není (např. když se pohybuje jen 1 objekt a druhý je v klidu), přemění se na vnitřní energii podle (12) a (11) jen část původní kinetické energie objektů :

$$\boxed{\Delta E_v = (E_k - \underbrace{E_k'}_{>0}) < E_k} \qquad (18)$$

;

E_k' přitom představuje kinetickou energii spojených objektů po srážce, nebo ekvivalentně, kinetickou energii těžiště obou objektů .

SEMINÁŘ Č. 3

Pátý a šestý výukový týden

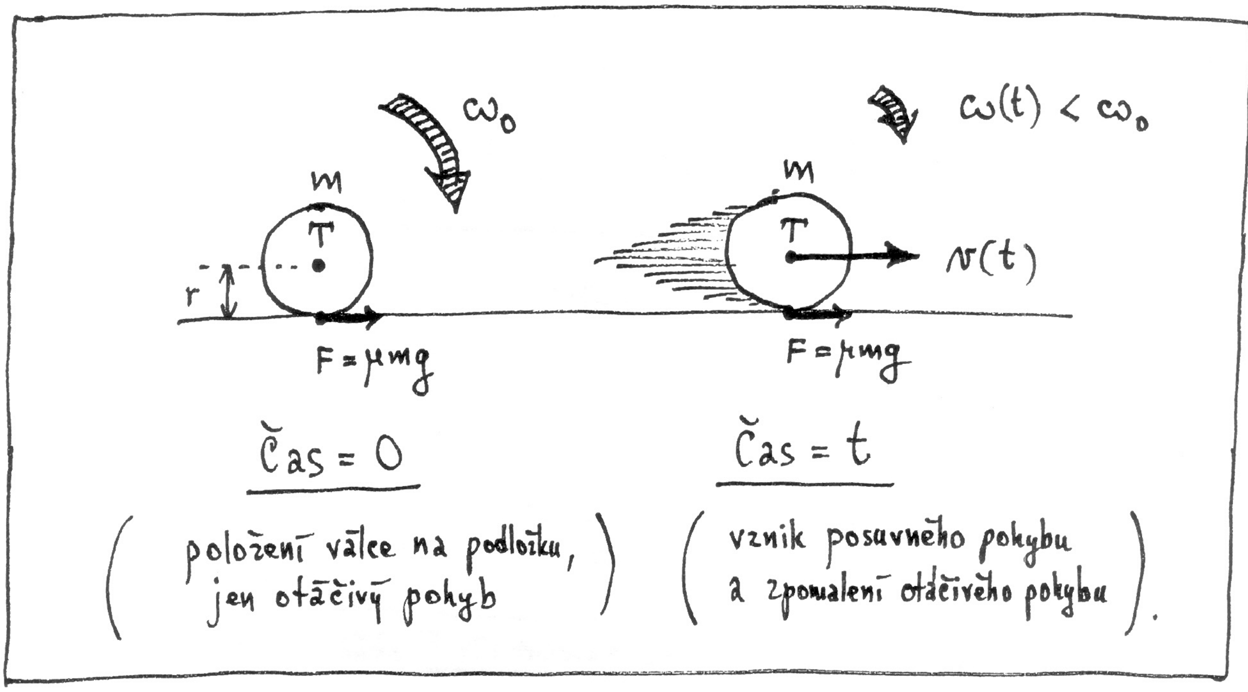
Problém č. 1

Válec o hmotnosti $m = 1\,kg$ a poloměru $r = 10\,cm$ je roztočen kolem své podélné osy úhlovou rychlostí $\omega_0 = 120\ s^{-1}$ a položen na drsnou vodorovnou podložku. Účinkem smykového tření, jehož koeficient má hodnotu $\mu = 0.2$, se válec uvede do zrychleného posuvného pohybu a současně začne být brzděn ve svém pohybu otáčivém.

a) Určete dobu, za kterou válec přejde do čistého valivého pohybu bez prokluzování.

b) Zjistěte, jaká část původní kinetické energie válce se přitom spotřebuje na překonání tření.

Řešení: a) Pohyb válce po podložce vypadá následovně:



OBR. 1

Pro posuvný pohyb těžiště platí:

$$\boxed{F = m \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\left(v(t)\right)}_{\text{posuvné zrychlení}}} \quad (1)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(v(t)\right) = \frac{F}{m} = \frac{\mu m g}{m} = \mu g} \quad (2)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{v(t) = \int \mu g \, dt = \mu g \cdot \int 1 dt = \mu g \cdot (t + C_1)} \quad (3)$$

V čase $t=0$ je rychlost posuvného pohybu nulová, tj. $v(0) = 0$.
Dosazením této podmínky do (3) máme:

$$0 = \mu g \cdot (0 + C_1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_1 = 0} \quad ..(4)$$

Dosazením (4) do (3) máme pro rychlost posuvného pohybu v čase t:

$$! \; \boxed{v(t) = \mu g \cdot t} \; ! \quad (5)$$

Pro otáčivý pohyb válce kolem těžiště platí:

$$\boxed{\underbrace{F \cdot r}_{\text{moment síly } F \text{ vůči těžišti}} = -J \cdot \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\omega(t)\right)}_{\text{úhlové zrychlení}} \qquad J = \frac{1}{2} m r^2 \; \dots \text{ moment setrvačnosti válce}} \quad (6)$$

Znaménko $\ominus$ vyjadřuje skutečnost, že moment síly F otáčení brzdí (viz obr. 1).

Z rovnice (6) postupně dostáváme:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\omega(t)\right) = -\frac{F.r}{J} = -\frac{\mu m g . r}{\frac{1}{2} m r^2} = -\frac{2\mu g}{r}} \quad (7)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega(t) = \int\left(-\frac{2\mu g}{r}\right)dt = \left(-\frac{2\mu g}{r}\right).\int 1 dt = \left(-\frac{2\mu g}{r}\right).\left(t + C_2\right)} \quad (8)$$

V čase $t=0$ je úhlová rychlost otáčení válce rovna ω_0, tj. $\omega(0) = \omega_0$.
Dosazením této podmínky do (8) dostáváme:

$$\omega_0 = \left(-\frac{2\mu g}{r}\right).\left(0 + C_2\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_2 = -\frac{r\omega_0}{2\mu g}} \quad (9)$$

Dosazením (9) do (8) máme:

$$\boxed{\omega(t) = \left(-\frac{2\mu g}{r}\right).\left(t - \frac{r\omega_0}{2\mu g}\right) = -\frac{2\mu g}{r}.t + \underbrace{\frac{2\mu g}{r}.\frac{r\omega_0}{2\mu g}}_{\omega_0}} \quad (10)$$

takže úhlová rychlost otáčivého pohybu v čase t je:

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0 - \frac{2\mu g}{r}.t} \quad (11)$$

K čistému valivému pohybu bez prokluzování dojde tehdy, když mezi rychlostí posuvného pohybu $v(t)$ a úhlovou rychlostí otáčivého pohybu $\omega(t)$ bude platit vztah

$$\boxed{v(t) = r.\omega(t)} \quad (12)$$

vyjadřující skutečnost, že při valivém pohybu se rychlost těžiště rovná obvodové rychlosti bodů na povrchu válce.

Dosadíme-li do (12) za $\underline{\underline{v(t)}}$ podle (5) a za $\underline{\underline{\omega(t)}}$ podle (11), dostaneme rovnici:

$$\boxed{\mu g t = r\cdot\left(\omega_0 - \frac{2\mu g}{r}t\right)} \qquad (13)$$

$$\Downarrow$$

$$\mu g t = r\omega_0 - 2\mu g t$$

$$\Downarrow$$

$$3\mu g t = r\omega_0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{t = \frac{r\omega_0}{3\mu g}}, \qquad (14)$$

což je hledaný časový okamžik, v němž se pohyb válce stane čistým valením bez prokluzování.

Číselně:

$$\boxed{\underline{\underline{t}} = \frac{10^{-1}[m]\cdot 120\,[s^{-1}]}{3\cdot 0{,}2\cdot 10\,[ms^{-2}]} = \underline{\underline{2\,[s]}}} \qquad (15)$$

Užitím výsledku (14) dále dopočteme podle (5) a (11):

$$\boxed{\underbrace{v\left(t=\frac{r\omega_0}{3\mu g}\right)}_{\text{označme } \underline{\underline{v}}} = \mu g\cdot\frac{r\omega_0}{3\mu g} = \underline{\underline{\frac{1}{3}r\omega_0}}} \qquad (16)$$

,

$$\boxed{\underbrace{\omega\left(t=\frac{r\omega_0}{3\mu g}\right)}_{\text{označme } \underline{\underline{\omega}}} = \omega_0 - \frac{2\mu g}{r}\cdot\frac{r\omega_0}{3\mu g} = \omega_0 - \frac{2}{3}\omega_0 = \underline{\underline{\frac{1}{3}\omega_0}}} \qquad (17)$$

.

Porovnáním (16) a (17) explicite vidíme, že

$$\boxed{v = r\cdot\omega} \qquad (18)$$

.

b) Kinetická energie válce v čase $t=0$, kdy je položen na podložku, je:

$$\boxed{\underline{\underline{E_k}} = \frac{1}{2}J\omega_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mr^2\cdot\omega_0^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4}mr^2\omega_0^2}}} \qquad (19)$$

Kinetická energie válce v čase $t = \frac{\omega_0 r}{3\mu g} = 2\,[s]$, kdy se začne pohybovat čistým valením bez prokluzování, je:

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\underline{E_k'}} &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}m\Big(\underbrace{\tfrac{1}{3}\omega_0 r}_{(16)}\Big)^2 + \frac{1}{2}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{2}mr^2}_{J}\cdot\Big(\underbrace{\tfrac{1}{3}\omega_0}_{(17)}\Big)^2 = \\ &= \frac{1}{18}mr^2\omega_0^2 + \frac{1}{36}mr^2\omega_0^2 = \frac{2+1}{36}mr^2\omega_0^2 = \underline{\underline{\frac{1}{12}mr^2\omega_0^2}}\end{aligned}} \qquad (20)$$

Z (19) a (20) vidíme, že $\underline{\underline{E_k' < E_k}}$. Rozdíl $\underline{\Delta E_v = E_k - E_k'}$, představující přírůstek vnitřní energie, se v daném konkrétním případě přemění na tepelnou energii ztracenou třením.
S využitím vztahů (19) a (20) tedy máme:

$$\boxed{\underline{\underline{E_{tření}}} = \Delta E_v = E_k - E_{k'} = \frac{1}{4}mr^2\omega_0^2 - \frac{1}{12}mr^2\omega_0^2 = \underline{\underline{\frac{1}{6}mr^2\omega_0^2}}} \qquad (21)$$

Vydělíme-li vztah (21) vztahem (19), dostaneme:

$$\boxed{\frac{E_{tření}}{E_k} = \frac{\frac{1}{6}mr^2\omega_0^2}{\frac{1}{4}mr^2\omega_0^2} = \frac{2}{3}} \qquad (22)$$

$$\Downarrow$$

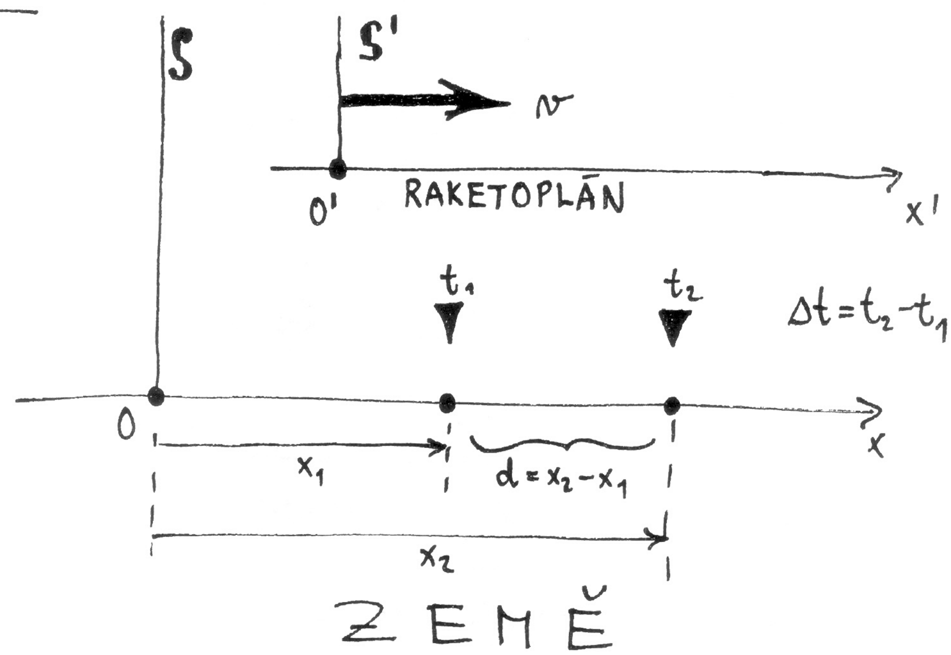
$$! \quad \boxed{E_{tření} = \frac{2}{3}E_k} \quad ! \qquad (23)$$

Na překonání tření se tedy spotřebují $2/3$ původní kinetické energie válce.

Problém č. 2

Na dvou místech Země, vzdálených od sebe o délku $d = 900\,km$, byly odpáleny 2 nálože ve vzájemném časovém odstupu $\Delta t = 10\,\mu s$. V jakém vzájemném časovém odstupu zaznamená oba výbuchy pozorovatel v raketoplánu letícím nad Zemí rychlostí $v = 10^6\ ms^{-1}$?

Řešení:



Pro časové okamžiky t_1', t_2', ve kterých byly výbuchy zaregistrovány v inerciálním souřadném systému S' pevně spojeném s raketoplánem letícím rychlostí v vůči Zemi, platí podle Lorentzovy transformace:

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad ; \quad t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (1)$$

Pro vzájemný časový odstup $\Delta t'$ obou výbuchů, registrovaný v systému S', tedy máme:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{\left(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2\right) - \left(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2)$$

Čitatele výrazu (2) upravíme dále takto:

$$\boxed{\left(t_2-\frac{v}{c^2}x_2\right)-\left(t_1-\frac{v}{c^2}x_1\right)=\underbrace{(t_2-t_1)}_{\Delta t}-\frac{v}{c^2}\underbrace{(x_2-x_1)}_{d}=\underline{\underline{\Delta t-\frac{v}{c^2}d}}} \quad (3)$$

Dosazením (3) do (2) dostaneme:

$$\boxed{\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}d}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \quad ! \quad (4)$$

Pro zadané číselné hodnoty $d = 9\times10^5$ m

$\Delta t = 10^{-5}$ s

$v = 10^6$ ms^{-1}

a známou konstantu $c = 3\times10^8$ ms^{-1} dostáváme ze vztahu (4):

$$\boxed{\underline{\underline{\Delta t'}} = \frac{\left(10^{-5} - \frac{10^6 \cdot 9 \cdot 10^5}{(3\cdot10^8)^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{10^6}{3\cdot10^8}\right)^2}} = \frac{(10^{-5}-10^{-5})}{\sqrt{\ldots}} = \underline{\underline{0}}} \quad ! \quad (5)$$

Oba výbuchy budou tedy z letícího raketoplánu zaznamenány jako <u>SOUČASNÉ</u>.

* * * * * *

<u>Problém č. 3</u>

Ve výšce <u>10 km</u> nad hladinou moře se v atmosféře vytvářejí nestabilní částice s dobou života $\underline{\Delta t_{\check{c}} = 2\times10^{-6}\text{ s}}$. Typická rychlost těchto částic vůči Zemi je $\underline{v = 2.994\times10^8 \text{ ms}^{-1}}$.

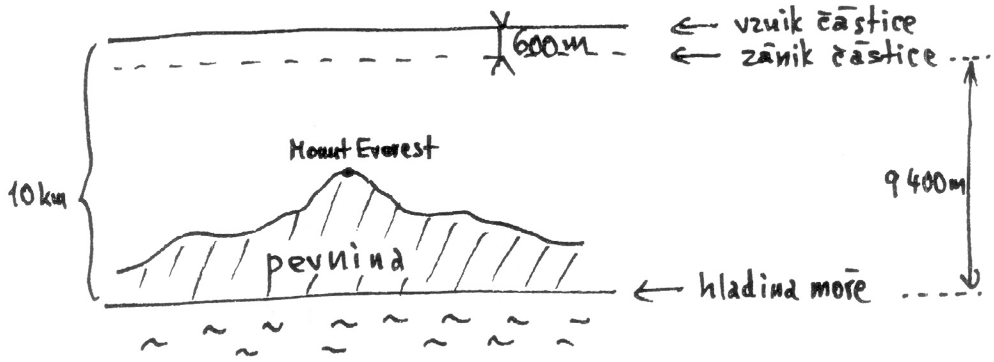
a) Určete, ve kterých místech na pevnině lze tyto částice registrovat.

b) Najděte hodnotu prostoročasového intervalu vzniku a zániku jedné částice
- v inerciálním souřadném systému spojeném se Zemí;
- v inerciálním souřadném systému spojeném s částicí.

Řešení : a) Doba života částice ..... $\Delta t_{\check{c}} = 2\times10^{-6}\,s$

Rychlost částice ..... $v = 2.994\times10^{8}\,ms^{-1}$

Očekávaná dráha uražená částicí vůči Zemi .... $v\Delta t_{\check{c}} \cong \underline{\underline{600\,m}}$ (1)



(2)

Na první pohled se tedy zdá, že částice nelze zaregistrovat v žádném místě na pevnině, neboť zaniknou ve výšce 9 400 m nad hladinou moře, kam žádná pevnina nedosahuje.

Avšak částice se pohybují obrovskou rychlostí vůči Zemi ($v \cong 0.998c$), takže jejich vlastní doba života $\Delta t_{\check{c}}$ se v důsledku dilatace času jeví na Zemi jako :

$$\boxed{\underline{\underline{\Delta t_Z}} = \frac{\Delta t_{\check{c}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2\times10^{-6}\,[s]}{0.0625} = \underline{\underline{32\times10^{-6}\,[s]}} = \underline{\underline{16.\Delta t_{\check{c}}}}} \quad (3)$$

31,6386 . 10⁻⁶ s

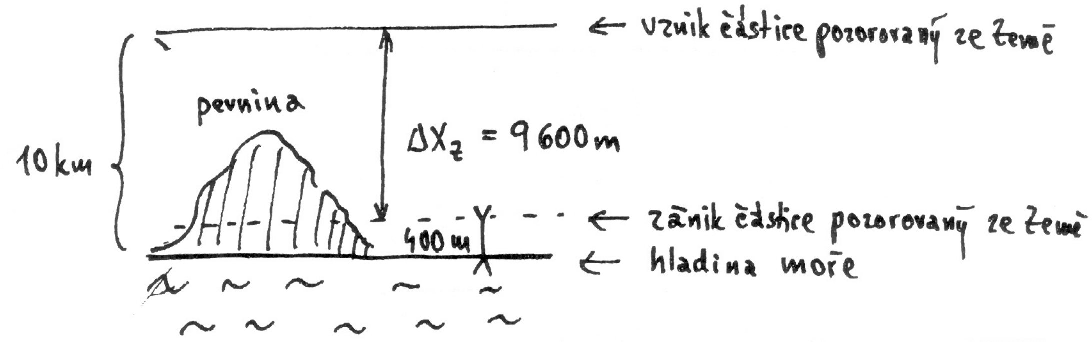
tedy 16x delší .

Za dobu $\underline{\underline{\Delta t_Z}}$, danou výrazem (3), však částice vzhledem k Zemi urazí dráhu :

$$\boxed{\underline{\underline{\Delta X_Z}} = v.\Delta t_Z = 2.994\times10^{8}\,[ms^{-1}].\,32\times10^{-6}\,[s] = \underline{\underline{9\,600\,[m]}}} \quad (4)$$

9472,6 m

Nahlíženo ze Země, vypadá tedy vznik a zánik částice následovně :



! Částice tedy mohou být registrovány kdekoli na pevnině s nadmořskou výškou ≥ 400 m. ! (5)

b) Prostoročasový interval 2 událostí (v daném případě vzniku a zániku jedné částice) je dán vztahem:

$$\boxed{\Delta S = \sqrt{(c.\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}} \qquad (6)$$

V inerciálním souřadném systému spjatém se Zemí máme:

$$\Delta t = \Delta t_z = 32 \times 10^{-6}\ [s] \quad (\text{viz } (3))$$

$$\Delta x = \Delta x_z = 9\,600\ [m] \quad (\text{viz } (4)),$$

takže

! $$\Delta S_z = \sqrt{(c.\Delta t_z)^2 - (\Delta x_z)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(3\times10^{8}\,[ms^{-1}] . 32\times10^{-6}\,[s]\right)^2 - \left(9{,}6\times10^{3}\,[m]\right)^2} \cong 615\ [m] ??$$

5999,5 m

0 ! (7)

V inerciálním souřadném systému spjatém s částicí platí:

$$\Delta t = \Delta t_č = 2\times10^{-6}\ [s] \quad (\text{viz } (1))$$

$$\Delta x = \Delta x_č = 0\ [m]$$ (neboť částice vůči sobě samé neurazí žádnou dráhu).

Dostáváme tak :

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta s_{\check{c}} &= \sqrt{(c.\Delta t_{\check{c}})^2 - (\Delta x_{\check{c}})^2} = \\ &= \sqrt{\left(3\times 10^{8}[ms^{-1}].2\times 10^{-6}[s]\right)^2 - (0)^2} = \underline{\underline{600\,[m]}}\end{aligned}} \quad ! \qquad (8)$$

Porovnáme-li výsledky (7) a (8), vidíme, že se liší o $\underline{\underline{15\,m}}$, což představuje relativní chybu $\underline{\underline{2{,}5\,\%}}$ $\left(\frac{15}{600} = 0.025\right)$. Můžeme tedy konstatovat, že

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta s_z \cong \Delta s_{\check{c}} \\ \text{s chybou } 2.5\%\end{gathered}} \qquad (9)$$

Jelikož však při výpočtu (7) jsme pracovali se zaokrouhlenými čísly, je docela dobře možné, že chyba 2.5% vznikla jako důsledek tohoto zaokrouhlení, a vztah $\Delta s_z = \Delta s_{\check{c}}$ platí z fyzikálního hlediska přesně. Zjistíme to tak, že do obecné části vztahu (7), tj.

$$\Delta s_z = \sqrt{(c.\Delta t_z)^2 - (\Delta x_z)^2}$$

dosadíme za $\underline{\underline{\Delta x_z}}$ a $\underline{\underline{\Delta t_z}}$ obecné části vztahů (4) a (3), tj.

$$\Delta x_z = v.\Delta t_z \quad ; \qquad \Delta t_z = \frac{\Delta t_{\check{c}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} .$$

Postupně tak dostáváme :

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{\underline{\Delta s_z}} &= \sqrt{(c.\Delta t_z)^2 - (\underbrace{v.\Delta t_z}_{\Delta x_z})^2} = \sqrt{(\Delta t_z)^2(c^2 - v^2)} = \\ &= \Delta t_z . \sqrt{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \underbrace{\frac{\Delta t_{\check{c}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\Delta t_z} . c . \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \\ &= c.\Delta t_{\check{c}} . \underbrace{\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{1} = \underline{\underline{c\,\Delta t_{\check{c}}}}\end{aligned}} \qquad (10)$$

Na druhé straně, z obecné části vztahu (8) pro $\underline{\Delta S_{č}}$ máme:

$$\boxed{\underline{\underline{\Delta S_{č}}} = \sqrt{(c.\Delta t_{č})^2 - (\underbrace{\Delta x_{č}}_{0})^2} = \sqrt{(c.\Delta t_{č})^2} = \underline{\underline{c.\Delta t_{č}}}} \quad (11)$$

Porovnáme-li levé a pravé strany vztahů (10) a (11), dostáváme:

$$\boxed{\Delta S_Z = \Delta S_{č}} \quad (12)$$

tj. prostoročasový interval má v obou inerciálních souřadných systémech <u>přesně stejnou hodnotu</u>, a to <u>obecně</u>, bez ohledu na konkrétní číselné hodnoty. Chyba 2.5% v uvažovaném číselném případě je tedy jednoznačně důsledkem počítání se specifickými zaokrouhlenými čísly.

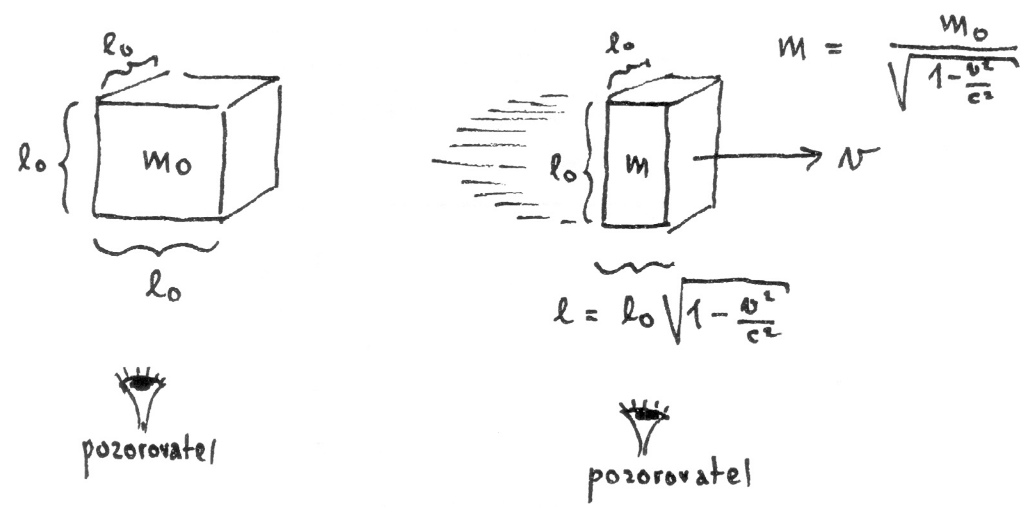
Závěrem poznamenejme, že vztah (12) je ilustrací obecného tvrzení z přednášky o <u>invariantnosti prostoročasového intervalu</u>, tj. jeho stejné hodnotě v různých inerciálních souř. systémech.

* * * * *

Problém č. 4

Krychle je vyrobena z materiálu o hustotě $\underline{\underline{\rho_0}}$. Jak se bude hustota krychle jevit pozorovateli, vůči němuž se krychle pohybuje rychlostí $v = \frac{1}{2}c$ (c... rychlost světla) ve směru jedné své hrany?

Řešení :



Je-li krychle vůči pozorovateli v klidu, má délku hrany l_0 a klidovou hmotnost m_0. Její hustota tedy je:

$$\boxed{\rho_0 = \frac{m_0}{l_0^3}} \qquad (1)$$

Při pohybu krychle ve směru 1 hrany rychlostí v zaznamená pozorovatel:

a) zkrácení (kontrakci) hrany ve směru pohybu na délku

$$\boxed{l = l_0 \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2) \quad ;$$

b) zvětšení hmotnosti krychle na hodnotu:

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \qquad (3) \quad .$$

Hustota pohybující se krychle vůči pozorovateli tedy je:

$$\boxed{\rho = \frac{m}{l \cdot l_0^2} = \frac{\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot l_0^2} = \underbrace{\frac{m_0}{l_0^3}}_{\rho_0} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} \qquad (4)$$

$$\Downarrow$$

$$! \quad \boxed{\rho = \frac{\rho_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad ! \qquad (5)$$

Číselně:

$$\boxed{\underline{\rho} = \frac{\rho_0}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\rho_0}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \underline{\frac{4}{3}\rho_0}} \quad ! \qquad (6)$$

SEMINÁŘ č. 4

Sedmý a osmý výukový týden

Problém č. 1

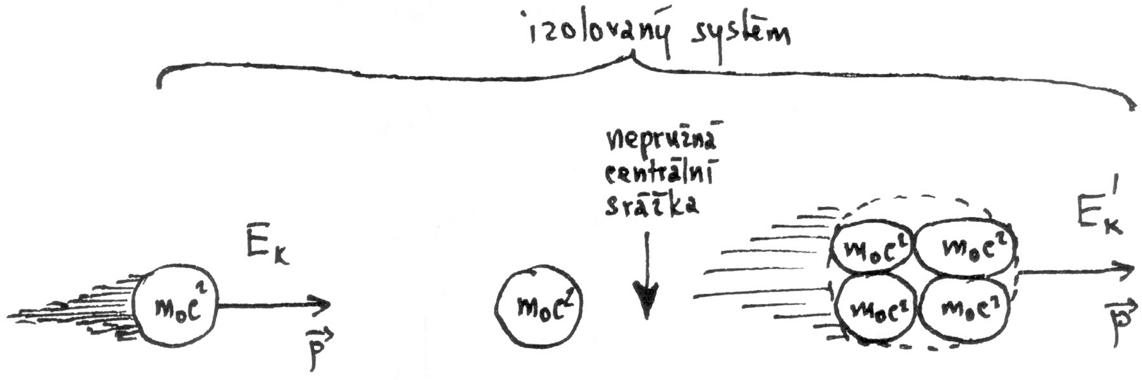
* řešit jinak

Částice o klidové hmotnosti $\underline{\underline{m_0}}$ nalétává na nepohybující se jinou částici o téže klidové hmotnosti $\underline{\underline{m_0}}$.

a) Určete minimální kinetickou energii, jakou musí mít letící částice, aby při její nepružné centrální srážce s nepohybující se částicí došlo ke vzniku <u>2 nových částic</u> o klidové hmotnosti $\underline{\underline{m_0}}$.

b) Najděte hodnotu $\underline{\Delta_1}$ energo-hybnostního intervalu obou srážejících se částic v inerciálním souřadném systému spojeném s klidnou částicí (= ISS 1) a porovnejte ji s hodnotou $\underline{\Delta_2}$ energo-hybnostního intervalu vzniklého konglomerátu 4 částic v inerciálním souřadném systému spojeném s tímto konglomerátem (= ISS 2).

Řešení: a)



OBR. 1

letící částice

klidová energie .... m_0c^2
hybnost ..... $\vec{p}$
kinetická energie .... E_k

stojící částice

klidová energie .... m_0c^2
hybnost ..... $\vec{0}$
kinetická energie ... 0

konglomerát 2 původních a 2 nově vzniklých částic

klidová energie ..... $4m_0c^2$
hybnost .... $\vec{p}\,'$
kinetická energie ..... E_k'

Jak víme z problému č. 4 v semináři č. 2, při centrální nepružné srážce se část původní kinetické energie systému přeměňuje na energii vnitřní. Vzniká tak přírůstek vnitřní energie

$$\boxed{\Delta E_v = E_k - E_k'} \quad , \qquad (1)$$

který se při dostatečné velikosti může i materializovat (zhmotnit) ve formě nově vzniklých objektů.

Nyní, když už známe relativistický vztah $E = mc^2$, vyjadřující ekvivalenci energie a hmotnosti, můžeme pojem "dostatečná velikost" blíže specifikovat v tom smyslu, že

$$\boxed{\text{přírůstek vnitřní energie musí pokrýt alespoň klidovou energii nově vzniklých objektů}} \quad . \qquad (2)$$

V uvažovaném případě mají vzniknout dvě nové částice, každá o klidové hmotnosti m_0, takže jejich celková klidová energie je $2m_0c^2$.

Podle (2) musí tedy přírůstek vnitřní energie ΔE_v splňovat podmínku:

$$\boxed{\Delta E_v \geqq 2m_0c^2} \quad . \qquad (3)$$

Z podmínek zadání je zřejmé, že se zajímáme jen o minimální hodnotu ΔE_v. Požadujeme proto, aby ve vztahu (3) platila rovnost:

$$\boxed{\Delta E_v = 2m_0c^2} \quad . \qquad (4)$$

Dosadíme-li do levé strany (4) za ΔE_v podle (1), máme:

$$! \quad \boxed{E_k - E_k' = 2m_0c^2} \quad ! \qquad (5)$$

To je fundamentální rovnice pro řešení daného problému. Obsahuje však 2 neznámé (E_k, E_k'), takže musíme najít ještě další rovnici.

Za tím účelem vyjádříme kinetické energie $\underline{\underline{E_k}}$ a $\underline{\underline{E_k'}}$ pomocí hybností $\underline{\underline{\vec{p}}}$ a $\underline{\underline{\vec{p}\,'}}$ (viz obr. 1) a využijeme skutečnosti, že systém částic je izolovaný, tj. platí v něm zákon zachování celkové hybnosti:

$$\boxed{\underbrace{\vec{p} + \vec{0}}_{\substack{\text{celková hybnost}\\ \text{před srážkou}}} = \underbrace{\vec{p}\,'}_{\substack{\text{celková hybnost}\\ \text{po srážce}}}} \qquad (6)$$

Pro kinetickou energii $\underline{\underline{E_k}}$ máme dle definice:

$$\boxed{E_k = \underbrace{\sqrt{(m_0c^2)^2 + c^2(\vec{p})^2}}_{\substack{\text{celková energie částice o klidové}\\ \text{hmotnosti } m_0\text{, pohybující se}\\ \text{s hybností } \vec{p}}} - \underbrace{m_0c^2}_{\substack{\text{klidová}\\ \text{energie}\\ \text{částice}\\ \text{o klidové}\\ \text{hmotnosti } m_0}}} \qquad (7)$$

Analogicky pro kinetickou energii $\underline{\underline{E_k'}}$ dostáváme:

$$\boxed{E_k' = \underbrace{\sqrt{(4m_0c^2)^2 + c^2(\vec{p}\,')^2}}_{\substack{\text{celková energie konglomerátu 4 částic,}\\ \text{pohybujícího se s hybností } \vec{p}\,'}} - \underbrace{4m_0c^2}_{\substack{\text{klidová}\\ \text{energie}\\ \text{konglomerátu}\\ \text{4 částic}}}} \qquad (8)$$

Postupnou úpravou vztahu (7) máme:

$$E_k + m_0c^2 = \sqrt{(m_0c^2)^2 + c^2(\vec{p})^2}$$

$$(E_k + m_0c^2)^2 = (m_0c^2)^2 + c^2(\vec{p})^2$$

$$E_k^2 + 2E_k m_0c^2 + \cancel{(m_0c^2)^2} = \cancel{(m_0c^2)^2} + c^2(\vec{p})^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c^2(\vec{p})^2 = E_k(E_k + 2m_0c^2)} \quad . \qquad (9)$$

Analogickou úpravou vztahu (8) dostaneme:

$$E_k' + 4m_0c^2 = \sqrt{(4m_0c^2)^2 + c^2(\vec{p}\,')^2}$$

$$(E_k' + 4m_0c^2)^2 = (4m_0c^2)^2 + c^2(\vec{p}\,')^2$$

$$(E_k')^2 + 8E_k' m_0c^2 + \cancel{(4m_0c^2)^2} = \cancel{(4m_0c^2)^2} + c^2(\vec{p}\,')^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c^2(\vec{p}\,')^2 = E_k' \cdot (E_k' + 8m_0c^2)} \quad . \qquad (10)$$

Ze zákona zachování celkové hybnosti (6) plyne:

$$\boxed{(\vec{p})^2 = (\vec{p}\,')^2} \quad . \qquad (11)$$

Užitím (11) vidíme, že levé strany rovnic (9) a (10) se sobě rovnají. Musejí se proto rovnat i jejich pravé strany, tj.

$$! \quad \boxed{E_k(E_k + 2m_0c^2) = E_k'(E_k' + 8m_0c^2)} \quad ! \qquad (12)$$

To je hledaná 2. rovnice pro neznámé $\underline{\underline{E_k}}$ a $\underline{\underline{E_k'}}$.

Soustavu 2 rovnic (5) a (12) pro 2 neznámé $\underline{\underline{E_k}}$ a $\underline{\underline{E_k'}}$ nyní již snadno vyřešíme. Z rovnice (5) vyjádříme

$$\boxed{E_k' = E_k - 2m_0c^2} \qquad (13)$$

a dosadíme do (12) :

$$\boxed{E_k\left(E_k+2m_0c^2\right) = (\underbrace{E_k-2m_0c^2}_{E_k'})(\underbrace{E_k-2m_0c^2}_{E_k'}+8m_0c^2)}$$

$$\Downarrow$$

$$E_k\left(E_k+2m_0c^2\right) = \left(E_k-2m_0c^2\right)\left(E_k+6m_0c^2\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{E_k^2}+2E_km_0c^2 = \cancel{E_k^2}\underbrace{-2m_0c^2E_k+6m_0c^2E_k}_{+4m_0c^2E_k}-12\left(m_0c^2\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$2E_km_0c^2 = 4m_0c^2E_k-12\left(m_0c^2\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$12\left(m_0c^2\right)^2 = 2m_0c^2E_k$$

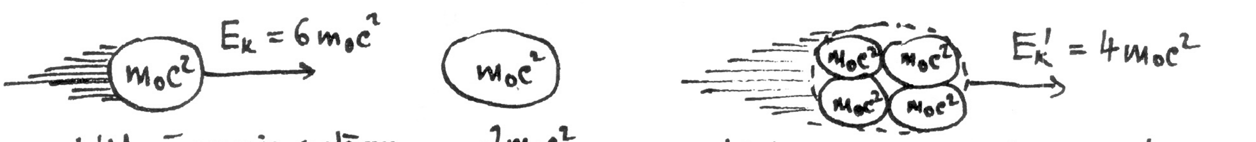
$$\Downarrow$$

$$! \quad \boxed{E_k = 6m_0c^2} \quad ! \qquad (14)$$

Z rovnice (13) dopočteme :

$$! \quad \boxed{E_k' = 6m_0c^2-2m_0c^2 = 4m_0c^2} \quad ! \qquad (15)$$

Celková energetická bilance uvažované srážky je tedy následující :



klidová energie systému ... $2m_0c^2$
kinetická energie systému .... $6m_0c^2$

celková energie systému ... $\underline{\underline{8m_0c^2}}$

klidová energie systému .... $4m_0c^2$
kinetická energie systému .... $4m_0c^2$

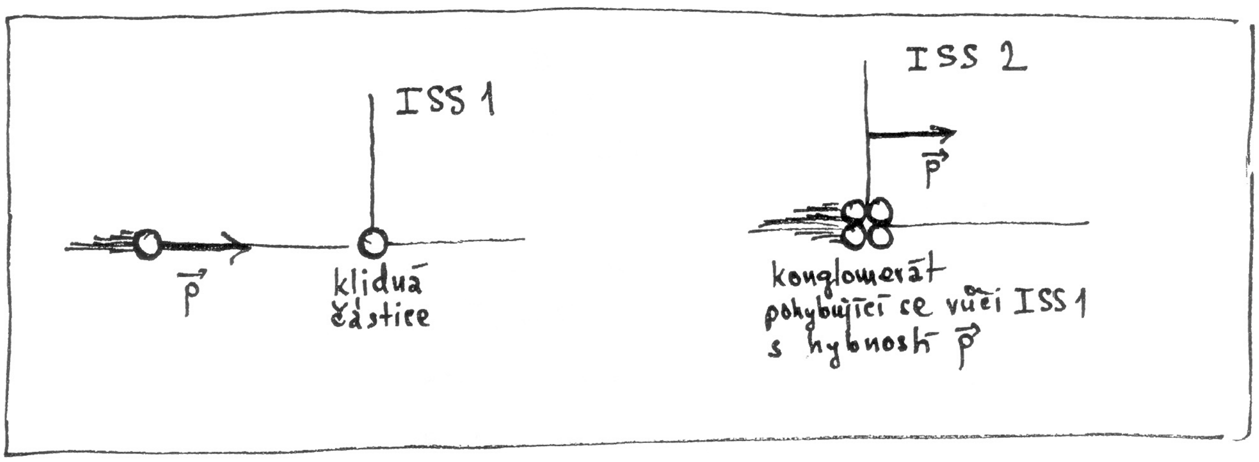
celková energie systému ... $\underline{\underline{8m_0c^2}}$

OBR. 2

Z obr. 2 vidíme, že celková energie systému (tj. součet klidové a kinetické energie) se při srážce zachovává. Dochází pouze k přerozdělení jednotlivých složek. Z původní kinetické energie $6m_0c^2$ se část ($=2m_0c^2$) přemění na klidovou energii nových částic, a zbytek ($=4m_0c^2$) se spotřebuje na kinetickou energii celého konglomerátu 2 původních a 2 nových částic. Je to typická ukázka situace zmíněné v závěru 4. problému semináře č. 2, kdy jedna z původních částic je v klidu a druhá se pohybuje, a nelze tak splnit podmínku maximální přeměny kinetické energie na energii vnitřní, tj. aby se veškerá kinetická energie původních objektů transformovala na vnitřní. Její určitá část musí zbýt na pohyb vzniklého konglomerátu, tj. na pohyb těžiště celého systému.

* * * * *

b) Nyní přejdeme k porovnání energo-hybnostního intervalu uvažovaného systému ve 2 inerciálních souřadných systémech dle zadání:



OBR. 3

Obecná definice energo-hybnostního intervalu je:

$$\boxed{\Delta \overset{\mathrm{def}}{=} E^2 - c^2(\vec{p})^2} \qquad (16)$$

kde E je celková energie systému a $\vec{p}$ jeho celková hybnost.

V ISS1 máme:

$$E_1 = \underbrace{\underbrace{\left(m_0c^2\right.}_{\substack{\text{klidová}\\ \text{energie}}} + \underbrace{\left.6m_0c^2\right)}_{\substack{\text{kinetická}\\ \text{energie}}}}_{\text{pohybující se částice}} + \underbrace{\underbrace{\left(m_0c^2\right.}_{\substack{\text{klidová}\\ \text{energie}}} + \underbrace{\left.0\right)}_{\substack{\text{kinet.}\\ \text{energie}}}}_{\text{částice v klidu}} = 8m_0c^2 \tag{17}$$

ve shodě s dříve provedenou energetickou bilancí srážky

$$\vec{p}_1 = \underbrace{\vec{p}}_{\substack{\text{hybnost}\\ \text{pohybující se}\\ \text{částice}}} + \underbrace{\vec{0}}_{\substack{\text{hybnost}\\ \text{částice}\\ \text{v klidu}}} = \vec{p}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\Delta_1 = E_1^2 - c^2(\vec{p}_1)^2 = (8m_0c^2)^2 - c^2(\vec{p})^2} \tag{18}$$

Veličinu $c^2(\vec{p})^2$ získáme z rovnice (9), kam za E_k dosadíme výsledek (14):

$$\boxed{c^2(\vec{p})^2 = \underbrace{6m_0c^2}_{E_k} \cdot (\underbrace{6m_0c^2}_{E_k} + 2m_0c^2) = 6m_0c^2 \cdot 8m_0c^2 = 48(m_0c^2)^2} \tag{19}$$

Dosazením vztahu (19) do výrazu (18) pak máme:

$$\boxed{\Delta_1 = 64(m_0c^2)^2 - 48(m_0c^2)^2 = 16(m_0c^2)^2} \tag{20}$$

Hodnota energo-hybnostního intervalu v ISS1 tedy je:

$$! \quad \boxed{\Delta_1 = 16(m_0c^2)^2} \quad ! \tag{21}$$

A nyní, jak to vypadá v <u>ISS 2</u> .

Tento souřadný systém je spjat s konglomerátem pohybujícím se vůči ISS 1.

<u>Vůči ISS 2</u> se tedy jednotlivé částice konglomerátu <u>nepohybují</u> .

Proto platí:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{E_2}} &= \underbrace{4m_0c^2}_{\substack{\text{klidová energie}\\ \text{4 částic tvořících}\\ \text{konglomerát}}} + \underbrace{0}_{\substack{\text{kinetická}\\ \text{energie}\\ \text{4 částic}\\ \text{vůči konglomerátu}}} = \underline{\underline{4m_0c^2}} \\ \vec{p_2} &= \underbrace{\vec{0}}_{\substack{\text{hybnost}\\ \text{4 částic}\\ \text{vůči}\\ \text{konglomerátu}}} \end{aligned}} \qquad (22)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underline{\underline{\Delta_2}} = E_2^2 - c^2(\vec{p_2})^2 = (4m_0c^2)^2 - c^2(\vec{0})^2 = \underline{\underline{16(m_0c^2)^2}}} \qquad (23)$$

Hodnota <u>energo-hybnostního intervalu v ISS 2</u> tedy je:

$$\boxed{\Delta_2 = 16(m_0c^2)^2} \qquad (24)$$

Porovnáním (21) a (24) vidíme, že

$$\boxed{\Delta_1 = \Delta_2}, \qquad (25)$$

tj. energo-hybnostní interval má <u>v obou ISS stejnou hodnotu</u> .

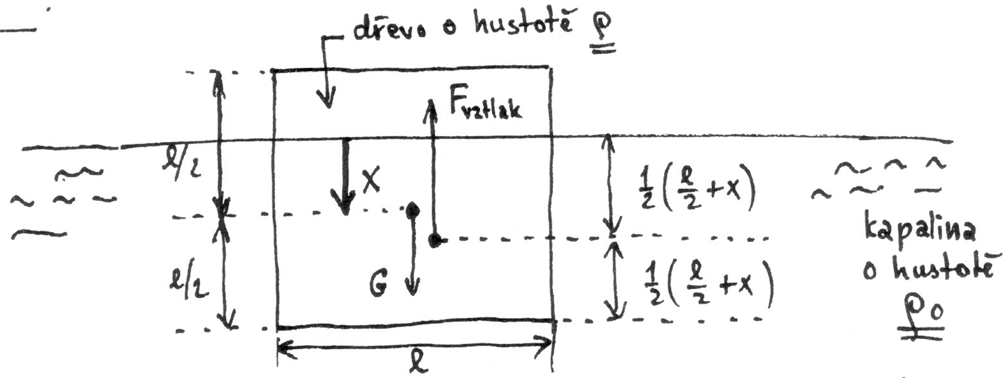
Tím jsme na konkrétním příkladu demonstrovali obecné tvrzení z přednášky o <u>invariantnosti energo-hybnostního intervalu</u> .

* * * *

Problém č. 2

Dřevěná krychle o hraně délky $\underline{\ell = 20\,\text{cm}}$ plove v neznámé kapalině tak, že je ponořena do poloviny svého objemu. Vychýlíme-li krychli z rovnovážné polohy, začne kolem ní konat oscilace.
Dokažte, že tyto oscilace jsou harmonické a najděte jejich frekvenci.

Řešení:



Uvažujme krychli vychýlenou z rovnovážné polohy o délku $\underline{x}$.
Celková síla působící na krychli ve směru zvolené orientace výchylky $\underline{x}$ je:

$$F(x) = G - F_{vztlak} = \underbrace{\ell^3 \rho}_{\text{hmotnost krychle}} g - \underbrace{\ell^2\left(\frac{\ell}{2}+x\right)\rho_0}_{\text{hmotnost vytlačené kapaliny}} g \qquad (1)$$

V rovnovážné poloze, tj. při výchylce $\underline{x = 0}$, musí být tato celková síla nulová;

$$\boxed{F(0) = 0} \qquad (2)$$

Dosazením (1) do (2) máme:

$$\boxed{\ell^3 \rho g - \ell^2\left(\frac{\ell}{2}+0\right)\rho_0 g = 0} \qquad (3)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\rho_0 = 2\rho} \qquad (4)$$

Dosazením (4) do (1) dále máme:

$$\underline{\underline{F(x)}} = l^3\rho g - l^2\left(\frac{l}{2}+x\right)\underbrace{2\rho}_{\rho_0} g = \underbrace{l^3\rho g - \underbrace{l^2\cdot\frac{l}{2}\cdot 2\rho g}_{l^3\rho g}}_{0} - 2l^2 x\rho g = \quad (5)$$

$$= \underline{\underline{-2l^2 x\rho g}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F(x) = -2l^2\rho g\cdot x} \quad (6)$$

.

Tato síla uděluje krychli o hmotnosti $\underline{\underline{m = l^3\rho}}$ zrychlení

$$\boxed{\underline{\underline{a(x)}} = \frac{F(x)}{m} = \frac{-2l^2\rho g\cdot x}{l^3\rho} = \underline{\underline{-2\frac{g}{l}\cdot x}}} \quad (7)$$

Máme tedy:

$$! \quad \boxed{a(x) = -\underbrace{\frac{2g}{l}}_{\text{konst.}}\cdot x} \quad ! \quad (8)$$

zrychlení je přímo úměrné výchylce a má opačný směr

$$\Downarrow$$

! pohyb krychle = harmonická osilace !

Vztah (8) nyní porovnáme s obecnou rovnicí harmonických osilací:

$$\boxed{a(x) = -\omega_0^2\cdot x} \quad (9)$$

,

kde $\underline{\omega_0}$ je jejich frekvence.

Máme tak:

$$\boxed{\underbrace{-\frac{2g}{l}\cdot x}_{a(x)\text{ dle }(8)} = \underbrace{-\omega_0^2\cdot x}_{a(x)\text{ dle }(9)}} \qquad (10)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{2g}{l} = \omega_0^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}} \qquad (11)$$

FREKVENCE HARMONICKÝCH OSCILACÍ KRYCHLE

Číselně:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2.10\,[m s^{-2}]}{2\times 10^{-1}\,[m]}} = \sqrt{1.10^2\,[s^{-2}]} = 10\,[s^{-1}]} \qquad (12)$$

* * * * *

Problém č. 3

Prázdný železniční vůz má hmotnost $m = 2\,000$ kg. Při zatížení nákladem o hmotnosti $M = 3\,000$ kg se pružiny kol zkrátí o délku $\Delta x = 6$ cm. Koeficient tlumení pružin má hodnotu $\beta = 0.001\ s^{-1}$. Vůz s nákladem jede po kolejnicích délky $d = 12.56$ m. Určete:

a) Při jaké rychlosti se vůz začne prudce rozhoupávat vlivem nárazů na spoje kolejnic.

b) Jaká je přitom amplituda vzniklých oscilací vozu, je-li síla nárazů na spoje kolejnic $F_0 = 30$ N.

Řešení: a) Pružiny kol zatíženého vozu mají charakteristickou frekvenci harmonických oscilací:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m+M}}} \qquad (1)$$

,

kde k je elastická konstanta pružin. Tu určíme z údaje, že při zatížení nákladem o hmotnosti M se pružiny zkrátí o Δx, tj. platí:

$$\boxed{Mg = k\,\Delta x} \Rightarrow \boxed{k = \frac{Mg}{\Delta x}} \; \ldots (2)$$

.

Dosazením (2) do (1) máme:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{Mg}{\Delta x}}{m+M}} = \sqrt{\frac{M}{m+M}\cdot\frac{g}{\Delta x}}} \qquad (3)$$

Číselně:

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_0 &= \sqrt{\frac{3\times 10^3\,[\mathrm{kg}]}{(2+3)\times 10^3\,[\mathrm{kg}]}\cdot\frac{10\,[\mathrm{ms^{-2}}]}{6\times 10^{-2}\,[\mathrm{m}]}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot 10^3\,[\mathrm{s^{-2}}]} = \sqrt{10^2}\,[\mathrm{s^{-1}}] = 10\,[\mathrm{s^{-1}}]\end{aligned}} \qquad (4)$$

Při pohybu vozu rychlostí v dochází k nárazům kol na spoje kolejnic vzdálené o délku d s periodou

$$\boxed{T = \frac{d}{v}}$$

,

a tedy s frekvencí

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\left(\frac{d}{v}\right)} = \frac{2\pi v}{d}} \qquad (5)$$

.

K prudkému rozhoupání dojde tehdy, bude-li <u>frekvence Ω dle (5) rovna rezonanční frekvenci ω_{res} pružin vozu</u>, tj.

$$\boxed{\Omega = \omega_{res}} \quad (6)$$

Pro rezonanční frekvenci pružin vozu platí:

$$\boxed{\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} \quad (7)$$

kde $\underline{\underline{\omega_0}}$ je charakteristická frekvence harmonických oscilací (viz (3)(4)) a $\underline{\underline{\beta}}$ je koeficient tlumení.

Dosadíme-li nyní vztahy (5) a (7) do podmínky (6), dostáváme:

$$\boxed{\frac{2\pi v}{d} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} \quad (8)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v = \frac{d}{2\pi} \cdot \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} \quad (9)$$

rychlost vozu, při níž dojde k prudkému rozhoupání

Pro získání číselné hodnoty $\underline{\underline{v}}$ dosadíme:

$$\left.\begin{aligned} d &= 12.56 \text{ m} \\ \beta &= 0.001 \text{ s}^{-1} \end{aligned}\right\} \text{zadání}$$

$$\omega_0 = 10 \text{ s}^{-1} \;\} \text{ spočteno (viz (4))}.$$

$$\boxed{\underline{\underline{v}} = \frac{12.56\,[\text{m}]}{2 \times 3.14} \sqrt{10^2\,[\text{s}^{-2}] - 2 \times 10^{-6}\,[\text{s}^{-2}]} = \underline{\underline{20\,[\text{ms}^{-1}]}} = \underline{\underline{72 \text{ km hod}^{-1}}}} \quad (10)$$

b) Při rezonanční frekvenci $\underline{\underline{\omega_{res}}}$ je amplituda vzniklých nucených oscilací dána vztahem (viz přednáška):

$$\boxed{A_{res} = \frac{F_0}{2(m+M)\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}} \quad (11)$$

Číselně:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{A_{res}}} &= \frac{30\,[N]}{2.(2+3)\times 10^3[kg]\,.\,10^{-3}[s^{-1}]\sqrt{10^2[s^{-2}] - 10^{-6}[s^{-2}]}} = \\ &= \frac{30}{10.\sqrt{100-10^{-6}}}\,[m] = 3\times 10^{-1}[m] = \underline{\underline{30[cm]}} \end{aligned}} \quad (12)$$

Povšimněme si, že zatímco za normálních okolností vyvolá zatížení $M = 3\,000$ kg (odpovídající síle 30 000 N) zkrácení délky pružin o $\Delta x = 6$ cm, při rezonanci i 1000 x menší síla $F_0 = 30$ N vyvolá 5 x větší amplitudu nucených oscilací ($A_{res} = 30$ cm).

* * * * *

SEMINÁŘ Č. 5

Devátý a desátý výukový týden

Problém č. 1

Ideální plyn, jehož Poissonova konstanta je $\varkappa = 1.5$, zaujímá při tlaku $p_0 = 10^5\ \mathrm{Nm^{-2}}$ objem $V_0 = 1$ litr. Tento plyn adiabaticky expanduje na objem $V_1 = 4V_0$. Spočtěte:

a) mechanickou práci A vykonanou plynem při této expanzi;

b) změnu vnitřní energie plynu $\Delta U = U_1 - U_0$ při této expanzi;

c) změnu entropie plynu $\Delta S = S_1 - S_0$ při této expanzi.

Řešení: a) Pro mechanickou práci vykonanou plynem máme dle definice:

$$\boxed{A = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV} \quad (1)$$

Pro proměnný tlak p ve stavech s objemem V mezi V_0 a V_1 dostaneme z rovnice adiabaty $p_0 V_0^{\varkappa} = p V^{\varkappa}$:

$$\boxed{p = \frac{p_0 V_0^{\varkappa}}{V^{\varkappa}}} \quad (2)$$

Dosazením (2) do (1) máme:

$$A = \int_{V_0}^{V_1} \frac{p_0 V_0^{\varkappa}}{V^{\varkappa}} \, dV = p_0 V_0^{\varkappa} \cdot \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V^{\varkappa}} \, dV \qquad (3)$$

Spočteme nyní integrál na pravé straně (3):

$$\int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V^{\varkappa}} \, dV = \int_{V_0}^{V_1} V^{-\varkappa} \, dV = \left[\frac{1}{(-\varkappa+1)} \cdot V^{-\varkappa+1} \right]_{V_0}^{V_1} =$$

$$= \frac{1}{(-\varkappa+1)} \cdot \left(V_1^{-\varkappa+1} - V_0^{-\varkappa+1} \right) = -\frac{1}{(\varkappa-1)} \cdot \left(\frac{1}{V_1^{\varkappa-1}} - \frac{1}{V_0^{\varkappa-1}} \right) =$$

$$= +\frac{1}{(\varkappa-1)} \cdot \left(\frac{1}{V_0^{\varkappa-1}} - \frac{1}{V_1^{\varkappa-1}} \right) = \frac{1}{(\varkappa-1) \cdot V_0^{\varkappa-1}} \cdot \left(1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\varkappa-1} \right) \qquad (4)$$

Dosazením výsledku (4) do vztahu (3) máme:

$$A = p_0 V_0^{\varkappa} \cdot \frac{1}{(\varkappa-1) \cdot V_0^{\varkappa-1}} \cdot \left(1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\varkappa-1} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$A = \frac{p_0 V_0}{(\varkappa-1)} \cdot \left(1 - \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\varkappa-1} \right) \qquad (5)$$

Číselně:

$$A = \frac{10^5 [Nm^{-2}] \cdot 10^{-3} [m^3]}{(1.5-1)} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{1.5-1} \right) = \frac{10^2 [Nm]}{0.5} \cdot \left(1 - \underbrace{\left(\frac{1}{4} \right)^{0.5}}_{\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= 10^2 [Nm] = 100 [J] \qquad (6)$$

b) Změna vnitřní energie plynu je dána vztahem:

$$\boxed{\Delta U = U_1 - U_0 = M c_v (T_1 - T_0) = M c_v T_0 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right)} \quad (7)$$,

kde M je hmotnost plynu, c_v měrná tepelná kapacita při konstantním objemu, T_0 původní termodynamická teplota před expanzí a T_1 konečná termodynamická teplota po expanzi.

Poměr teplot $\left(\frac{T_1}{T_0} \right)$ určíme z rovnice adiabaty v proměnných (T, V):

$$\boxed{T_0 V_0^{\varkappa - 1} = T_1 V_1^{\varkappa - 1}} \quad (8)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\varkappa - 1}} \quad (9)$$.

Hmotnost plynu M dostaneme ze stavové rovnice:

$$\boxed{p_0 V_0 = \frac{M}{\mu} R T_0} \quad (10)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{M = \frac{\mu p_0 V_0}{R T_0}} \quad (11)$$,

Měrnou tepelnou kapacitu c_v získáme z:

a) definice Poissonovy konstanty ... $\boxed{\varkappa = \frac{c_p}{c_v}}$; (12)

b) Mayerova vztahu .... $\boxed{c_p = c_v + \frac{R}{\mu}}$. (13)

Eliminací $\underline{\underline{c_p}}$ ze soustavy rovnic (12) a (13) dostaneme:

$$\boxed{c_v = \frac{R}{\mu(\varkappa - 1)}} \quad (14)$$

Výrazy (9), (11) a (14) nyní dosadíme do vztahu (7) pro změnu vnitřní energie:

$$\Delta U = M c_v T_0 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right) = \underbrace{\frac{\mu p_0 V_0}{R T_0}}_{M} \cdot \underbrace{\frac{R}{\mu(\varkappa-1)}}_{c_v} \cdot T_0 \cdot \left(\underbrace{\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\varkappa-1}}_{\frac{T_1}{T_0}} - 1\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\mu p_0 V_0 R T_0}{R T_0 \mu(\varkappa-1)}}_{\frac{p_0 V_0}{\varkappa-1}} \cdot \left(\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\varkappa-1} - 1\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\Delta U = \frac{p_0 V_0}{(\varkappa-1)} \cdot \left(\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\varkappa-1} - 1\right)} \quad ! \quad (15)$$

Porovnáme-li vztah (15) pro změnu vnitřní energie $\underline{\underline{\Delta U}}$ se vztahem (5) pro mechanickou práci $\underline{\underline{A}}$, vidíme, že platí

$$\boxed{\Delta U = -A} \quad ! \quad (16)$$

Užitím (6) pak pro číselnou hodnotu $\underline{\underline{\Delta U}}$ máme:

$$\boxed{\Delta U = -100\,[J]} \quad ! \quad (17)$$

Vztah (16), který jsme získali explicitním výpočtem a porovnáním příslušných veličin, <u>není náhodný</u>, ale plyne bezprostředně z <u>1. zákona termodynamiky</u> aplikovaného na <u>adiabatický proces</u>:

$$\boxed{\text{1. zákon termodynamiky} \;\ldots\; dQ = dU + dA} \qquad (18)$$

$$\boxed{\text{definice adiabatického procesu} \;\ldots\; dQ = 0} \qquad (19)$$

Kombinací (18) a (19) máme:

$$0 = dU + dA \quad \Rightarrow \quad dU = -dA \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\underbrace{\int dU}_{U_1 - U_0}}_{\Delta U} = -\underbrace{\int dA}_{A}$$

$$\Downarrow$$

$$! \boxed{\Delta U = -A} ! . \qquad (20)$$

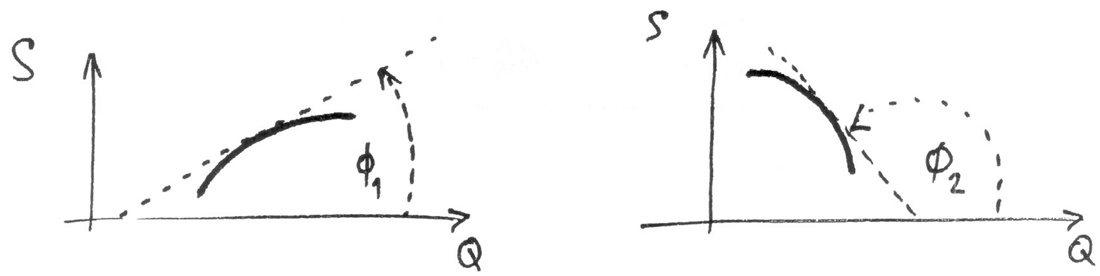
což je přesně vztah (16).

* * * * * *

c) Při určení změny entropie vycházíme z definice <u>zobecněné termodynamické teploty</u> (viz přednáška):

$$\boxed{\begin{array}{l} T \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{\left(\dfrac{dS}{dQ}\right)} , \\ \text{kde } \underline{S = k \cdot \ln w} \text{ je } \underline{\text{entropie systému}} \\ \left(\underline{\underline{k}} \ldots \text{Boltzmannova konstanta}, \; \underline{\underline{w}} \ldots \text{termodynamická váha} \right) \end{array}} \qquad (21)$$

Připomeňme, že definice (21) umožňuje zavést nejen kladnou, ale i <u>zápornou</u> termodynamickou teplotu:



$$T_1 = \frac{1}{\left(\frac{dS}{dQ}\right)} = \frac{1}{\underbrace{tg\,\phi_1}_{>0}} > 0 \qquad\qquad T_2 = \frac{1}{\left(\frac{dS}{dQ}\right)} = \frac{1}{\underbrace{tg\,\phi_2}_{<0}} < 0 \qquad (22)$$

Z definice (21) postupně máme:

$$\boxed{T = \frac{1}{\left(\frac{dS}{dQ}\right)}} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{T} = \frac{dS}{dQ}} \Rightarrow \boxed{dS = \frac{dQ}{T}} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

Integrací posledního vztahu pak:

$$\underbrace{\underbrace{\int dS}_{S_1 - S_0}}_{\Delta S} = \int \frac{dQ}{T}$$

$$\Downarrow$$

$$! \; \boxed{\Delta S = \int \frac{dQ}{T}} \; ! \quad (24)$$

Uvažovaná expanze plynu je <u>adiabatická</u>, takže pro ni platí: $dQ = 0$ (viz (19)). Dosazením do (24) tak máme:

$$! \; \boxed{\Delta S = 0} \; ! \quad (25)$$

* * * *

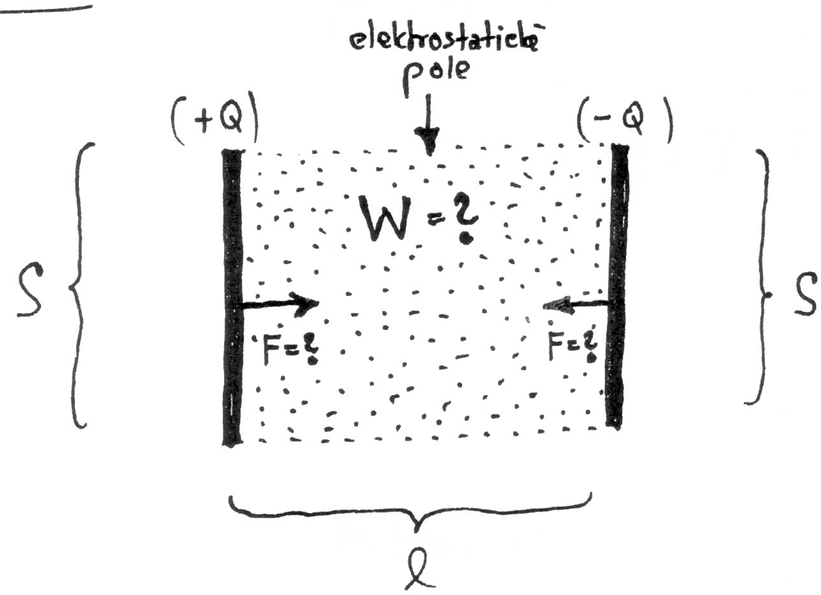
Problém č. 2

Dvě rovnoběžné desky s plošným obsahem $S = 900\ cm^2$, vzdálené od sebe o délku $l = 1\,cm$, jsou nabité stejně velkými opačnými náboji o velikosti $Q = 4\times 10^{-6}\ C$ a umístěné ve vakuu.

a) Jaká je energie W elektrostatického pole v prostoru mezi deskami?

b) Jakou silou F se obě desky přitahují?

Řešení:



a) Energie elektrostatického pole v prostoru mezi deskami je:

$$\boxed{W = \underbrace{\tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}_{\text{objemová hustota energie elst. pole}} \cdot \underbrace{Sl}_{\text{objem pole}}} \qquad (1)$$

,

$\underline{\underline{E}}$ .. intenzita elektrostatického pole v prostoru mezi deskami,

$\underline{\underline{\varepsilon_0}} = 8.86\times 10^{-12} [A^2 kg^{-1} m^{-3} s^4]$ ... elektrická permitivita vakua.

Pro intenzitu $\underline{\underline{E}}$ jsme na přednášce odvodili:

$$\boxed{E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sigma} \quad , \qquad (2)$$

kde $\underline{\underline{\sigma}}$ je velikost plošné hustoty náboje na deskách:

$$\boxed{\sigma = \frac{Q}{S}} \quad . \qquad (3)$$

Dosazením (3) do (2) máme:

$$\boxed{E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}} \quad . \qquad (4)$$

Dosazením (4) do (1) pak máme hledanou energii elst. pole:

$$\boxed{\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \Big(\underbrace{\frac{Q}{\varepsilon_0 S}}_{E} \Big)^2 S l = \underline{\underline{\frac{Q^2 l}{2 \varepsilon_0 S}}}} \quad ! \qquad (5)$$

Číselně:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{\underline{W}} &= \frac{(4 \times 10^{-6}[C])^2 . (10^{-2}[m])}{2 . 8{,}86 \times 10^{-12} [A^2 kg^{-1} m^{-3} s^4] . 900 \times 10^{-4} [m^2]} = \\ &= \frac{16}{2 \times 8{,}86 \times 9} \cdot \frac{(10^{-6})^2 . 10^{-2}}{10^{-12} . 10^2 . 10^{-4}} \cdot \frac{[\overbrace{As}^{C}]^2 . [m]}{[A^2 kg^{-1} m^{-3} s^4][m^2]} = \\ &= \underbrace{\frac{8}{8.86 \times 9}}_{0.1} \cdot \underbrace{\frac{10^{-14}}{10^{-14}}}_{1} \cdot \underbrace{[kg\, m^{+2} s^{-2}]}_{J} = \\ &= \underline{\underline{0.1 [J]}} \end{aligned}} \quad ! \qquad (6)$$

* * * *

b) Pro sílu $\underline{\underline{F}}$, kterou jedna deska působí na druhou, platí:

$$\boxed{F = Q E_1} \qquad (7)$$

kde $\underline{\underline{E_1}}$ je intenzita elektrostatického pole <u>jedné</u> desky.
Tato intenzita je zřejmě <u>poloviční</u> ve srovnání s intenzitou $\underline{\underline{E}}$ v prostoru mezi deskami, neboť na vytvoření celkového pole o intenzitě $\underline{\underline{E}}$ se rovnoměrně podílejí <u>obě</u> desky.
Máme tedy:

$$\boxed{E_1 = \frac{1}{2} E \underset{(4)}{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{\varepsilon_0 S}} \qquad (8)$$

Dosazením (8) do (7) dostáváme hledanou sílu $\underline{\underline{F}}$:

$$\boxed{\underline{\underline{F}} = Q\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{\varepsilon_0 S}}_{E_1} = \underline{\underline{\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}}}} \qquad (9)$$

Porovnáme-li vztah (9) pro sílu $\underline{\underline{F}}$ se vztahem (5) pro energii $\underline{\underline{W}}$, vidíme, že platí:

$$\boxed{F = \frac{W}{l}} \qquad (10)$$

<u>Číselně:</u>

$$\boxed{\underline{\underline{F}} = \frac{0.1\ [J]}{0.01\ [m]} = \underline{\underline{10\ [N]}}} \qquad (11)$$

kde jsme použili již spočtenou číselnou hodnotu $\underline{\underline{W}}$ podle (6).
Závěrem poznamenejme, že vztah (10) <u>není náhodný</u>, ale je důsledkem <u>obecného zákona zachování a přeměny energie a mechanické práce</u>:
K tomu, aby opačně nabité, vzájemně se přitahující desky "držely" ve vzdálenosti $\underline{\underline{l}}$ od sebe, musely vnější síly vykonat mech. práci:

$$\boxed{A = \int_0^l \underbrace{F}_{\text{konst.}} \, dl = F . \underbrace{\int_0^l 1 \, dl}_{l} = F . l} \quad (12)$$

Tato mechanická práce se nemůže nikam ztratit, může se pouze přeměnit na jiný druh energie, v daném případě na energii elektrostatického pole, které se vytvořilo v prostoru vymezeném deskami o ploše $\underline{\underline{S}}$ a vzdálenosti $\underline{\underline{l}}$. Musí proto platit:

$$\boxed{A = W} \quad \ldots (13)$$

Dosazením za $\underline{\underline{A}}$ podle (12) odtud máme:

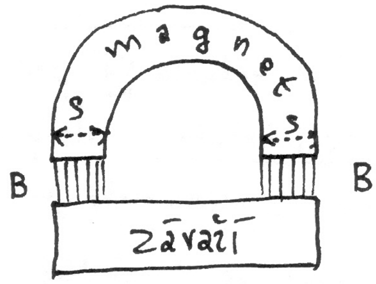
$$\boxed{F . l = W} \Rightarrow \; ! \boxed{F = \frac{W}{l}} \; ! \quad \ldots (14)$$

což není nic jiného než vztah (10), získaný explicitním vyjádřením a porovnáním veličin $\underline{\underline{W}}$ a $\underline{\underline{F}}$.

* * * * *

Problém č. 3

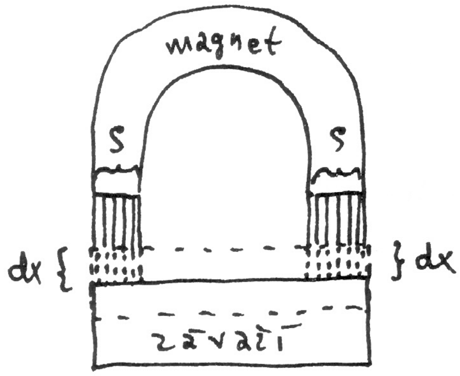
Jaká je nosnost magnetu, znázorněného na obrázku a nacházejícího se ve vakuu, jestliže plocha každého jeho pólu je $S = 1256 \text{ mm}^2$ a v prostoru mezi póly a závažím vzniká magnetické pole o indukci $B = 0.3 \text{ T}$?



Řešení: Nosnost magnetu = hmotnost závaží, které tento magnet udrží v rovnováze.

Závaží má v gravitačním poli Země zřejmou tendenci si spontánně snižovat svou gravitační potenciální energii. Tím však současně zvětšuje objem magnetického pole mezi sebou a póly magnetu, což znamená, že zvětšuje energii magnetického pole, neboť ta je úměrná objemu pole.

Jestliže pokles gravitační potenciální energie závaží je právě vykompenzován přírůstkem energie magnetického pole, pak systém "závaží + mag. pole" je v rovnováze (pole "unese" dané závaží)



Při poklesu závaží o dx vzroste objem magnetického pole o hodnotu

$$\boxed{dV = 2S\,dx} \quad (1)$$

Přírůstek energie magnetického pole přitom bude:

$$dE_{mag} = \underbrace{\frac{1}{2\mu_0}\cdot B^2}_{\text{objemová hustota energie mag. pole}} \cdot \underbrace{2S\,dx}_{dV} = \frac{B^2 S}{\mu_0}\,dx \quad (2)$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,[A^{-2}\,kg\,m\,s^{-2}]$ ... magnetická permeabilita vakua

B ... magnetická indukce pole

Současně poklesne gravitační potenciální energie závaží o:

$$\boxed{dE_{pot} = -mg\,dx} \quad \dots \quad (3)$$

kde m je hmotnost závaží.

Aby systém "závaží + magnetické pole" byl v rovnováze, musí celková změna energie být nulová, tj.

$$\boxed{dE_{celk} = dE_{mag} + dE_{pot} = 0} \quad (4)$$

Dosadíme-li do (4) výrazy (2) a (3), dostaneme

$$dE_{celk} = \underbrace{\frac{B^2S}{\mu_0}dx}_{dE_{mag}} + \underbrace{\left(-mg\,dx\right)}_{dE_{pot}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left(\frac{B^2S}{\mu_0} - mg\right)dx = 0} \quad (5)$$

Protože $dx \neq 0$, bude rovnice (5) splněna jen tehdy, když výraz v závorce bude roven nule, tj.

$$\boxed{\frac{B^2S}{\mu_0} - mg = 0} \quad (6)$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\boxed{m = \frac{B^2S}{\mu_0 g}}}_{\text{nosnost magnetu}} \quad (7)$$

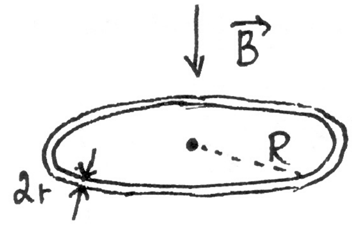
Číselně:

$$m = \frac{\left(3\times10^{-1}[T]\right)^2 \cdot 1{,}256\times10^{-3}[m^2]}{4\pi\times10^{-7}[A^{-2}kg\,m\,s^{-2}]\cdot 10[m\,s^{-2}]} = \frac{9\times1{,}256}{4\pi}\cdot\frac{10^{-5}}{10^{-6}}\cdot\left[\frac{T^2m^2}{A^{-2}kg\,m^2s^{-4}}\right] =$$

$$= \frac{9\times1{,}256}{\underbrace{12{,}56}_{4\pi}}\cdot 10\cdot\left[\frac{(NA^{-1}m^{-1})^2\,m^2}{A^{-2}kg\,m^2s^{-4}}\right] = 9\left[\frac{(kg\,m\,s^{-2})^2}{kg\,m^2s^{-4}}\right] = 9\,[kg] \quad (8)$$

Problém č. 4

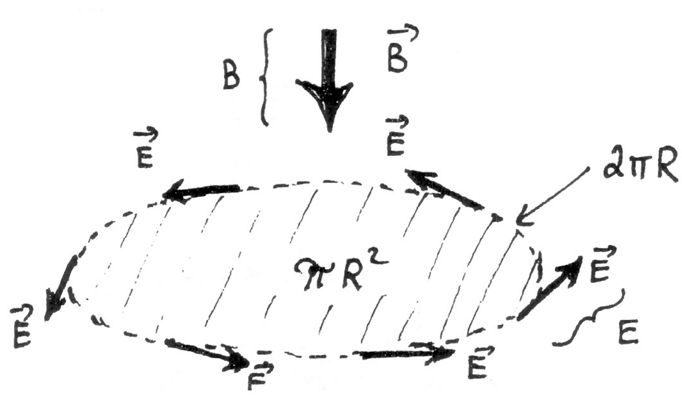
Z válcového drátu o poloměru $r = 2\,mm$, vyrobeného z materiálu o měrné vodivosti $\sigma = 4 \times 10^6\ \Omega^{-1} m^{-1}$, je vytvořena kruhová smyčka o poloměru $R = 4\,cm$ a umístěna do homogenního magnetického pole o indukci $B = 1\,T$, jejíž vektor je kolmý k ploše smyčky.



Jak veliký náboj projde smyčkou při vypnutí magnetického pole?

Řešení: Změna magnetického pole vyvolává podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce ve smyčce elektrické pole o intenzitě E takové, že

$$\underbrace{\overbrace{2\pi R}^{\text{obvod smyčky}} . E}_{\text{cirkulace intenzity elektrického pole}} = -\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\overbrace{\pi R^2}^{\text{plocha smyčky}} . B\right)}_{\text{magnetický indukční tok}} \qquad (1)$$



Pravou stranu rovnice (1) můžeme upravit takto:

$$\boxed{-\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\pi R^2 . B}_{\text{konst.}}\Big) = -\pi R^2 . \frac{d}{dt}(B) = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}} \qquad (2)$$

Dosazením (2) do (1) máme:

$$\boxed{2\pi R . E = -\pi R^2 . \frac{dB}{dt}} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{1}{2} R . \frac{dB}{dt}} \qquad (3)$$

Elektrické pole o intenzitě $\underline{\underline{E}}$ vyvolá v materiálu smyčky o měrné vodivosti $\underline{\underline{\sigma}}$ podle Ohmova zákona proudovou hustotu:

$$\boxed{j = \sigma . E \underset{(3)}{=} -\frac{1}{2}\sigma R . \frac{dB}{dt}} \qquad (4)$$

Proud tekoucí vodičem pak bude:

$$\boxed{I = \underbrace{\pi r^2}_{\text{průřez drátu smyčky}} . j \underset{(4)}{=} -\frac{1}{2}\pi r^2 \sigma R . \frac{dB}{dt}} \qquad (5)$$

Náboj $\underline{\underline{dQ}}$ prošlý vodičem za dobu $\underline{\underline{dt}}$ je dán formulí:

$$\boxed{dQ = I\,dt \underset{(5)}{=} -\frac{1}{2}\pi r^2 \sigma R . dB} \qquad (6)$$

Odtud pro náboj $\underline{\underline{Q}}$ prošlý vodičem při vypnutí magnetického pole, tj. při změně magnetické indukce z hodnoty $\underline{\underline{B}}$ na hodnotu $\underline{\underline{0}}$, máme:

$$\boxed{\underline{\underline{Q}} = \int dQ \underset{(6)}{=} -\frac{1}{2}\pi r^2 \sigma R . \int_B^0 dB = \left(-\frac{1}{2}\pi r^2 \sigma R\right) . \underbrace{(0-B)}_{(-B)} = \underline{\underline{+\frac{1}{2}\pi r^2 \sigma R B}}} \qquad (7)$$

$$\Downarrow$$

ZÁVĚR: ! $\boxed{Q = \frac{1}{2}\pi r^2 \sigma R B}$! (8)

Číselně: $\underline{\underline{Q}} = \frac{1}{2} . 3{,}14 . \left(2\times10^{-3}[\mathrm{m}]\right)^2 . 4\times10^{6}[\Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}] . 4\times10^{-2}[\mathrm{m}] . 1[\mathrm{T}] = \underline{\underline{1[\mathrm{C}]}}$! (9).

SEMINÁŘ č. 6

Jedenáctý a dvanáctý výukový týden

Problém č. 1

Jaká je největší vlnová délka elektromagnetického záření, kterým lze ještě způsobit fotoelektrický jev u platiny a cesia?

Řešení: Kinetická energie elektronů vznikajících při fotoelektrickém jevu v důsledku ozáření daného materiálu elektromagnetickým zářením o frekvenci $\underline{\underline{\nu}}$ je:

$$\boxed{E_k = h.\nu - \phi} \quad (1)$$

$\underline{\underline{h}}$ ... Planckova konstanta ($h = 6.62 \times 10^{-34}\,[Js]$) ;

$\underline{\underline{\phi}}$ ... vazbová energie elektronu v daném materiálu.

Fotoelektrický jev nastane jen pokud kinetická energie vyletujících elektronů je kladná nebo aspoň nulová, tj:

$$\boxed{E_k \geq 0} \quad (2)$$

Dosazením (1) do (2) máme:

$$\boxed{h.\nu - \phi \geq 0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nu \geq \frac{\phi}{h}} \quad (3)$$

Vyjádříme-li frekvenci $\underline{\nu}$ pomocí vlnové délky $\underline{\lambda}$:

$$\boxed{\nu = \frac{c}{\lambda}} \quad , \qquad (4)$$

podmínka (3) dává:

$$\boxed{\frac{c}{\lambda} \geq \frac{\Phi}{h}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda \leq \frac{hc}{\Phi}} \qquad (5)$$

Pravá strana nerovnosti (5) zřejmě představuje <u>maximální vlnovou délku</u> záření, jímž lze ještě fotoelektrický jev vyvolat. Platí tedy:

$$\boxed{\lambda_{max} = \frac{hc}{\Phi}} \qquad (6)$$

<u>Číselně:</u> a) $\Phi^{Cs} = 1.9\,[eV] \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\lambda^{Cs}_{max}}} = \frac{hc}{\Phi^{Cs}} = \frac{6{,}62 \times 10^{-34}\,[Js] \cdot 3 \times 10^{8}\,[ms^{-1}]}{1{,}9 \cdot 1{,}6 \times 10^{-19}\,[J]} = \underline{\underline{6{,}53 \times 10^{-7}\,[m]}}$$

$$\boxed{\lambda^{Cs}_{max} = 653\ nm} \qquad (7)$$

b) $\Phi^{Pt} = 6.3\,[eV] \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\lambda^{Pt}_{max}}} = \frac{hc}{\Phi^{Pt}} = \frac{6{,}62 \times 10^{-34}\,[Js] \cdot 3 \times 10^{8}\,[ms^{-1}]}{6{,}3 \cdot 1{,}6 \times 10^{-19}\,[J]} = \underline{\underline{1{,}98 \times 10^{-7}\,[m]}}$$

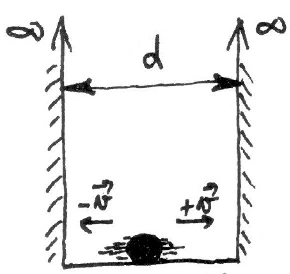
$$\boxed{\lambda^{Pt}_{max} = 198\ nm} \qquad (8)$$

* * * *

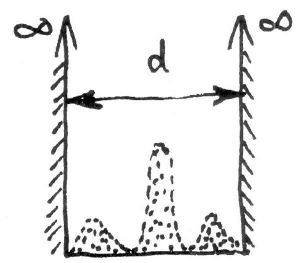
Problém č. 2

Mikroobjekt o hmotnosti $\underline{m = 10^{-30}\ kg}$ (charakteristická hmotnost elektronu) se nachází na dně nekonečně hluboké potenciálové jámy o šířce $\underline{d = 10^{-10}\ m}$ (charakteristický rozměr atomu).
Najděte všechny přípustné hodnoty energie tohoto mikroobjektu.

Řešení:



makroobjekt
(kulička)
na dně jámy



mikroobjekt
(elektron)
na dně jámy

Z přednášky je známo, že mikroobjekty lze popsat pomocí pravděpodobnostních vln, jejichž vlnová délka je dána vztahem:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \quad (1)$$

h ... Planckova konstanta
p ... hybnost mikroobjektu

Aby se mikroobjekt trvale udržel v omezeném prostoru šířky d a neztrácel přitom energii, musí příslušné pravděpodobnostní vlnění být stacionární.

Z nauky o vlnění víme, že vznik stacionárního vlnění v omezeném prostoru mezi pevnými stěnami je možný jen tehdy, připadne-li na šířku omezeného prostoru celý násobek půlvln, tj.

$$\boxed{d = n \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad n = 1,2,3,4,\dots} \quad (2)$$

Dosazením výrazu (1) pro vlnovou délku λ do podmínky (2) dostaneme:

$$\boxed{d = n \cdot \frac{\frac{h}{p}}{2}} \implies \boxed{p = n \cdot \frac{h}{2d}} \quad (3)$$

Protože mikroobjekt se nachází na dně jámy, je jeho potenciální energie nulová. Celková energie mikroobjektu E je tak dána pouze jeho energií kinetickou (E_k):

$$\boxed{E = E_k = \frac{p^2}{2m}} \quad (4)$$

Dosadíme-li do (4) za hybnost p podle (3), máme:

$$\boxed{E = \frac{\left(n \cdot \frac{h}{2d}\right)^2}{2m} = \frac{h^2}{8md^2} \cdot n^2} \quad (5)$$

Protože n nabývá pouze hodnot 1,2,3,...., vidíme ze vztahu (5), že energie mikroobjektu v jámě je kvantována, tj. nabývá jen určitých hodnot, charakterizovaných číslem n (číslo n nazýváme kvantové číslo).

Na základě provedeného rozboru můžeme tedy konstatovat, že

všechny přípustné hodnoty energie mikroobjektu v uvažované potenciálové jámě tvoří posloupnost

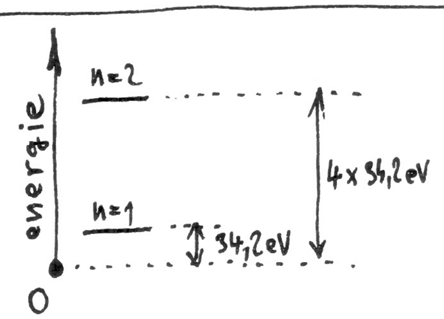
$$E_n = \frac{h^2}{8md^2} \cdot n^2 \qquad n = 1,2,3,4,\dots \tag{6}$$

Pro dané číselné hodnoty má konstanta $\frac{h^2}{8md^2}$ velikost:

$$\frac{h^2}{8md^2} = \frac{(6{,}62\times10^{-34}\,[\mathrm{Js}])^2}{8\cdot10^{-30}[\mathrm{kg}]\cdot(10^{-10}[\mathrm{m}])^2} = \frac{(6{,}62)^2}{8}\times\frac{10^{-68}}{10^{-50}}\,\frac{[\mathrm{kg\,m^2 s^{-2}}\cdot\mathrm{s}]^2}{[\mathrm{kg}]\cdot[\mathrm{m}]^2} = 5{,}475\times10^{-18}\,[\mathrm{J}] = 34.2\,[\mathrm{eV}] \tag{7}$$

Posloupnost (6) můžeme tedy pro dané číselné hodnoty konkretizovat ve tvaru:

$$E_n = \left(34{,}2\,[\mathrm{eV}]\right)\cdot n^2 \qquad n = 1,2,\dots \tag{8}$$



* * * * *

Problém č. 3

ZÁPOČTOVÝ TEST

Obsah: 2 problémy (nebo jejich části) ze seminářů č. 1–5

Hodnocení: max. 13 bodů

Podmínka úspěšnosti v 1. kole: aspoň 7 bodů

KONEC