

OBSAH

Obyčejné diferenciální rovnice (ODR)	1
Lineární ODR 1. řádu	13
Lineární ODR n -tého řádu s konstantními koeficienty	20
Soustavy n lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty	39
Laplaceova transformace	74
Zpětná Laplaceova transformace	90
Schéma řešení ODR pomocí Laplaceovy transformace	94
Taylorovy řady	104
Fourierovy řady	123

doc. Ing. Josef Daněk, Ph.D.

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

Plzeň 2025

Obyčejné diferenciální rovnice (ODR)

- Co to je?

Úloha najít neznámou funkci $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která na zadaném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ splňuje rovnost, ve které se vyskytují derivace této funkce ($y', y'', y''', \dots$)

- $y = y(t)$... řešení ODR
- řád ODR ... řád nejvyšší derivace

Příklady:

- $y'(t) = \cos t, t \geq 0$ (ODR 1. řádu)
- $y'(t) = -2y(t), t \in \mathbb{R} = I$ (ODR 1. řádu)
- $y''(t) + y'(t) = e^{4t}, t \in \mathbb{R} = I$ (ODR 2. řádu)
- $y' = \cos t$ ~~$y' = \cos$~~ !!!
- $y' = 2y$
- $y'' + y' = e^{4t}$

Poznámky: V praxi se často:

- vynechává parametr t a interval I
- derivace se značí různě $y'(t), \dot{y}(t), \frac{dy}{dt}, y''(t), \ddot{y}(t), \frac{d^2y}{dt^2}, \dots$
- neznámá funkce (řešení) se značí různě $y(t), y(x), i(t), u(t), \dots$

Nejprve se budeme zabývat ODR 1. řádu ve tvaru:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I$$

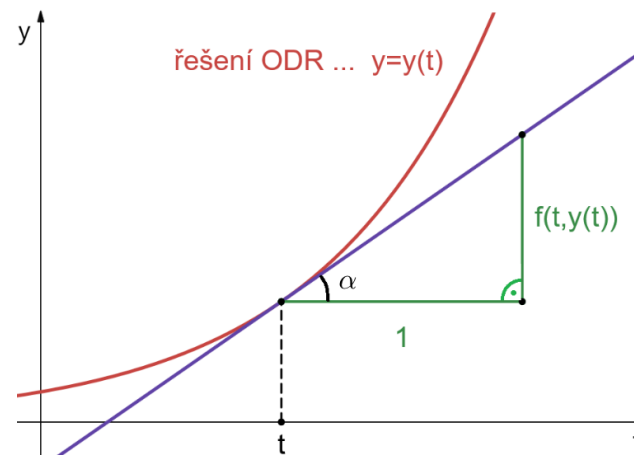
Dáno: f a $I \subset \mathbb{R}$ Hledáme: $y: I \rightarrow \mathbb{R}$

Geometrický význam:

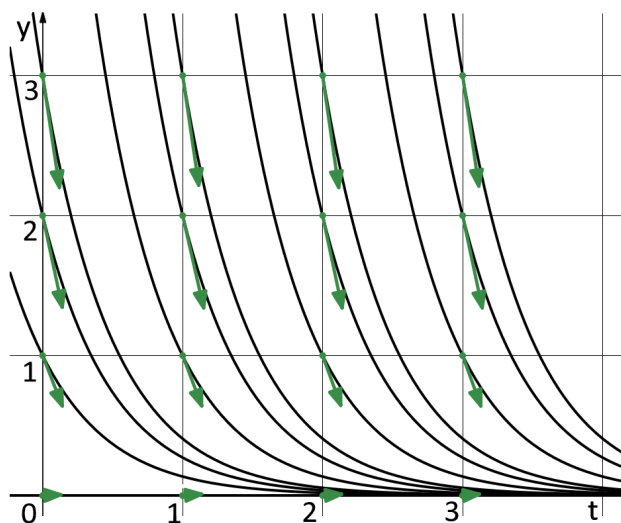
$$y'(t) = f(t, y(t))$$



směrnice tečny k řešení $y(t)$ v bodě t $\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(t, y(t))}{1}$



Příklad: $y'(t) = -2y(t)$, $t \in \mathbb{R} = I$, tj. $y' = -2y$, tj. $f(y) = -2y$,
např. pro $t = 0$ a $y = 0 \dots y'(0)$ je směrnice tečny ke grafu $y(t)$ v bodě 0



$$y = 0: \quad f(0) = -2 \cdot 0 = 0$$

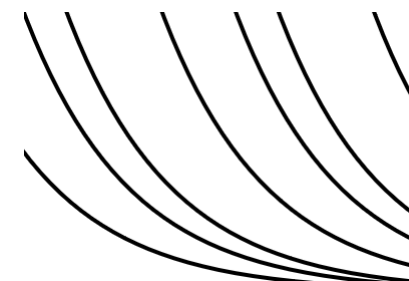
$$y = 1: \quad f(1) = -2 \cdot 1 = -2$$

$$y = 2: \quad f(2) = -2 \cdot 2 = -4$$

$$y = 3: \quad f(3) = -2 \cdot 3 = -6$$

pro jiné t obdobně

$$f = f(t, y(t))$$



$\dots y = y(t)$

$\dots$ nekonečně mnoho řešení

$$y(t) = c \cdot e^{-2t}$$

$c \dots$ lib. konstanta $\in \mathbb{R}$



$\dots (1, f(t, y)) \dots$ tečné vektory $\rightarrow$ SMĚROVÉ POLE

Obecné řešení ODR 1. řádu je funkce $y = y(t, c)$, $c \in \mathbb{R}$ (lib. parametr), která splňuje danou rovnici $\forall c \in \mathbb{R}$ a $\forall t \in I$.

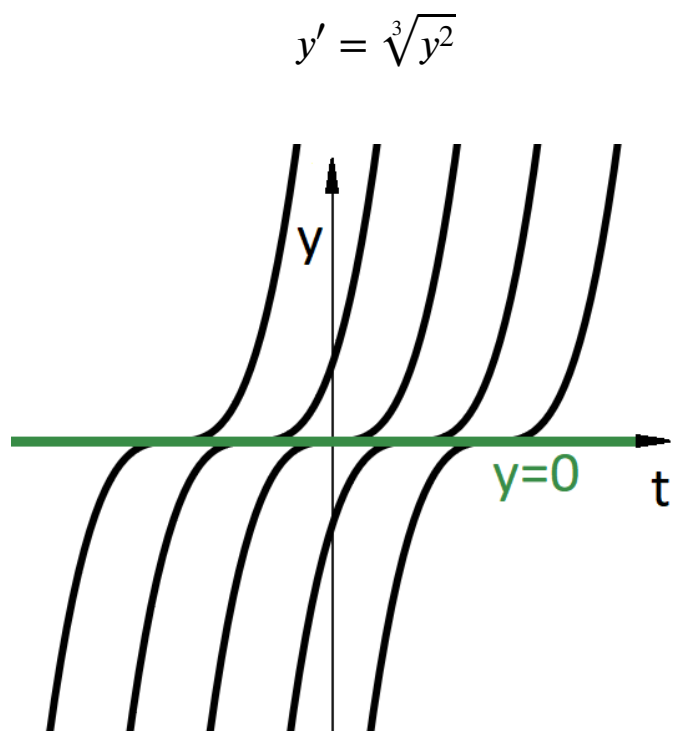
→ je to systém funkcí, graficky – systém křivek

→ pro konkrétní volbu parametru c v obecném řešení dostaneme partikulární řešení

Poznámka: U některých rovnic se vyskytují ještě tzv. singulární řešení (= výjimečná), ty nelze získat z obecného řešení žádnou volbou parametru c .

Obvykle je v každém bodě singulárního řešení porušena jednoznačnost, tj. prochází jím ještě jiné řešení (integrální křivka).

Příklad:



$$y' = \sqrt[3]{y^2}$$

obecné řešení: $y = \frac{1}{27} (t + c)^3, c \in \mathbb{R}$

ověříme:

$$y' = \frac{1}{27} \cdot 3 \cdot (t + c)^2 = \frac{1}{9} (t + c)^2$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{y^2} &= \left(\frac{1}{27} (t + c)^3 \right)^{\frac{2}{3}} = \left(3^{-3} (t + c)^3 \right)^{\frac{2}{3}} = \\ &= 3^{-2} (t + c)^2 = \frac{1}{9} (t + c)^2 \end{aligned}$$

✓

singulární řešení: $y \equiv 0$

ověříme:

$$y' = 0$$

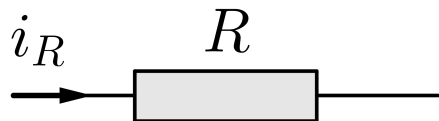
$$\sqrt[3]{y^2} = 0$$

✓

Odkud se ODR berou?

Jsou odvozeny na základě fyzikálních (ekonomických, sociologických, ...) zákonů a pozorování (měření) zjištěných vztahů, které popisují reálný problém (zjednodušenou verzi).

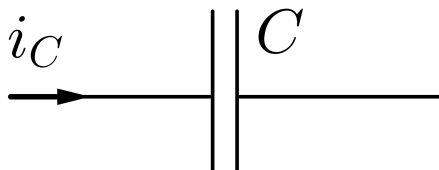
Příklad: Vybíjení kondenzátoru přes rezistor (RC - obvod)



$R > 0 \dots$ odpor

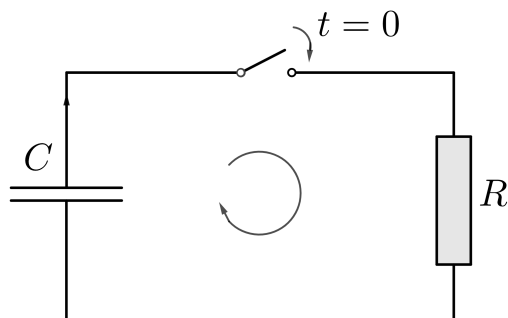
ideální rezistor:

$$u_R = R \cdot i_R$$



$C > 0 \dots$ kapacita

kapacitor (kondenzátor): $u'_C = \frac{1}{C} \cdot i_C$



Kirchhoffovy zákony:

1. rovnice kontinuity el. proudu: $i_R(t) = i_C(t)$

2. zákon zachování energie: $u_R(t) + u_C(t) = 0$

Zvolme za stavovou proměnnou napětí na kapacitoru, tj. $y(t) = u_C(t)$

$$\text{Potom } y'(t) = u'_C(t) = \frac{1}{C} \cdot i_C(t) = \frac{1}{C} \cdot i_R(t) = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{R} \cdot u_R(t) = -\frac{1}{CR} u_C(t) = -\frac{1}{CR} y(t)$$

Závěr

$$y'(t) = -ky(t), \quad \text{kde } k = \frac{1}{CR}, \quad t \geq 0$$

Poznámka: Stejnou rovnicí popisujeme i jiné jevy (např. zákon radioaktivního rozpadu)

$y(t) \dots$ množství radioaktivní látky, $k > 0 \dots$ rozpadová konstanta

Co je řešení a jak jej najít?

BAD NEWS: Neexistuje žádná univerzální metoda pro řešení ODR. Umíme řešit pouze speciální typy !

Příklad:

$$y'(t) = -y(t), \quad (k = 1)$$

- ? Je $y(t) = \sin t$ řešením rovnice ? $y'(t) = [\sin t]' = \cos t \neq -y(t) = -\sin t$ **NE !**
- ? Je $y(t) = e^{-t}$ řešením rovnice ? $y'(t) = [e^{-t}]' = e^{-t} \cdot [-1] = -e^{-t} = -y(t)$ **ANO !**
- ? Je $y(t) = 10 e^{-t}$ řešením rovnice ? $y'(t) = [10 \cdot e^{-t}]' = -10 e^{-t} = -y(t)$ **ANO !**

Platí: Každá funkce ve tvaru

$$y(t) = A \cdot e^{-t}, \quad A \in \mathbb{R}$$

je řešením ODR

$$y'(t) = -y(t)$$

obecné řešení

Co je A? $y(0) = A \cdot e^{-0} = A \cdot 1 = A$

$$y(0) = A$$

... počáteční podmínka (např. počáteční napětí na kapacitoru)

volbou konkrétního A dostaneme partikulární řešení

Poznámka: Úloha najít řešení $y = y(t)$ ODR 1. řádu, které navíc splňuje počáteční podmínku $y(t_0) = y_0$ se nazývá počáteční (Cauchyova) úloha

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$$

Metoda přímé integrace

$$y'(t) = f(t) \Rightarrow \underline{y(t)} = \int f(t) dt = \underline{F(t) + c} \quad \dots \quad \text{obecné řešení}$$

Příklad:

$$\begin{cases} y' = t^3 + \sin t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

obecné řešení:

$$\underline{y(t)} = \int (t^3 + \sin t) dt = \underline{\frac{1}{4}t^4 - \cos t + c}$$

partikulární řešení:

$$y(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - \cos 0 + c = -1 + c = 1 \Rightarrow \underline{c = 2}$$

$$\underline{y(t) = \frac{1}{4}t^4 - \cos t + 2}$$

Poznámka: Pro počáteční úlohu lze rovnou psát:

$$y'(t) = f(t) \quad / \quad \int_{t_0}^t dt \quad \longrightarrow \quad y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(s) ds = F(t) - F(t_0)$$

Příklady na procvičení:

$$1) \begin{cases} y' = e^{t-3} \\ y(3) = 0 \end{cases}$$

$$2) y' = \sin^2 t$$

$$3) y' = \frac{7}{x + x \ln^2 4x}$$

$$4) y' = \ln 8t$$

$$5) y' = t^3 e^{2t}$$

$$6) y' = \frac{1}{t(t+1)}$$

$$7) y' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$8) y' = \sqrt{1-t^2}$$

$$9) y' = \operatorname{tg} t$$

Metoda separace proměnných

Rovnici tvaru $y'(t) = h(y) \cdot g(t)$ nazýváme rovnicí se separovanými proměnnými.

ŘEŠENÍ:

I. vyřešíme $h(y) = 0 \dots$ pokud takové řešení existuje, pak je to konstantní řešení naší rovnice

II. dále předpokládáme, že $h(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{dt} = y' = h(y) \cdot g(t) \quad \bigg/ \cdot dt \quad \bigg/ \cdot \frac{1}{h(y)}$$

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(t) dt \quad \bigg/ \int$$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t) dt \quad \dots \quad \text{je „odseparováno“}$$

$$\boxed{H(y) = G(t) + c} \quad G' = g, \quad H' = \frac{1}{h}, \quad (c = c_2 - c_1)$$

$+c_1 \quad +c_2$

popisuje řešení (křivky) implicitně

někdy lze psát $y = H^{-1}(G(t) + c)$ popisuje řešení explicitně

III. pokud lze vhodnou volbou konstanty c získat z předpisu $H(y) = G(t) + c$ i konstantní řešení, zahrneme je tam $\longrightarrow$ obecné řešení

pokud to nelze, je příslušné konstantní řešení řešením singulárním

IV. případná počáteční podmínka $\longrightarrow c = \dots$ partikulární řešení

Příklad: $\begin{cases} y' = -y(t) \\ y(0) = 2 \end{cases}$

$$y' = -y$$

$$\frac{dy}{dt} = -y \quad / \cdot dt$$

$$dy = -y dt \quad \text{chceme vydělit } y$$

$y(t) \equiv 0$ je ale řešení ! ... konstantní řešení

$$dy = -y dt \quad / : y \neq 0$$

$$\frac{1}{y} dy = -dt \quad / \int$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int dt$$

$$\ln |y| = -t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{-t+c} = e^{-t} \cdot \underbrace{e^c}_{=B>0!} = B e^{-t}, \quad B > 0$$

$$y = \underbrace{\pm B}_{=D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \cdot e^{-t}$$

$$y = D \cdot e^{-t}, \quad D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y = A \cdot e^{-t}, \quad A \in \mathbb{R}$$

obecné řešení

Dosadíme počáteční podmínku: $y(0) = A \cdot e^{-0} = A \cdot 1 = \underline{A = 2}$

$$y = 2 e^{-t}$$

partikulární řešení, řešení počáteční úlohy

Příklad:
$$\begin{cases} y' = \frac{t}{y} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{y} = h(y) \cdot g(t), \quad \text{kde} \quad g(t) = t, \quad h(y) = \frac{1}{y}$$

I. $h(y) = \frac{1}{y} \neq 0 \quad \forall y \Rightarrow$ rovnice nemá konstantní řešení

II. můžeme vydělit $h(y)$, odseparujeme

$$\int y \, dy = \int t \, dt$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}t^2 + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y^2 = t^2 + c} \quad c = 2\tilde{c} \in \mathbb{R} \quad \text{obecné řešení}$$

$$\boxed{y^2 - t^2 = c} \quad \dots \text{ implicitně} \quad \boxed{y = \pm \sqrt{t^2 + c}} \quad \dots \text{ explicitně (není vidět o jaké křivky jde !)}$$

$$\underline{c = 0}: \quad y = \pm \sqrt{t^2}, \text{ tj. } y = \pm t$$

$$\underline{c < 0}: \quad t^2 - y^2 = -c > 0$$

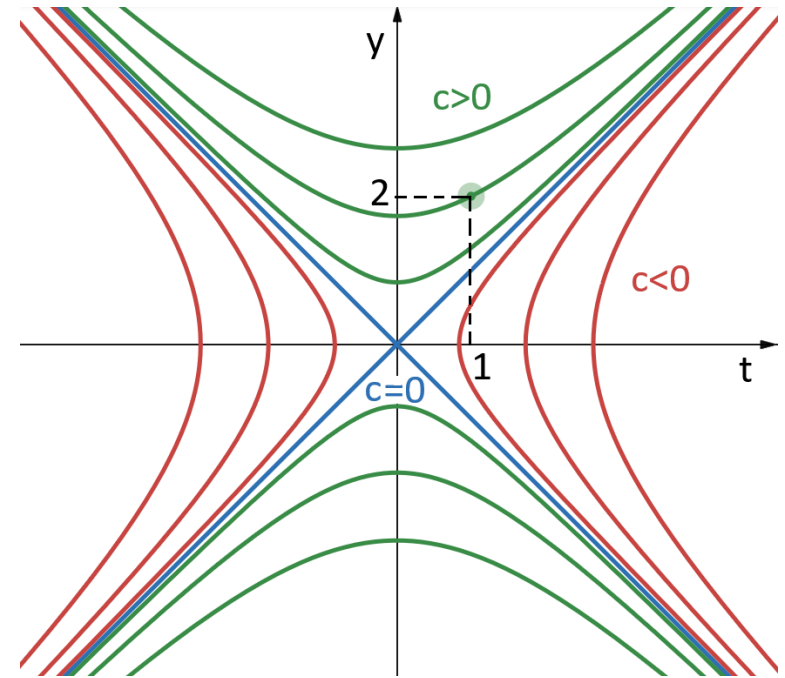
$$\underline{c > 0}: \quad y^2 - t^2 = c$$

III. odpadá (není konstantní řešení)

IV. počáteční podmínka $y(1) = 2 \rightarrow y^2 - t^2 = c \rightarrow 2^2 - 1^2 = c \rightarrow \underline{c = 3}$

$$\boxed{y^2 - t^2 = 3} \quad \dots \text{ partikulární řešení (řešení počáteční úlohy)}$$

Zkouška ... implicitně nebo explicitně



Příklad:
$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t} \\ y(2) = 5 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} = h(y) \cdot g(t), \quad \text{kde} \quad g(t) = \frac{1}{t}, \quad h(y) = y$$

I. $h(y) = y \equiv 0$... konstantní řešení (adept na singulární řešení)

II. můžeme vydělit $h(y)$, odseparujeme

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{t} dt$$

$$\ln |y| = \ln |t| + \bar{c}, \quad \bar{c} \in \mathbb{R}$$

$$\ln |y| = \ln |ct|, \quad \bar{c} = \ln |c|, \quad c \neq 0$$

$$|y| = |ct|, \quad c \neq 0$$

$$y = ct, \quad c \neq 0$$

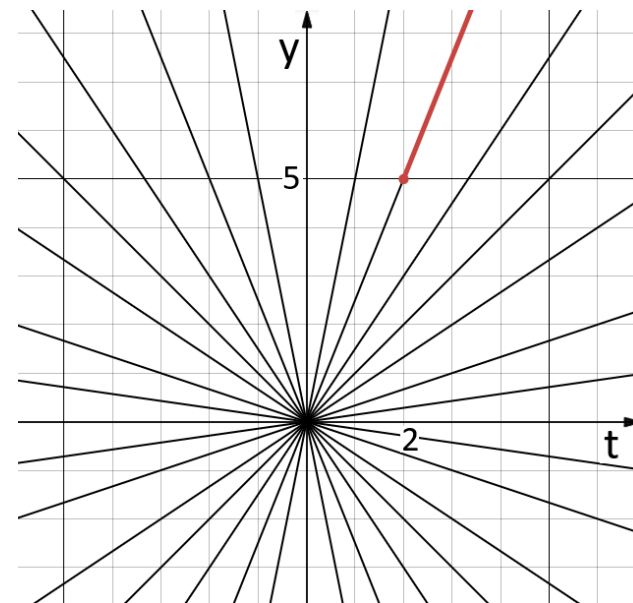
III. pro $c = 0$ dostaneme konstantní řešení $y \equiv 0$!

$\Rightarrow$ obecné řešení je $y = ct, \quad c \in \mathbb{R}$

IV. počáteční podmínka $y(2) = 5 \rightarrow y = ct \rightarrow 5 = c \cdot 2 \rightarrow \underline{c = \frac{5}{2}}$

$y = \frac{5}{2}t$... partikulární řešení (řešení počáteční úlohy)

$$t \in \langle 2; \infty \rangle$$



Příklad: $y' = t(2y - 1)^2$

$$\frac{dy}{dt} = t \cdot (2y - 1)^2 = g(t) \cdot h(y)$$

I. $h(y) = (2y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}} \dots$ konstantní řešení

II. můžeme vydělit $h(y)$, odseparujeme

$$\int \frac{1}{(2y - 1)^2} dy = \int t dt$$

$$-\frac{1}{2(2y - 1)} = \frac{1}{2}t^2 + \tilde{c}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{1}{(2y - 1)} = t^2 + c, \quad c = 2\tilde{c} \in \mathbb{R}$$

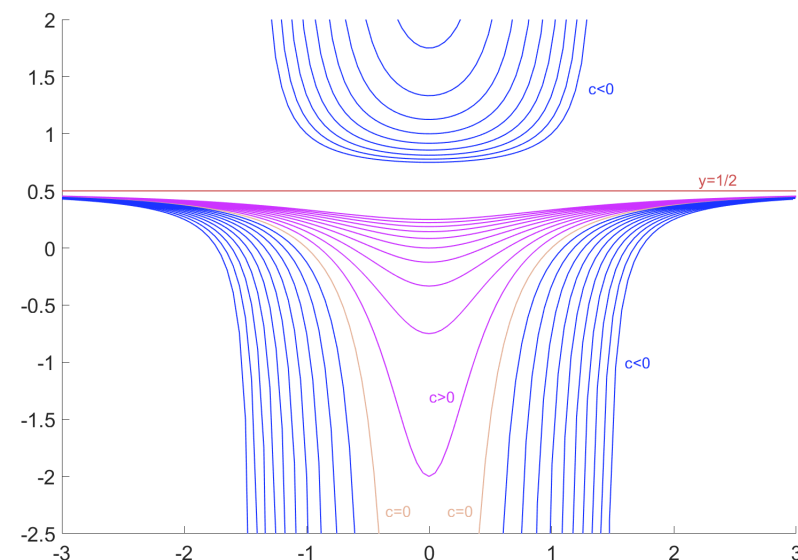
$$2y - 1 = -\frac{1}{t^2 + c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{t^2 + c} \right)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

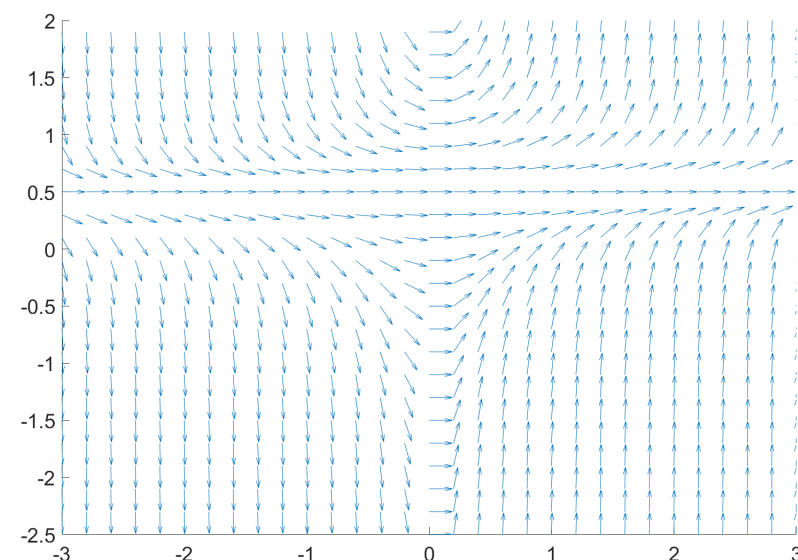
III. $\boxed{y \equiv \frac{1}{2}}$ není singulární řešení, protože „neprotíná“ ostatní řešení, ale doplňuje je
jde o součást obecného řešení

IV. není zadána počáteční podmínka

obecné řešení



směrové pole



REKAPITULACE

ODR 1. řádu:

Dáno: $f(t, y)$... funkce, $I \subset \mathbb{R}$... interval

Chceme najít funkci $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (řešení) takovou, že

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I \quad (\text{zkráceně } y' = f(t, y))$$

Víme:

- $f(s, y(s))$... směrnice tečny ke grafu řešení y v čase s
- obecně existuje (pokud vůbec nějaké) nekonečně mnoho řešení
- konkrétní řešení je určeno tzv. počáteční podmínkou $y(t_0) = y_0$
- neexistuje žádná univerzální metoda řešení
- speciální typy rovnic

1. $y' = f(t)$ METODA PŘÍMÉ INTEGRACE

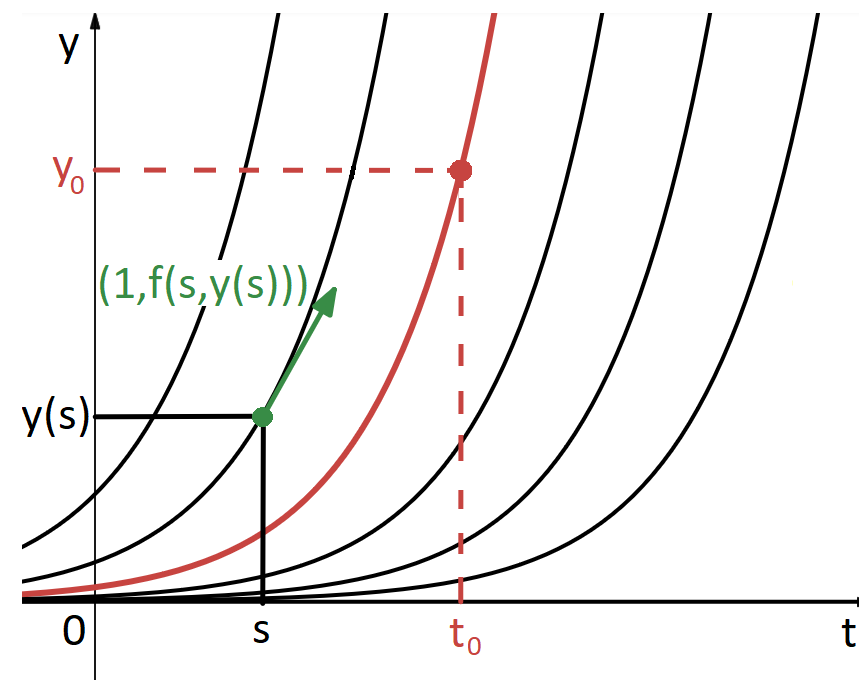
2. $y' = h(y) \cdot g(t)$ METODA SEPARACE PROMĚNNÝCH

I. $h(y) = 0 \rightarrow$ konstantní řešení

II. $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(t) dt \rightarrow$ obecné řešení

III. I. + II. $\rightarrow$ případné singulární řešení

IV. počáteční podmínka $\rightarrow$ partikulární řešení



Rovnice tvaru $y'(t) = a(t)y + b(t)$ je lineární ODR 1. řádu

Dáno:

$I \subset \mathbb{R} \dots$ interval, $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \dots$ spojité na I

Hledáme:

$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$, $t \in I$

(+ počáteční podmínka: $y(t_0) = y_0$, kde $t_0 \in I$ a $y_0 \in \mathbb{R}$ jsou dány)

$a(t) \dots$ koefficient

$b(t) \dots$ pravá strana

$b(t) \equiv 0 \dots$ homogenní rovnice

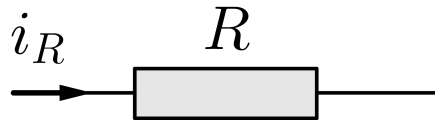
$b(t) \not\equiv 0 \dots$ nehomogenní rovnice

$a(t) = a \dots$ konstantní koefficient

$a(t) \neq a \dots$ nekondantní koefficient

Odkud se ODR berou?

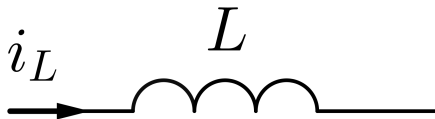
Příklad: Obvod s rezistorem, cívkou a zdrojem (RL - obvod)



$R > 0 \dots$ odpor

ideální rezistor:

$$u_R = R \cdot i_R$$



$L > 0 \dots$ indukčnost

induktor (ideální cívka): $u_L(t) = L \cdot i'_L(t)$

Kirchhoffovy zákony:

1. rovnice kontinuity el. proudu:

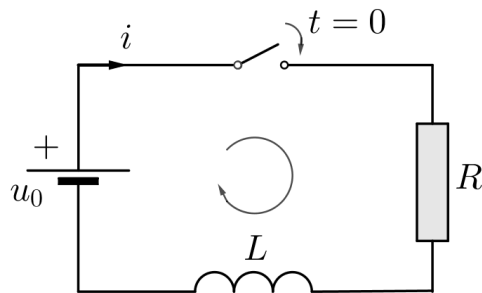
$$i_R(t) = i_L(t) = i(t) \dots$$

$\dots$ zvolíme za stavovou proměnnou

2. zákon zachování energie:

$$u_R(t) + u_L(t) - u_0 = 0$$

$$R \cdot \underbrace{i_R(t)}_{i(t)} + L \cdot \underbrace{i'_L(t)}_{i'(t)} - u_0 = 0, t \geq 0$$



Tedy

$$i'(t) = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{u_0}{L}$$

$$a(t) = -\frac{R}{L}$$

$\dots$ závisí na prvcích v obvodu

$$b(t) = \frac{u_0}{L}$$

$\dots$ závisí na zdroji připojeném v obvodu

pokud nahradíme stejnosměrný zdroj z střídavý, potom $b(t) = \frac{u_0(t)}{L}$

Jak vyřešit lineární ODR 1. řádu ?

Platí: Každé řešení $y(t)$ lze zapsat ve tvaru:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t), \quad \text{kde}$$

$y_H(t)$ je nějaké řešení homogenní rovnice,
tj. pro $b(t) = 0$

→ závisí na prvcích v obvodu

$y_H(t)$... **homogenní řešení**

$y_P(t)$ je jedno řešení nehomogenní rovnice,
tj. pro $b(t) \neq 0$

→ závisí na zdroji napětí

$y_P(t)$... **partikulární řešení**

Krok 1: Najdi všechna řešení $y_H(t)$, tj. řešíme homogenní rovnici $y'(t) = a(t)y(t), t \in I$

Jak ? Separací proměnných

$$y' = a(t)y \quad (= g(t) \cdot h(y), \text{ kde } g(t) = a(t), h(y) = y)$$

I. $y(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ konstantní řešení ... u lineární ODR vždy !

II. pro $y \neq 0$: $\frac{dy}{dt} = a(t)y \rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int a(t) dt$

$A(t)$ je primitivní funkce k $a(t)$ (existuje, protože $a(t)$ je spojitá)

$$\ln |y| = A(t) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{A(t)+c_1} = e^{A(t)} \cdot e^{c_1}$$

$$y = \underbrace{\pm e^{c_1}}_{=K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \cdot e^{A(t)}$$

$$y = K \cdot e^{A(t)}, K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

III. pro $K = 0$ dostaneme konstantní řešení $y \equiv 0$

$$y_H = K \cdot e^{A(t)}, K \in \mathbb{R}$$

homogenní řešení

Poznámka: Pokud $a(t) = a \in \mathbb{R}$, $t \in I$, lze řešení „uhodnout“

Příklad: $y'(t) = 2y(t)$, tj. $a = 2 \Rightarrow A(t) = 2t$

$$y_H(t) = K \cdot e^{2t}, K \in \mathbb{R}$$

Jinak: Víme, že řešení je nějaká exponenciála, tj. $y(t) = e^{\lambda t}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je nějaké číslo.

$$\underline{\lambda = ?}: y'(t) = [e^{\lambda t}]' = e^{\lambda t} \cdot \lambda$$

Dosadíme

$$e^{\lambda t} \cdot \lambda = 2 \cdot e^{\lambda t} \quad / : e^{\lambda t} > 0$$

$$\lambda = 2$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{2t}$$

pro počáteční podmínku $y(0) = 5$ dostaneme

$$y_H(0) = K \cdot e^{2 \cdot 0} = K \cdot 1 = K = 5$$

$$y(t) = 5 \cdot e^{2t}$$

K ZAPAMATOVÁNÍ ($a = \text{konstanta}$)

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(t) = K \cdot e^{at}, K \in \mathbb{R} \\ y(t) = y_0 \cdot e^{at} \end{cases}$$

Krok 2: Najdi jedno řešení $y_P(t)$, tj. řešení rovnice: $y'_P(t) = a(t)y_P(t) + b(t)$

TRIK Variace konstanty ... „univerzální“ metoda

Vyjdeme z řešení homogenní rovnice $y_H = K \cdot e^{A(t)}$

a místo konstanty K uvažujeme funkci $\varphi(t)$: $y_P = \varphi(t) \cdot e^{A(t)}$

Hledáme $\varphi(t)$, aby platila diferenciální rovnice:

$$y'_P(t) = a(t)y_P(t) + b(t)$$

$$y'_P(t) = [\varphi(t) \cdot e^{A(t)}]' = \varphi'(t) \cdot e^{A(t)} + \varphi(t) \cdot e^{A(t)} \cdot A'(t) = \varphi'(t) \cdot e^{A(t)} + \varphi(t) \cdot e^{A(t)} \cdot a(t)$$

Po dosazení

$$\varphi'(t) \cdot e^{A(t)} + \varphi(t) \cdot e^{A(t)} \cdot a(t) = a(t) \varphi(t) \cdot e^{A(t)} + b(t)$$

$$\varphi'(t) \cdot e^{A(t)} = b(t) \quad / \cdot e^{-A(t)}$$

Poznámka: pokud jsme počítali dobře, musí členy s $\varphi(t)$ vždy vypadnout !

$$\varphi'(t) = e^{-A(t)} \cdot b(t) \quad / \int dt$$

$$\varphi(t) = \int e^{-A(t)} \cdot b(t) dt \quad \dots \text{ existuje, protože } b(t) \text{ je spojitá}$$

$\Rightarrow$

$$y_P(t) = e^{A(t)} \cdot \int e^{-A(t)} \cdot b(t) dt$$

Platí tzv. Princip superpozice (sériové zapojení zdrojů), tj.

je-li $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$, potom najdeme y_{P1} tak, že

$$y'_{P1}(t) = a(t)y_{P1}(t) + b_1(t)$$

a y_{P2} takové, že

$$y'_{P2}(t) = a(t)y_{P2}(t) + b_2(t)$$

a potom

$$y_P(t) = y_{P1}(t) + y_{P2}(t)$$

Krok 3: Sečti z kroku 1 a 2, tj.

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

Krok 4: Dosad' počáteční podmínky, abychom měli jedno řešení počáteční úlohy.

Poznámky:

- Odvodili jsme vzorce pro $y_H(t)$ a $y_P(t)$, které se nebudeme učit nazpaměť, tj. pro konkrétní rovnici vždy provedeme kroky 1 a 2.
- Mají kroky 1 a 2 smysl pro všechny funkce $a(t)$ a $b(t)$?
Určitě pro spojitě $a(t)$ a $b(t)$!

Příklad: $\begin{cases} y'(t) = 2y(t) + e^{-t}, & t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad a(t) = 2 (= a = \text{konstanta}), t \in \mathbb{R} \quad b(t) = e^{-t}$

Krok 1: Hledáme všechna řešení homogenní rovnice $y'(t) = 2y(t)$.

Jak ? Separací nebo chytře viz dříve! (str. 15)

$$y_H(t) = K \cdot e^{2t}, \quad K \in \mathbb{R}$$

Krok 2: Najdeme jedno $y_P(t)$ řešení nehomogenní rovnice $y'_P(t) = 2y_P(t) + e^{-t}$.

Jak ? Variací konstanty:

předpokládejme, že $y_P(t) = \varphi(t) \cdot e^{2t}$, kde $\varphi(t)$ je hledaná funkce !

$$y'_P(t) = [\varphi(t) \cdot e^{2t}]' = \varphi'(t) \cdot e^{2t} + \varphi(t) \cdot e^{2t} \cdot 2$$

dosadíme:

$$\varphi'(t) \cdot e^{2t} + \varphi(t) \cdot e^{2t} \cdot 2 = 2 \cdot \varphi(t) \cdot e^{2t} + e^{-t}$$

$$\varphi'(t) \cdot e^{2t} = e^{-t} \quad / : e^{2t}$$

$$\varphi'(t) = e^{-3t} \quad / \int dt$$

$$\varphi(t) = \int e^{-3t} dt = -\frac{1}{3}e^{-3t} + \textcolor{teal}{C}$$

$$y_P(t) = -\frac{1}{3}e^{-3t} \cdot e^{2t} = -\frac{1}{3}e^{-t}$$

Krok 3: $y(t) = y_H(t) + y_P(t) = K \cdot e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}, \quad K \in \mathbb{R}$

Krok 4: Počáteční podmínka: $y(0) = K \cdot e^{2 \cdot 0} - \frac{1}{3}e^0 = K - \frac{1}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{K = \frac{1}{3}}$

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}$$

Příklad:
$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{2y(t)}{t} + t^3 \\ y(2) = 4 \end{cases} \quad a(t) = -\frac{2}{t} \quad b(t) = t^3$$

Krok 1: Hledáme $y_H(t)$ separací proměnných: $y'(t) = -\frac{2y}{t} = -\frac{2}{t} \cdot y = g(t) \cdot h(y)$

1. konstantní řešení $y \equiv 0$

2.
$$\int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{2}{t} dt$$

$$\ln |y| = -2 \ln |t| + \bar{c}, \quad \bar{c} \in \mathbb{R}$$

$$\ln |y| = -2 \ln |t| + \ln |c|, \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\ln |y| = \ln \frac{|c|}{t^2}$$

$$|y| = \frac{|c|}{t^2}$$

$$y_H(t) = \frac{c}{t^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Krok 2: Hledáme $y_P(t)$ variací konstanty: $y_P(t) = \varphi(t) \cdot t^{-2}$

$$y'_P(t) = \varphi'(t) \cdot t^{-2} + \varphi(t) \cdot \frac{-2}{t^3}$$

po dosazení:

$$\varphi'(t) \cdot t^{-2} + \varphi(t) \cdot \frac{-2}{t^3} = \frac{2 \cdot \varphi(t) \cdot t^{-2}}{t} + t^3$$

$$\varphi'(t) \cdot t^{-2} = t^3$$

$$\varphi'(t) = t^5$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{6}t^6 \quad \longrightarrow$$

$$y_P(t) = \frac{1}{6}t^6 \cdot t^{-2} = \frac{1}{6}t^4$$

Krok 3: Obecné řešení

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = \frac{c}{t^2} + \frac{1}{6}t^4, \quad c \in \mathbb{R}$$

Krok 4: Počáteční podmínka: $y(2) = \frac{c}{2^2} + \frac{1}{6}2^4 = \frac{c}{4} + \frac{8}{3} = 4 \Rightarrow \underline{\underline{c = \frac{16}{3}}}$

$$y(t) = \frac{16}{3}t^{-2} + \frac{1}{6}t^4$$

Lineární ODR n -tého řádu s konstantními koeficienty

Jedná se o úlohu najít n -krát diferencovatelnou funkci $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že platí

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b(t), \quad t \in I,$$

kde je zadáno:

- $I \subset \mathbb{R}$... interval
- $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$... koeficienty rovnice

Poznámka:

Kdyby $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, potom $y(t)$ najdeme přímou integrací (n -krát), např.

$$y''' = 0 \Rightarrow y'' = c_1 \Rightarrow y' = c_1t + c_2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}c_1t^2 + c_2t + c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

- $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$... spojitá ... pravá strana rovnice
pro $b(t) = 0$... homogenní rovnice
- + počáteční podmínky (n)

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_{01}, \quad y''(t_0) = y_{02}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$$

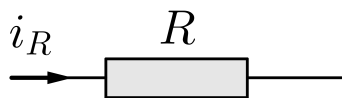
$$t_0 \in I, \text{ např. } t_0 = 0$$

$$y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1} \in \mathbb{R}$$

Odkud se berou?

Příklad: RLC obvod v sériovém zapojení

Víme, že platí:



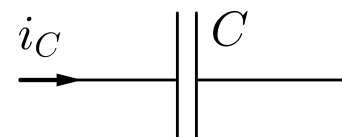
$$u_R = R \cdot i_R$$

Ohmův zákon



$$u_L(t) = L \cdot i'_L(t)$$

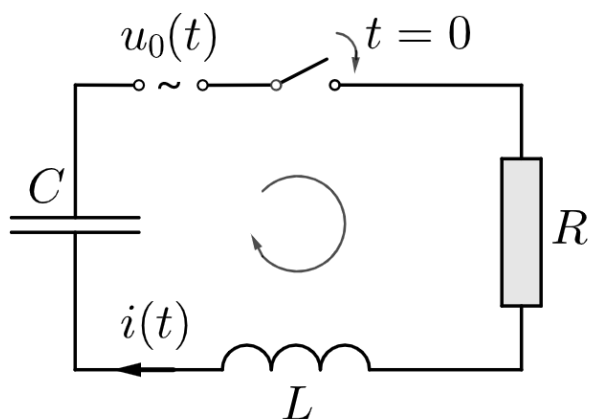
zákon el. mag. indukce



$$u'_C(t) = \frac{1}{C} \cdot i_C(t)$$

okamžitý náboj na deskách kondenzátoru je přímo úměrný okamžitému napětí, tj.

$$q = Cu \Rightarrow i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$



Kirchhoffovy zákony:

1. rovnice kontinuity el. proudu:

$$i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) = i(t) \dots$$

... zvolíme za stavovou proměnnou

2. zákon zachování energie:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) - u_0(t) = 0$$

$$R \cdot i(t) + L \cdot i'(t) + u_C(t) = u_0(t) \quad / \frac{d}{dt}$$

$$R \cdot i'(t) + L \cdot i''(t) + \frac{1}{C} \cdot i_C(t) = u'_0(t) \quad / : L$$

$$i''(t) + \frac{R}{L} i'(t) + \frac{1}{CL} i(t) = \frac{u'_0(t)}{L}$$

... lineární ODR 2. řádu s konst. koeficienty

$$a_1 = \frac{R}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{CL}, \quad b(t) = \frac{u'_0(t)}{L}$$

Poznámka:

• pro $u_0(t) = U_0, t \in \mathbb{R} \Rightarrow u'_0(t) = 0 \Rightarrow b(t) = 0$... homogenní rovnice

• pro $u_0(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow b(t) = \frac{u'_0(t)}{L} = \frac{U_0 \omega}{L} \cos(\omega t + \varphi)$... nehomogenní rovnice

Metoda řešení

GOOD NEWS: Platí vše jako u rovnic 1. řádu

Platí: Každé řešení $y(t)$ má tvar: $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$, kde

$y_H(t)$ je řešení homogenní rovnice,
tj. pro $b(t) = 0$

$y_H(t)$... **homogenní řešení**

⋮

$y_P(t)$ je jedno řešení nehomogenní rovnice,
tj. s pravou stranou $b(t)$

$y_P(t)$... **partikulární řešení**

Krok 1: Najdeme všechna řešení homogenní rovnice $y_H(t)$, tzn. obecné řešení
(separace proměnných, „chytře“)

Krok 2: Najdeme jedno řešení nehomogenní rovnice $y_P(t)$, tzv. partikulární řešení
(variací konstant, ...)

Krok 3: Sečteme $y_H(t)$ a $y_P(t)$

Krok 4: Dosadíme počáteční podmínky

Krok 1

Hledáme všechna $y_H(t)$.

Platí: Existuje n lineárně nezávislých funkcí $y_1, y_2, \dots, y_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takových, že řeší homogenní rovnici a každé další řešení homogenní rovnice má tvar:

$$y_H(t) = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) + \dots + K_n y_n(t), \quad \text{kde } K_1, K_2, \dots, K_n \in \mathbb{R}$$

$$\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\} \quad \dots \quad \text{fundamentální systém (FS)}$$

Prvky FS hledáme ve tvaru:

$$y(t) = e^{\lambda t}, \text{ kde } \lambda \text{ je (zatím) neznámé číslo.}$$

Příklad: $n = 2$ $y'' - y = 0$, tj. $y''(t) - y(t) = 0, t \in \mathbb{R}$

předpokládejme: $y(t) = e^{\lambda t}$

$$y'(t) = e^{\lambda t} \cdot \lambda$$

$$y''(t) = e^{\lambda t} \cdot \lambda \cdot \lambda = e^{\lambda t} \cdot \lambda^2$$

dosadíme do rovnice:

$$e^{\lambda t} \cdot \lambda^2 - e^{\lambda t} = 0 \quad / : e^{\lambda t} > 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \dots \quad \text{charakteristická rovnice}$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\underline{\lambda_{1,2} = \pm 1}$$

$$\text{FS: } \left\{ \underbrace{e^t}_{=y_1(t)}, \underbrace{e^{-t}}_{=y_2(t)} \right\}$$

$$\underline{y_H(t)} = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) = \underline{K_1 e^t + K_2 e^{-t}}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Poznámky:

- místo FS: $\{e^t, e^{-t}\}$ lze brát FS: $\{\sinh t, \cosh t\}$, protože

$$\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad \text{a} \quad \cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{po sečtení:} \quad \sinh t + \cosh t = e^t \\ \text{po odečtení:} \quad \cosh t - \sinh t = e^{-t} \end{array} \right)$$

- charakteristickou rovnici lze psát rovnou !

Příklad:

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda_{1,2} = \pm j \in \mathbb{C}$$

$$\left(\begin{array}{l} y(t) = e^{\lambda t} \\ y'(t) = \lambda e^{\lambda t} \\ y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \\ \lambda^2 e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0 \quad / : e^{\lambda t} > 0 \\ \lambda^2 + 1 = 0 \end{array} \right)$$

$$\mathbb{CFS}: \{e^{jt}, e^{-jt}\}$$

$$y_H(t) = K_1 e^{jt} + K_2 e^{-jt}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{C}$$

Problém: $y_H(t)$ je komplexní funkce
a my chceme reálnou !

Platí ovšem Eulerova identita:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

$\cos \varphi$... reálná část

$\sin \varphi$... imaginární část

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t$$

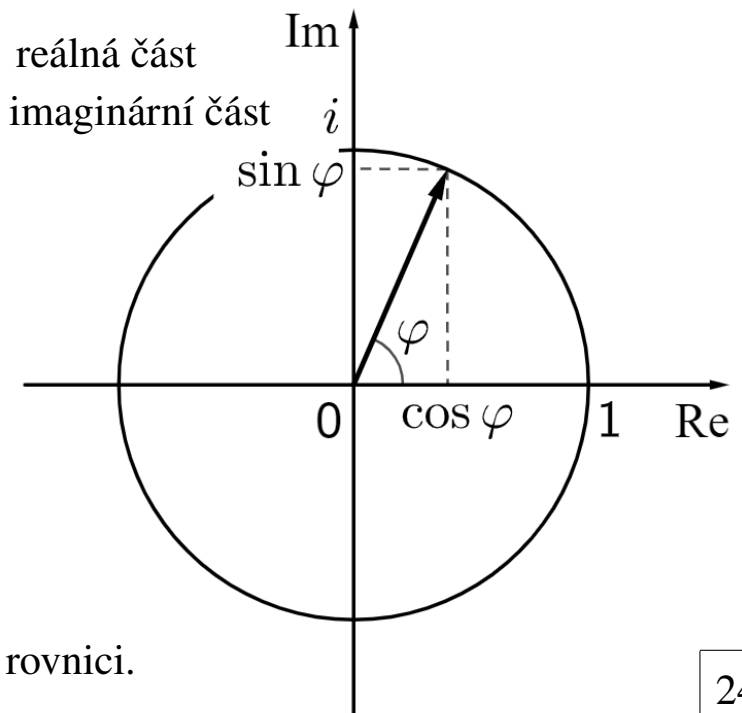
$$e^{-jt} = \cos t - j \sin t$$

$$e^{jt} + e^{-jt} = 2 \cos t \Rightarrow \cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})$$

$$e^{jt} - e^{-jt} = 2j \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})$$

$$\mathbb{RFS}: \{\cos t, \sin t\} \quad (\star)$$

$$y_H(t) = K_1 \cos t + K_2 \sin t, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$



Poznámka: Jestliže $\lambda_1 = 1 + 3j \in \mathbb{C}$ řeší charakteristickou rovnici, musí i $\lambda_2 = 1 - 3j \in \mathbb{C}$ (komplexně sdružené) řešit charakteristickou rovnici.

(★)

$$\mathbb{C}\text{FS: } \left\{ \underbrace{e^{jt}}_{y_1(t)}, \underbrace{e^{-jt}}_{y_2(t)} \right\}$$

$y_1(t), y_2(t) \dots$ řeší homogenní rovnici

$\Rightarrow$ libovolná jejich lineární kombinace také řeší homogenní rovnici

$$\tilde{y}_1(t) = \frac{1}{2}y_1(t) + \frac{1}{2}y_2(t) = \cos t$$

$$\tilde{y}_2(t) = \frac{1}{2j}y_1(t) - \frac{1}{2j}y_2(t) = \sin t$$

musí řešit homogenní rovnici

$$\mathbb{R}\text{FS: } \left\{ \underbrace{\cos t}_{\tilde{y}_1(t)}, \underbrace{\sin t}_{\tilde{y}_2(t)} \right\}$$

Poznámka: Pro určení $\mathbb{R}\text{FS}$ vezmi reálnou část a imaginární část komplexní funkce.

Příklad:

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad y(t) = e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \dots \quad \text{charakteristická rovnice}$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \quad \dots \quad \text{násobný kořen !}$$

$$\text{FS: } \{e^t, t \cdot e^t\} \Rightarrow \underline{y_H(t) = K_1 e^t + K_2 t e^t, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}}$$

Cvičení:

Ověřme, že $y_2(t) = t e^t$ řeší diferenciální rovnici $y'' - 2y' + y = 0$.

$$y_2'(t) = [t \cdot e^t]' = e^t + t \cdot e^t = (1 + t) e^t$$

$$y_2''(t) = [(1 + t) \cdot e^t]' = e^t + (1 + t) e^t = (2 + t) e^t$$

po dosazení:

$$\underbrace{(2 + t) e^t}_{=y_2''} - 2 \underbrace{(1 + t) e^t}_{=y_2'} + \underbrace{t e^t}_{=y_2} = 0$$

$$\underbrace{[2 + t - 2(1 + t) + t]}_{=0} e^t = 0 \quad \checkmark$$

Poznámky:

- Pro rovnici 2. řádu máme v $y_H(t)$ dvě neznámé konstanty !
 $\Rightarrow$ Pro jejich určení potřebujeme dvě počáteční podmínky, např. $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
- Stejným způsobem řešíme i rovnice 3., 4., 5., ... řádu.

REKAPITULACE

Lineární ODR 2. řádu:

např.

$$y''(t) - y(t) = 2e^{3t}$$

Víme, že:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) \quad \leftarrow \text{stačí najít jedno, Jak ?}$$

 $\vdots$ $\vdots$ pro $b(t) = 0$ pro $b(t) = 2e^{3t}$

Krok 1

Krok 2

Krok 1

 $y_H(t) = ?$ Předpokládáme: $y(t) = e^{\lambda t}$, $t \dots$ číslo

$$y''(t) - y(t) = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \underline{\lambda_{1,2} = \pm 1}$$

FS: $\{e^t, e^{-t}\}$

$$\underline{y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Krok 2

Hledáme jedno $y_P(t)$, tj. řešení nehomogenní rovnice s pravou stranou $b(t)$ Platí princip superpozice:Jestliže $b(t) = b_1(t) \pm b_2(t)$ a $y_1(t)$ je řešení rovnice s pravou stranou $b_1(t)$ a $y_2(t)$ je řešení rovnice s pravou stranou $b_2(t)$,potom $y(t) = y_1(t) \pm y_2(t)$ je řešení rovnice s pravou stranou $b(t) = b_1(t) \pm b_2(t)$.Poznámka: Neplatí pro součin a podíl !!!

Metoda variace konstant (pro výpočet $y_P(t)$)

- + univerzální, tj. lze použít pro všechny (spojité) pravé strany $b(t)$
- dlouhý výpočet, musíme umět integrovat

Předpokládáme:

$$y_P(t) = \varphi_1(t) \cdot e^t + \varphi_2(t) \cdot e^{-t}, \quad \varphi_1, \varphi_2 \dots \text{ neznámé funkce}$$

φ_1 a φ_2 hledáme tak, aby byla splněna nehomogenní rovnice:

$$y_P''(t) - y_P(t) = 2e^{3t}$$

$$y_P'(t) = \varphi_1'(t)e^t + \varphi_1(t)e^t + \varphi_2'(t)e^{-t} - \varphi_2(t)e^{-t}$$

Zastav se !

$$\text{Polož: } \varphi_1'(t)e^t + \varphi_2'(t)e^{-t} = 0 \quad 1. \text{ rovnice} \quad \leftarrow \quad \text{FS: } \{e^t, e^{-t}\}$$

$$\Rightarrow y_P'(t) = \varphi_1(t)e^t - \varphi_2(t)e^{-t}$$

$$y_P''(t) = \varphi_1'(t)e^t + \varphi_1(t)e^t - \varphi_2'(t)e^{-t} + \varphi_2(t)e^{-t}$$

Dosadíme:

$$(\varphi_1'(t)e^t + \underline{\varphi_1(t)e^t} - \varphi_2'(t)e^{-t} + \underline{\varphi_2(t)e^{-t}}) - (\underline{\varphi_1(t)e^t} + \underline{\varphi_2(t)e^{-t}}) = 2e^{3t}$$

Poznámka: členy bez derivací $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$ musí vypadnout !

$$\varphi_1'(t)e^t - \varphi_2'(t)e^{-t} = 2e^{3t} \quad 2. \text{ rovnice}$$

Dostali jsme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1'(t)e^t & + & \varphi_2'(t)e^{-t} = 0 \\ \varphi_1'(t)e^t & - & \varphi_2'(t)e^{-t} = 2e^{3t} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1'(t)e^t + \varphi_2'(t)e^{-t} &= 0 \\ \varphi_1'(t)e^t - \varphi_2'(t)e^{-t} &= 2e^{3t}\end{aligned}$$

sečtením:

$$\begin{aligned}2\varphi_1'(t)e^t &= 2e^{3t} \quad / : 2e^t \\ \varphi_1'(t) &= e^{2t} \quad / \int \\ \varphi_1(t) &= \frac{1}{2}e^{2t} + c\end{aligned}$$

odečtením:

$$\begin{aligned}2\varphi_2'(t)e^{-t} &= -2e^{3t} \quad / : 2e^{-t} \\ \varphi_2'(t) &= -e^{4t} \quad / \int \\ \varphi_2(t) &= -\frac{1}{4}e^{4t} + c\end{aligned}$$

tj. $y_P(t) = \varphi_1(t) \cdot e^t + \varphi_2(t) \cdot e^{-t} = \frac{1}{2}e^{2t} \cdot e^t - \frac{1}{4}e^{4t} \cdot e^{-t} = \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{3t} = \frac{1}{4}e^{3t}$

Krok 3

$$\underline{y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Krok 4

Počáteční podmínky $\rightarrow$ určíme konstanty c_1, c_2

např. $y(0) = 0$

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{-0} + \frac{1}{4}e^{3 \cdot 0} = c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$y'(0) = 1$$

$$y'(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t}$$

$$y'(0) = c_1 e^0 - c_2 e^{-0} + \frac{3}{4}e^{3 \cdot 0} = c_1 - c_2 + \frac{3}{4} = 1$$

Tedy:

$$\begin{aligned}\underline{c_1 + c_2 = -\frac{1}{4}} &\quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}2c_1 &= 0 \Rightarrow \underline{c_1 = 0} \\ 0 + c_2 &= -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{c_2 = -\frac{1}{4}}\end{aligned} &\quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}}\end{aligned}$$

Poznámky:

- Stejně funguje i pro rovnice vyššího řádu, např. $n = 3$

$$\Rightarrow \text{FS: } \{y_1(t), y_2(t), y_3(t)\} \Rightarrow y_H(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Krok 1

$$\Rightarrow y_P(t) = \varphi_1(t) y_1(t) + \varphi_2(t) y_2(t) + \varphi_3(t) y_3(t), \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 = ?$$

Krok 2

Dostaneme soustavu (lze psát rovnou) :

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) y_1(t) + \varphi_2'(t) y_2(t) + \varphi_3'(t) y_3(t) &= 0 \\ \varphi_1'(t) y_1'(t) + \varphi_2'(t) y_2'(t) + \varphi_3'(t) y_3'(t) &= 0 \\ \varphi_1'(t) y_1''(t) + \varphi_2'(t) y_2''(t) + \varphi_3'(t) y_3''(t) &= b(t) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \\ \varphi_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \varphi_3'(t) \Rightarrow \int \Rightarrow \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$$

- V minulém příkladu $b(t) = 2e^{3t} \Rightarrow y_P(t) = \frac{1}{4}e^{3t}$ má stejný tvar !

$\Rightarrow$ Lze použít tzv. metodu odhadu

Metoda odhadu (pro výpočet $y_P(t)$)

- + rychlá, jednoduchý výpočet, nemusíme integrovat !
- lze použít jen pro speciální tvar pravé strany (polynom, exponenciála, sinus, kosinus)

Kuchařka:

1. Podívej se, zda je pravá strana $b(t)$ nebo její násobek prvkem FS.
2. **NE** $\Rightarrow$ použij $y_P(t)$ ve stejném tvaru jako $b(t)$
ANO $\Rightarrow$ vynásob tvar $b(t)$ proměnnou t (tolikrát, abys již $y_P(t)$ neměl ve FS)

Příklady:

1. $y''(t) - y(t) = 2e^{3t}$

Krok 1 FS: $\{e^t, e^{-t}\} \Rightarrow \underline{y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Krok 2 $b(t) = 2e^{3t} \dots$ není násobkem žádné funkce z FS

$\Rightarrow y_P(t) = A e^{3t}, \quad A \in \mathbb{R} \dots$ neznámá konstanta,

kterou hledáme tak, aby byla splněna nehomogenní rovnice: $y_P''(t) - y_P(t) = 2e^{3t}$

$\Rightarrow y_P'(t) = A \cdot e^{3t} \cdot 3$

$\Rightarrow y_P''(t) = 3 \cdot A \cdot e^{3t} \cdot 3 = 9Ae^{3t}$

$9Ae^{3t} - Ae^{3t} = 2e^{3t} \quad / : e^{3t}$

$9A - A = 2$

$A = \frac{1}{4}$

$y_P(t) = \frac{1}{4}e^{3t}$

2. $y''(t) - y(t) = t$

Krok 1 FS: $\{e^t, e^{-t}\} \Rightarrow \underline{y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Krok 2 $b(t) = t \quad \dots \quad \underline{\text{není}}$ násobkem žádné funkce z FS

$\Rightarrow y_P(t) = At + B, \quad A, B \in \mathbb{R} \quad \dots \quad \text{neznámé konstanty,}$

které hledáme tak, aby byla splněna nehomogenní rovnice: $y_P''(t) - y_P(t) = t$

$\Rightarrow y_P'(t) = A$

$\Rightarrow y_P''(t) = 0$

$0 - (At + B) = t + 0$

$A = -1 \quad \text{u } t^1$

$B = 0 \quad \text{u } t^0$

$y_P(t) = -t$

3. $y''(t) - y(t) = e^t$

Krok 1 FS: $\{e^t, e^{-t}\} \Rightarrow \underline{y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Krok 2 $b(t) = e^t \quad \dots \quad \underline{\text{je}}$ obsaženo v FS !

$\Rightarrow y_P(t) = t \cdot A e^t, \quad A \in \mathbb{R} \quad \dots \quad \text{neznámá konstanta,}$

kterou hledáme tak, aby byla splněna nehomogenní rovnice: $y_P''(t) - y_P(t) = e^t$

$\Rightarrow y_P'(t) = A e^t + t A e^t$

$\Rightarrow y_P''(t) = A e^t + A e^t + t A e^t = 2A e^t + t A e^t$

$2A e^t + \underline{t A e^t} - \underline{t A e^t} = e^t \quad / : e^t$

$2A = 1$

$A = \frac{1}{2}$

$y_P(t) = \frac{1}{2} t e^t$

4. $y''(t) - y(t) = \sin t$

Krok 1 FS: $\{e^t, e^{-t}\} \Rightarrow \underline{y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Krok 2 $b(t) = \sin t \quad \dots$ má specifický tvar, není obsaženo ve FS !

$\Rightarrow y_P(t) = A \sin t + B \cos t^*$, $A, B \in \mathbb{R} \quad \dots$ neznámé konstanty,

které hledáme tak, aby byla splněna nehomogenní rovnice: $y_P''(t) - y_P(t) = \sin t$

$\Rightarrow y_P'(t) = A \cos t - B \sin t$

$\Rightarrow y_P''(t) = -A \sin t - B \cos t$

$-A \sin t - B \cos t - (A \sin t + B \cos t) = \sin t$

$-2A \sin t - 2B \cos t = 1 \cdot \sin t + 0 \cdot \cos t$

$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0$

$y_P(t) = -\frac{1}{2} \sin t$

Poznámka k *:

Bod $[A, B]$ v rovině lze popsat pomocí

→ vzdálenosti od počátku $\dots R$

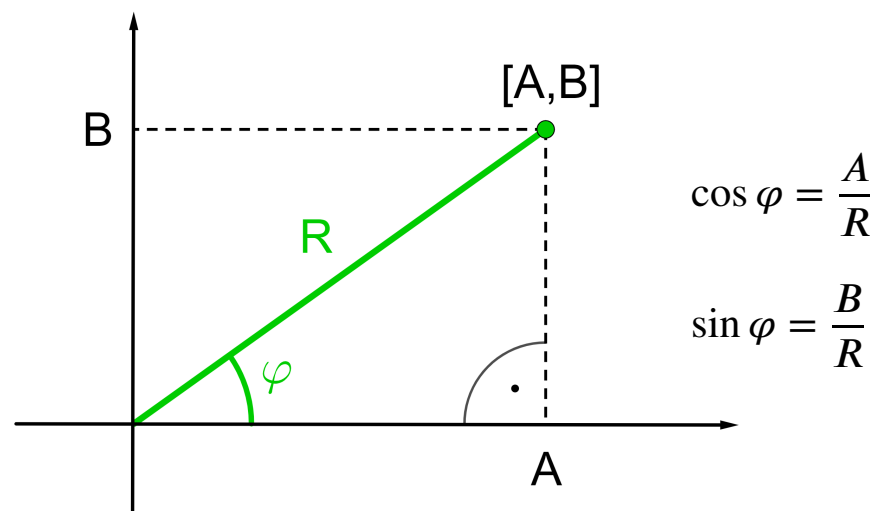
→ velikostí úhlu $\dots \varphi$

(polární souřadnice)

→ $y_P(t) = R \cos \varphi \sin t + R \sin \varphi \cos t$

$y_P(t) = R \underbrace{(\cos \varphi \sin t + \sin \varphi \cos t)}_{=\sin(t+\varphi)}$

$y_P(t) = R \sin(t + \varphi), \quad R \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$



tj. $A = R \cos \varphi, \quad B = R \sin \varphi$

Další příklady:

pravá strana $b(t)$ (buzení)	FS	partikulární řešení $y_p(t)$ (odezva)
$3 e^t$	e^{2t}, e^{3t}	$A e^t$
$5 t e^t$	e^t, e^{-t}	$(At + B) e^t \cdot t$
$5 t e^t$	$e^t, t e^t$	$(At + B) e^t \cdot t^2$
$2 \sin 6t$	$\sin t, \cos t$	$A \sin 6t + B \cos 6t$
$2 \sin 6t$	$\sin 6t, \cos 6t$	$(A \sin 6t + B \cos 6t) \cdot t$
t^3	e^t, e^{-t}	$At^3 + Bt^2 + Ct + D$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

• viz

$$y'' - 2y' + y = 5 t e^t$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \text{charakteristická rovnice}$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \quad \text{dvojnásobný kořen} \quad \text{FS: } \{e^t, t e^t\}$$

$$y_H(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_P(t) = (At + B) e^t \cdot t^2, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y_P(t) = (At + B) e^t \cdot t} = (At^2 + Bt) e^t$$

$$y'_P(t) = (2At + B) e^t + (At^2 + Bt) e^t = [At^2 + (2A + B)t + B] e^t$$

$$y''_P(t) = (2At + 2A + B) e^t + [At^2 + (2A + B)t + B] e^t = [At^2 + (4A + B)t + 2(A + B)] e^t$$

$$[At^2 + (4A + B)t + 2(A + B)] e^t - 2 [At^2 + (2A + B)t + B] e^t + (At^2 + Bt) e^t = 5te^t$$

$$t^0 : 2(A + B) - 2B = 0$$

$$t^1 : 4A + B - 2(2A + B) + B = 5$$

$$t^2 : A - 2A + A = 0$$

$$2A = 0 \Rightarrow \underline{A = 0}$$

$$0B = 5 \quad \text{⚡⚡⚡}$$

$$\boxed{y_P(t) = (At + B) e^t \cdot t^2} = (At^3 + Bt^2) e^t$$

$$y'_P(t) = (3At^2 + 2Bt) e^t + (At^3 + Bt^2) e^t = [At^3 + (3A + B)t^2 + 2Bt] e^t$$

$$y''_P(t) = (3At^2 + 2(3A + B)t + 2B) e^t + [At^3 + (3A + B)t^2 + 2Bt] e^t = [At^3 + (6A + B)t^2 + (6A + 4B)t + 2B] e^t$$

$$[At^3 + (6A + B)t^2 + (6A + 4B)t + 2B] e^t - 2 [At^3 + (3A + B)t^2 + 2Bt] e^t + (At^3 + Bt^2) e^t = 5te^t$$

$$t^0 : 2B = 0$$

$$t^1 : 6A + 4B - 4B = 5$$

$$t^2 : 6A + B - 6A - 2B + B = 0$$

$$t^3 : A - 2A + A = 0$$

$$\underline{B = 0}$$

$$6A = 5 \Rightarrow \underline{A = \frac{5}{6}}$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\underline{y_P(t)} = \left(\frac{5}{6}t + 0 \right) e^t \cdot t^2 = \underline{\underline{\frac{5}{6}t^3 e^t}}$$

Příklad:

$$y'' - y' = t - e^{-t}$$

Krok 1

$$y_H(t) = ? \quad \lambda^2 - \lambda = 0 \quad \dots \quad \text{charakteristická rovnice}$$

$$\lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1$$

$$\text{FS: } \{1, e^t\}$$

$$\underline{y_H(t) = c_1 + c_2 e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Krok 2

$$y_P(t) = ?$$

Princip surepozice:

$$y_P(t) = y_{P1}(t) + y_{P2}(t)$$

$$y_{P1}(t) = (At + B) \cdot t \quad \dots \quad b_1(t) = t \quad (\text{1 je v FS})$$

$$y_{P2}(t) = Ce^{-t} \quad \dots \quad b_2(t) = -e^{-t}$$

$$y_{P1} : \quad y'_{P1}(t) = 2At + B$$

$$y''_{P1}(t) = 2A \quad \Rightarrow \quad 2A - (2At + B) = t$$

$$t^0 : \quad 2A - B = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{B = -1}$$

$$t^1 : \quad -2A = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{A = -\frac{1}{2}}$$

$$y_{P2} : \quad y'_{P2}(t) = -Ce^{-t}$$

$$y''_{P2}(t) = Ce^{-t} \quad \Rightarrow \quad Ce^{-t} + Ce^{-t} = -e^{-t}$$

$$2C = -1 \quad \Rightarrow \quad \underline{C = -\frac{1}{2}}$$

$$\underline{y_P(t) = \left(-\frac{1}{2}t - 1\right)t - \frac{1}{2}e^{-t}}$$

Metoda odhadu - obecné schéma

Pravá strana obyčejné diferenciální rovnice n -tého řádu musí být ve tvaru

$$b(t) = e^{\alpha t} (P(t) \cos(\beta t) + Q(t) \sin(\beta t)),$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou daná čísla, P je polynom stupně $k \in \mathbb{N}_0$ a Q je polynom stupně $\ell \in \mathbb{N}_0$. Položme

$$m := \max\{k, \ell\}.$$

Jestliže komplexní číslo $\alpha + j\beta$, které se nazývá *kritické číslo pravé strany*,

- (i) **není** řešením charakteristické rovnice, potom partikulární řešení odhadujeme ve tvaru

$$y_P(t) = e^{\alpha t} (\tilde{P}(t) \cos(\beta t) + \tilde{Q}(t) \sin(\beta t)),$$

kde $\tilde{P}$ a $\tilde{Q}$ jsou polynomy stupně m ;

- (ii) **je** r -násobným řešením charakteristické rovnice, potom partikulární řešení odhadujeme ve tvaru

$$y_P(t) = t^r e^{\alpha t} (\tilde{P}(t) \cos(\beta t) + \tilde{Q}(t) \sin(\beta t)),$$

kde $\tilde{P}$ a $\tilde{Q}$ jsou polynomy stupně m .

Poznámky:

- Jestliže $\alpha + j\beta \in \mathbb{C}$ není řešením charakteristické rovnice, potom funkce

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{a} \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

nejdou prvky fundamentálního systému. V KUCHAŘCE toto odpovídá situaci, že pravá strana ani její číselný násobek není ve fundamentálním systému;

- Jestliže $\alpha + j\beta \in \mathbb{C}$ je řešením charakteristické rovnice, například 2-násobným, potom funkce

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad te^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{a} \quad te^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

jsou prvky fundamentálního systému. V KUCHAŘCE toto odpovídá situaci, že pravá strana, respektive její číselný násobek, je ve fundamentálním systému a násobili bychom proměnnou t tolikrát, aby odhadované partikulární řešení y_P již nebylo ve fundamentálním systému.

Soustavy n lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty

Motivace: Stav obvodu ve většině případů nelze v čase t popsat jediným skalárním parametrem, např. $i(t)$.
Potřebujeme více parametrů (2,3,...); např. smyčkové proudy.

Matematicky: Zobrazení, které reálnému času t přiřadí vektor $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$
se nazývá vektorová funkce jedné reálné proměnné.

Zápis: $\mathbb{R} \supset D \ni t \longrightarrow \vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$

D ... definiční obor $\vec{y}(t)$... nejvýše jedno (jde o funkci), leží v oboru hodnot $H \subset \mathbb{R}^n$

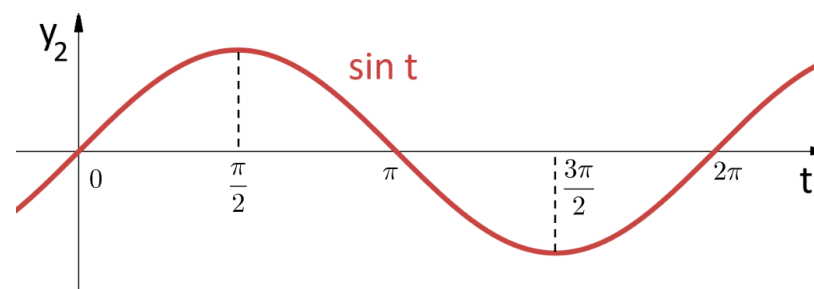
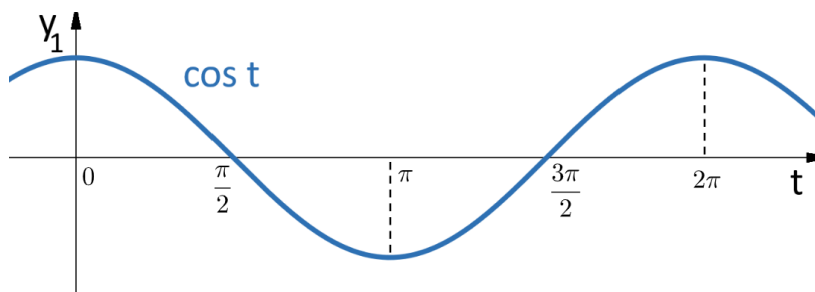
Úmluva: $n = 2$... abychom ušetřili psaní !

Příklad:

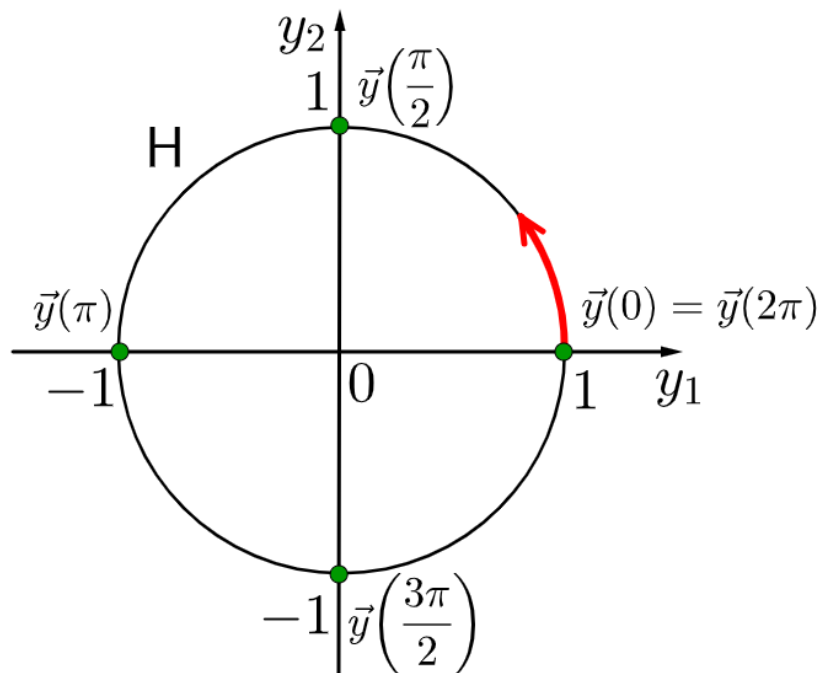
$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{ll} y_1(t) = \cos t & D(y_1) = \mathbb{R} \\ y_2(t) = \sin t & D(y_2) = \mathbb{R} \end{array} \right\} D = \mathbb{R} \dots \text{průnik definičních oborů jednotlivých složek}$$

Znázornění:

1) po jednotlivých složkách (není názorné)



2) Nakreslíme obor hodnot $H \subset \mathbb{R}^2$



$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(\pi) = \begin{pmatrix} \cos \pi \\ \sin \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{y}(t)\| := \sqrt{[y_1(t)]^2 + [y_2(t)]^2} \quad \dots \quad \text{Eukleidovská vzdálenost}$$

$$\|\vec{y}(t)\| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \sqrt{1} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

v každém čase t je vzdálenost $\vec{y}(t)$ od počátku rovna 1

kružnice se středem $[0, 0]^T$ a poloměrem $r = 1 \quad \dots \quad H$

$H \quad \dots \quad$ se nazývá **křivka** a

$\vec{y}(t) \quad \dots \quad$ se nazývá **parametrizace dané křivky** (určuje směr pohybu, rychlost pohybu $\dots$)

Poznámka: Pro jednu křivku existuje více parametrizací (nekonečně mnoho).

• Limita vektorové funkce

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{y}(t) = \vec{b}} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{y}(t) - \vec{b}\| = 0,$$

kde $\|\vec{y}(t) - \vec{b}\| = \sqrt{(y_1(t) - b_1)^2 + (y_2(t) - b_2)^2} \dots$ vzdálenost bodů $\vec{y}(t)$ a $\vec{b}$

Platí: $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{y}(t) = \vec{b} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} y_1(t) = b_1 \wedge \lim_{t \rightarrow t_0} y_2(t) = b_2$

• Spojitost vektorové funkce

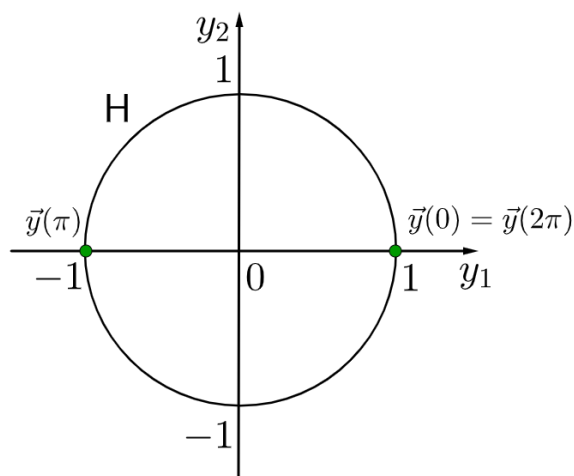
$\vec{y}(t)$ je spojitá v bodě t_0 , jestliže $\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{y}(t) = \vec{y}(t_0)}$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} y_1(t) = y_1(t_0) \wedge \lim_{t \rightarrow t_0} y_2(t) = y_2(t_0)$$

$$\Leftrightarrow y_1(t) \text{ i } y_2(t) \text{ jsou spojité v bodě } t_0$$

Příklad:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} = D$$



$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} \vec{y}(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow 0} \cos t \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\vec{y}(0)}$$

$\dots$ $\vec{y}(t)$ je spojitá v $t_0 = 0$

(je dokonce spojitá ve všech bodech $t_0 \in D$!)

- Derivace vektorové funkce

Derivace funkce $\vec{y}(t)$ v bodě t_0 je

$$\vec{y}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{y}(t) - \vec{y}(t_0)}{t - t_0} \quad (\text{nemusí existovat !})$$

Platí:

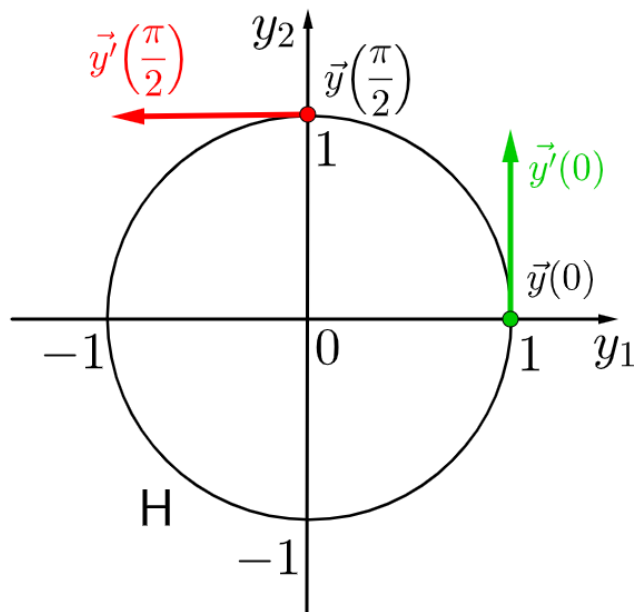
$$\vec{y}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \end{pmatrix}}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \begin{pmatrix} \frac{y_1(t) - y_1(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{y_2(t) - y_2(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y_1(t) - y_1(t_0)}{t - t_0} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y_2(t) - y_2(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1'(t_0) \\ y_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

Závěr: Derivaci vektorové funkce $\vec{y}(t)$ počítáme po složkách.

Příklad:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Geometrický význam:



$$\vec{y}'(0) = \begin{pmatrix} -\sin 0 \\ \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

směrový vektor tečny ke kružnici v bodě $t_0 = 0$

$$\vec{y}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

směrový vektor tečny ke kružnici v bodě $t_0 = \frac{\pi}{2}$

Soustava 2 lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty

je úloha najít (vektorovou) funkci $\vec{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tak, že $\vec{y}'(t) = \mathbf{A}\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$, kde máme dáno:

- $t \in I \subset \mathbb{R}$... daný interval
- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$... matice reálných koeficientů
- $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$... vektorová funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$
... pravá strana (vektor pravých stran)

po složkách:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + b_2(t) \end{aligned}$$

Dáno:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}, \quad b_1, b_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Hledáme:

$$y_1(t) \text{ a } y_2(t) \quad \dots \quad \text{dvě neznámé funkce}$$

Proč? Každá lineární ODR 2. řádu se dá přepsat jako soustava 2 rovnic 1. řádu !

To je vhodné např. pro řešení v SW (MATLAB, ...)

Příklad: RLC obvod v sériovém zapojení:

ODR 2.řádu

$$i''(t) + \frac{R}{L} i'(t) + \frac{1}{CL} i(t) = \frac{U_0 \omega}{L} \cos(\omega t)$$

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

$$y_1(t) = i(t)$$

$$y_2(t) = y_1'(t) = i'(t) \Rightarrow y_2'(t) = i''(t)$$

$$y_2'(t) + \frac{R}{L} y_2(t) + \frac{1}{CL} y_1(t) = \frac{U_0 \omega}{L} \cos(\omega t)$$

soustava 2 ODR 1.řádu

$$1. \text{ rovnice: } y_1'(t) = 0 \cdot y_1(t) + 1 \cdot y_2(t) + 0$$

$$2. \text{ rovnice: } y_2'(t) = -\frac{1}{LC} \cdot y_1(t) - \frac{R}{L} \cdot y_2(t) + \frac{U_0 \omega}{L} \cos(\omega t)$$

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{U_0 \omega}{L} \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}'(t) = \mathbf{A} \vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

Varování: Ne každá soustava 2 ODR 1. řádu se dá převést na jednu rovnici 2. řádu !

PŘEVOD:

Soustava n ODR 1. řádu

↖ A lze vždy

B nelze vždy ↘

Jedna ODR n -tého řádu

viz A

Příklad:

$$y'' - 3y' + 2y = \sin t$$

označíme $\left. \begin{array}{l} y =: y_1 \\ y' =: y_2 \end{array} \right\}$ tj. $y'_1 = y_2 = y'$

$$(y'' =) y'_2 = 3y' - 2y + \sin t = 3y_2 - 2y_1 + \sin t$$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Příklad:

$$y''' - 4y'' + 5y' - 10y = e^{2t}$$

(3. řád $\rightarrow$ soustava 3 rovnic)

označme $\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ y'_3 = 10y_1 - 5y_2 + 4y_3 + e^{2t} \end{array}$$

viz **B**

Příklad:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + y_2 + e^{2t} \\ y_2' &= y_1 - y_2 + \sin t\end{aligned}$$

z 1. rovnice vyjádříme: $y_2 = y_1' - y_1 - e^{2t}$

a zderivujeme: $y_2' = y_1'' - y_1' - 2e^{2t}$

a obojí dosadíme do 2. rovnice: $\underbrace{y_1'' - y_1' - 2e^{2t}}_{=y_2'} = y_1 - \underbrace{(y_1' - y_1 - e^{2t})}_{y_2} + \sin t$

$$y_1'' - 2y_1 = 3e^{2t} + \sin t$$

$$(y_2 = y_1' - y_1 - e^{2t})$$

Příklad:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 \\ y_2' &= 3y_2\end{aligned}$$

... nezávislé $\Rightarrow$ nelze spojit do 1 rovnice

$$\left(\begin{array}{l} \text{Vyřešit tyto rovnice ale samozřejmě umíme:} \\ y_1(t) = c_1 e^t, \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ y_2(t) = c_2 e^{3t}, \quad c_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

REKAPITULACE

Soustava n lineárních ODR 1. řádu je úloha najít (vektorovou funkci) $\vec{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ takovou, že

$$\vec{y}'(t) = \mathbf{A}\vec{y}(t) + \vec{b}(t), \quad t \in I, \text{ kde}$$

máme dáno:

- $I \subset \mathbb{R}$... interval
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$... matice koeficientů
- $\vec{b}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$... vektor pravé strany

$$n = 2$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + b_2(t) \end{aligned}$$

Metody řešení

Platí: Každé řešení lze zapsat ve tvaru

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_H(t) + \vec{y}_P(t)$$

$\vec{y}_H(t)$... **homogenní řešení**
je řešení homogenní rovnice,
tj. pro $\vec{b}(t) = \vec{0}$

⋮

$\vec{y}_P(t)$... **partikulární řešení**
je jedno řešení nehomogenní rovnice,
tj. s pravou stranou $\vec{b}(t)$

Krok 1

Hledáme $\vec{y}_H(t)$, tj. $\vec{b}(t) = \vec{0}$

Platí: Existuje n lineárně nezávislých (vektorových) funkcí

$\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ takových, že

$$\vec{y}_H(t) = c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t) + \dots + c_n \vec{y}_n(t), \text{ kde } c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

$\{\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)\}$... **fundamentální systém (FS)**

$$\mathbb{Y}(t) := \left(\begin{array}{c|c|c|c} \vec{y}_1(t) & \vec{y}_2(t) & \dots & \vec{y}_n(t) \end{array} \right) \dots \text{fundamentální (Wronského) matice}$$

Platí: $\mathbb{Y}(t)$ je regulární, tj. existuje $[\mathbb{Y}(t)]^{-1}$, protože $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ jsou lineárně nezávislé

$$\vec{c} := (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

Maticový zápis:

$$\vec{y}_H(t) = \mathbb{Y}(t) \vec{c}$$

Maticový zápis:

$$\vec{y}_H(t) = \mathbb{Y}(t) \vec{c}$$

$$n = 2$$

$$\vec{y}_1(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{y}_2(t) = \begin{pmatrix} y_{21}(t) \\ y_{22}(t) \end{pmatrix} \quad \text{FS: } \{\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t)\}$$

$$\mathbb{Y}(t) = \left(\vec{y}_1(t) \mid \vec{y}_2(t) \right) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\vec{y}_H(t)} &= c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t) = c_1 \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_{21}(t) \\ y_{22}(t) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} c_1 y_{11}(t) + c_2 y_{21}(t) \\ c_1 y_{12}(t) + c_2 y_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{21}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \boxed{\mathbb{Y}(t) \vec{c}} \end{aligned}$$

Prvky FS hledáme ve tvaru:

$$\boxed{\vec{y}(t) = \vec{h} e^{\lambda t} = e^{\lambda t} \cdot \vec{h}}$$

kde λ je „nějaké“ číslo a $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je „nějaký“ nenulový vektor

$$\text{Platí: } \vec{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \cdot \vec{h}$$

$$n = 2$$

$$\vec{y}(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} h_1 \\ e^{\lambda t} h_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} \lambda e^{\lambda t} h_1 \\ \lambda e^{\lambda t} h_2 \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda t} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \lambda e^{\lambda t} \vec{h}$$

Tedy:

$$\vec{y}'(t) = \mathbf{A}\vec{y}(t)$$

Dosadíme:

$$\lambda e^{\lambda t} \vec{h} = \mathbf{A}(e^{\lambda t} \vec{h}) = e^{\lambda t} \mathbf{A} \vec{h} \quad / : e^{\lambda t} > 0$$

$$\begin{aligned} \boxed{\lambda \vec{h} = \mathbf{A} \vec{h}} &\Leftrightarrow \lambda \mathbf{I} \vec{h} = \mathbf{A} \vec{h} \\ &\Leftrightarrow (\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \vec{h} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \underline{(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{h} = \vec{0}} \end{aligned}$$

Závěry:

- λ musí být **vlastní číslo** matice $\mathbf{A}$ (obecně komplexní)
- $\vec{h}$ musí být **vlastní vektor** matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ
- najít FS znamená najít vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ a příslušné LNZ (lineárně nezávislé) vlastní vektory !

Platí:

- aby existoval $\vec{h} \neq \vec{0}$ takový, že $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \vec{h} = \vec{0}$, resp. $(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \vec{h} = \vec{0}$, matice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$, resp. $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$, musí být singulární !
(tj. $\boxed{\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0}$, resp. $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$)
- $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A} \Rightarrow \lambda^* \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$
- $\vec{h}$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda \in \mathbb{C}$, potom vektor komplexně sdružený $\vec{h}^*$ je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda^* \in \mathbb{C}$
- komplexní FS lze převést použitím Eulerovy identity na reálný FS

Příklad:
($n = 2$)

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_2'(t) = -2y_1(t) + y_2(t) \end{cases} \quad t \in I = \mathbb{R} \quad (\text{počáteční podmínky doplníme později})$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \quad \leftarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - (-2) \cdot 2 = (1 - \lambda)^2 + 4 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 = \underline{\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0}$$

$$\underline{\lambda_{1,2}} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4j}{2} = \underline{1 \pm 2j} \in \mathbb{C}$$

$$\underline{\lambda_1 = 1 + 2j}: \quad \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 - 1 - 2j & 2 \\ -2 & 1 - 1 - 2j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2j & 2 \\ -2 & -2j \end{pmatrix}$$

$$\vec{h}_1 = ? \quad (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{h}_1 = \vec{0}, \quad \text{tj.} \quad \begin{pmatrix} -2j & 2 \\ -2 & -2j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} -2jh_{11} + 2h_{12} &= 0 \\ -2h_{11} - 2jh_{12} &= 0 \end{aligned}$$

(1. složku zvolíme a 2. dopočteme)

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = 1 - 2j}: \quad$$

$$\vec{h}_2 = \vec{h}_1^* = \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix}$$

Komplexní FS: $\{e^{\lambda_1 t} \vec{h}_1, e^{\lambda_2 t} \vec{h}_2\}$

$$\left\{ e^{(1+2j)t} \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}, e^{(1-2j)t} \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
e^{(1+2j)t} \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix} &= e^t \cdot e^{2jt} \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix} = e^t (\cos(2t) + j \sin(2t)) \begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) - j \cos(2t) \\ \cos(2t) + j \sin(2t) \end{pmatrix} = \\
&= e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + j \cdot e^t \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \\
&\quad \text{reálná část} \qquad \qquad \text{imaginární část}
\end{aligned}$$

Reálný FS:

$$\left\{ \underbrace{e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}}_{\vec{y}_1(t)}, \underbrace{e^t \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}}_{\vec{y}_2(t)} \right\}$$

ZÁVĚR:

$$\vec{y}(t) = c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ konstanty} \\
\text{(případně určené poč. podmínkami)}$$

$$\mathbb{Y}(t) = \left(\vec{y}_1(t) \mid \vec{y}_2(t) \right) = \begin{pmatrix} e^t \sin(2t) & -e^t \cos(2t) \\ e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Maticově:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \vec{y}(t) = \mathbb{Y}(t) \vec{c} = \begin{pmatrix} e^t \sin(2t) & -e^t \cos(2t) \\ e^t \cos(2t) & e^t \sin(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ve složkách:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= c_1 e^t \sin(2t) - c_2 e^t \cos(2t) \\
y_2(t) &= c_1 e^t \cos(2t) + c_2 e^t \sin(2t)
\end{aligned}$$

Dále zahrneme počáteční podmínky.

Počáteční podmínky:

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1$$

$y_1(0) = 0$:

$$y_1(t) = c_1 e^t \sin(2t) - c_2 e^t \cos(2t)$$

$$y_1(0) = c_1 e^0 \sin(0) - c_2 e^0 \cos(0) = -c_2 = 0 \Rightarrow \underline{c_2 = 0}$$

Tedy:

$$y_1(t) = c_1 e^t \sin(2t)$$

$$y_2(t) = c_1 e^t \cos(2t)$$

$y_2(0) = 1$:

$$y_2(0) = c_1 e^0 \cos(0) = \underline{c_1 = 1}$$

ZÁVĚR:

$$y_1(t) = e^t \sin(2t)$$

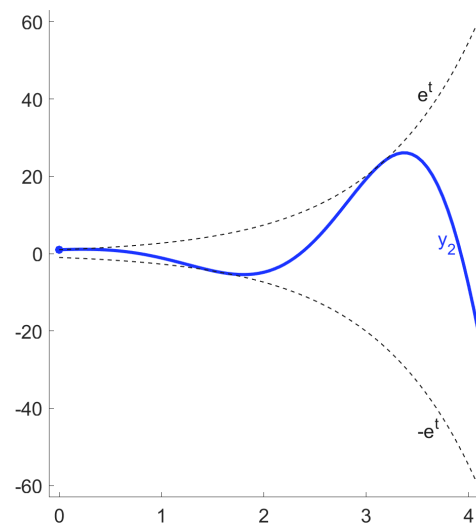
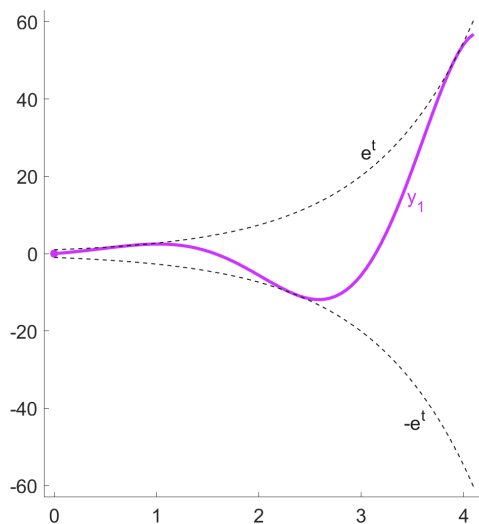
$$y_2(t) = e^t \cos(2t)$$

nebo

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} e^t \sin(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix}$$

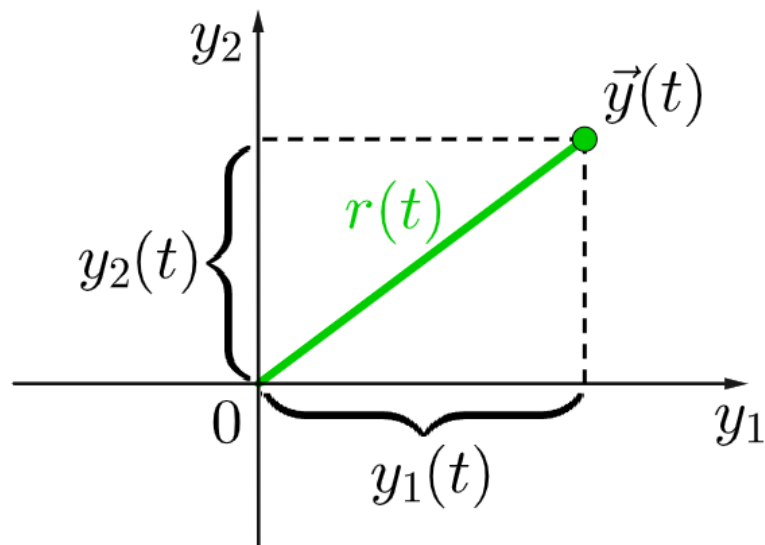
Grafické znázornění:

Ⓐ ve složkách (není názorné)



Ⓑ v rovině y_1 - y_2 ... tzv. **fázový prostor**

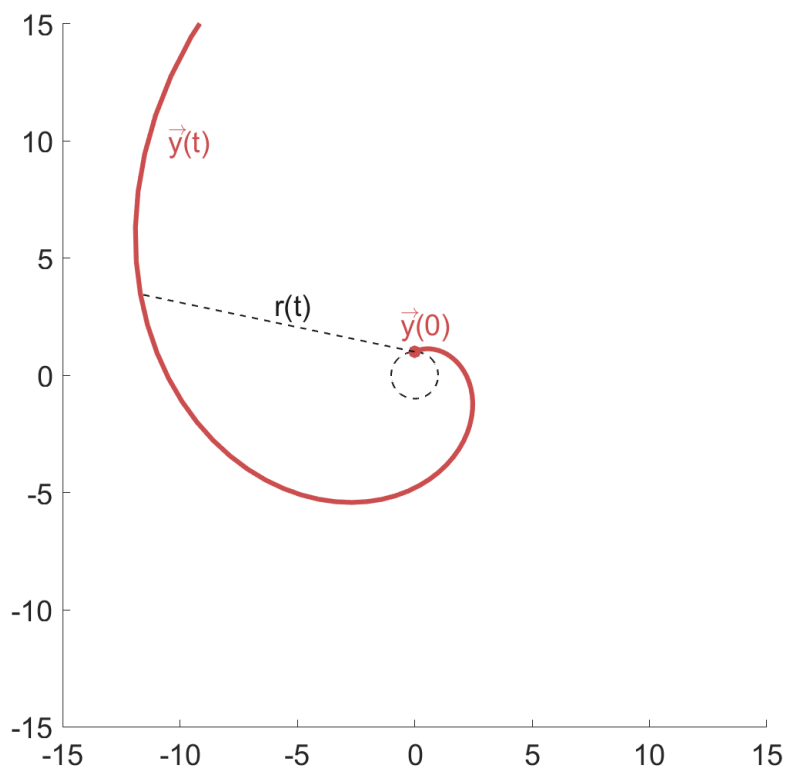
(kreslíme obor hodnot vektorové funkce $\vec{y}(t)$)



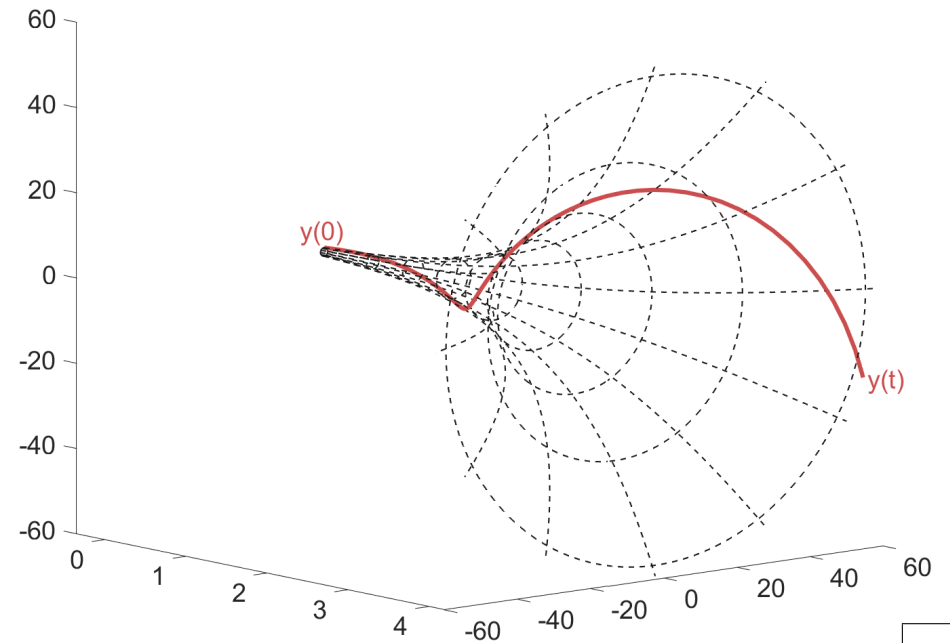
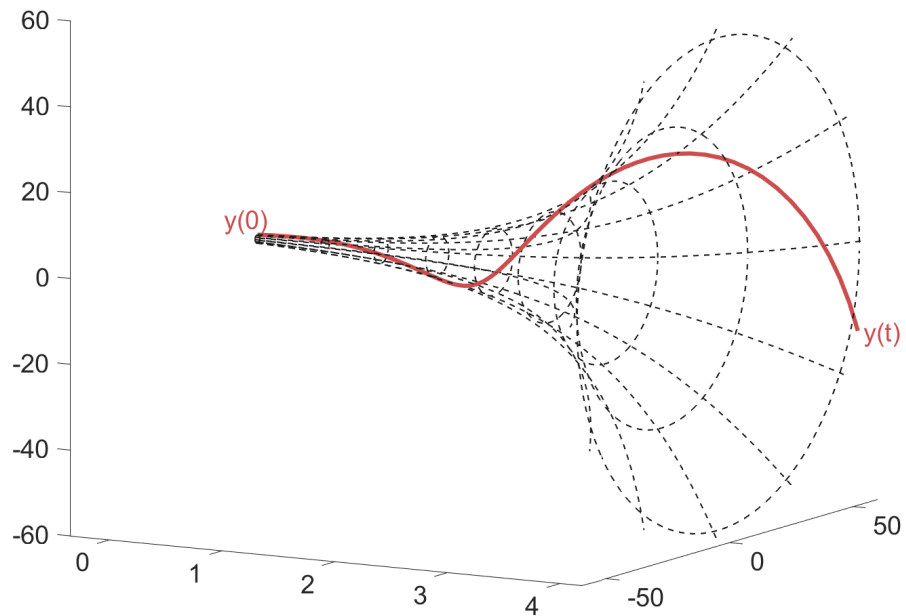
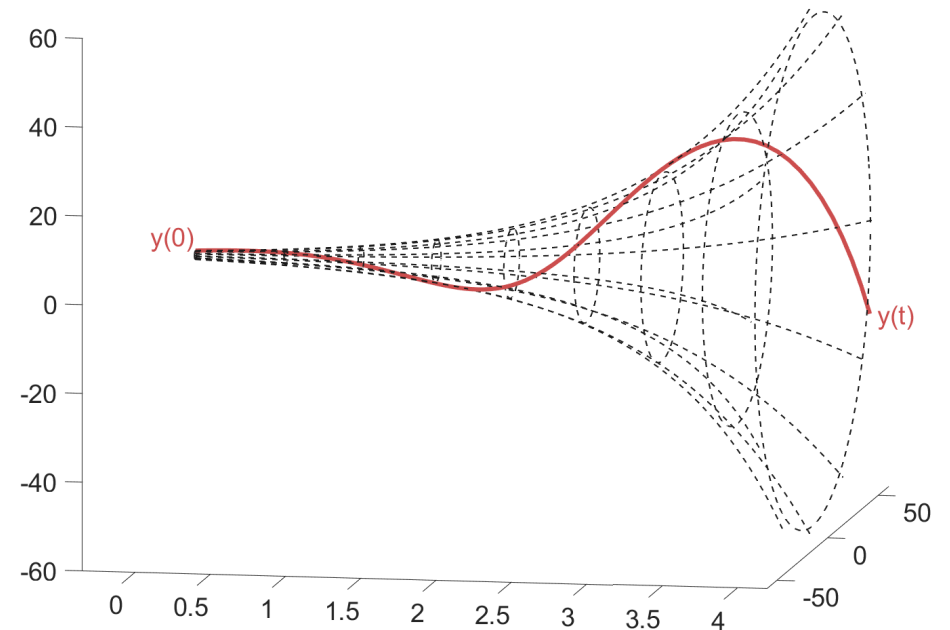
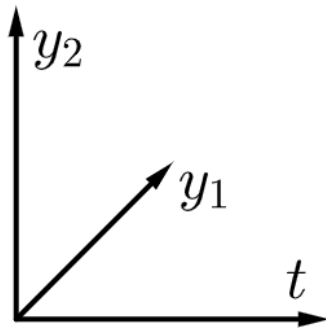
$$r(t) = \sqrt{[y_1(t)]^2 + [y_2(t)]^2} = \sqrt{[e^t \sin(2t)]^2 + [e^t \cos(2t)]^2}$$

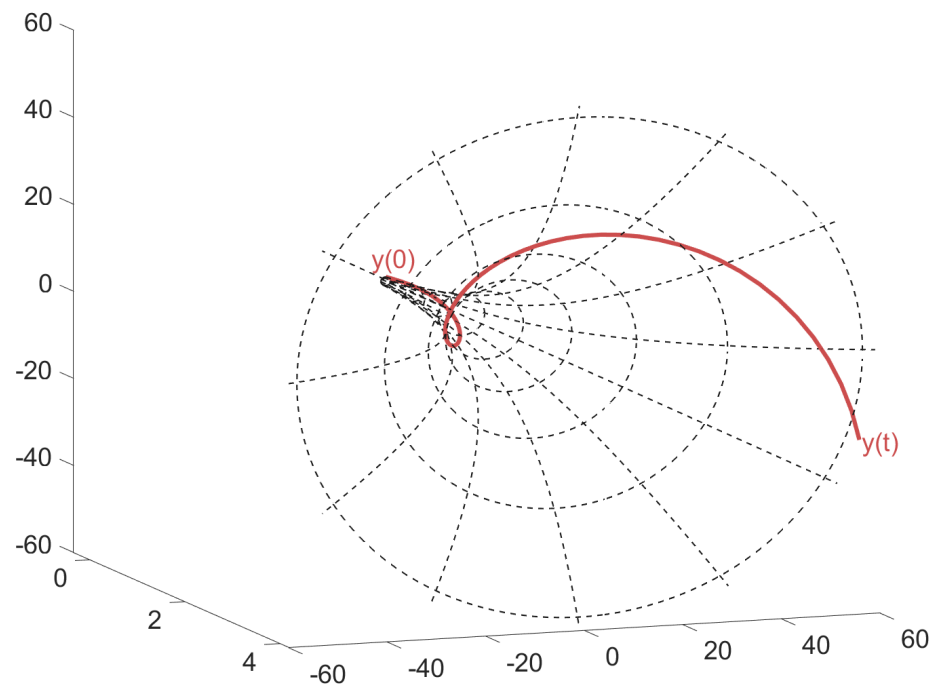
$$= \sqrt{e^{2t} ([\sin(2t)]^2 + [\cos(2t)]^2)} = \sqrt{e^{2t}} = (e^{2t})^{\frac{1}{2}} = e^t$$

$r(t)$... vzdálenost od počátku v čase t

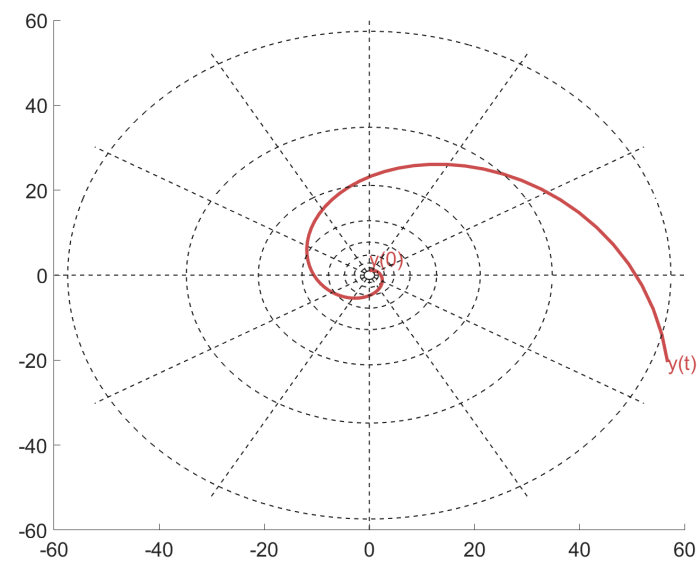


© v prostoru t - y_1 - y_2
 (kreslíme graf vektorové funkce $\vec{y}(t)$)

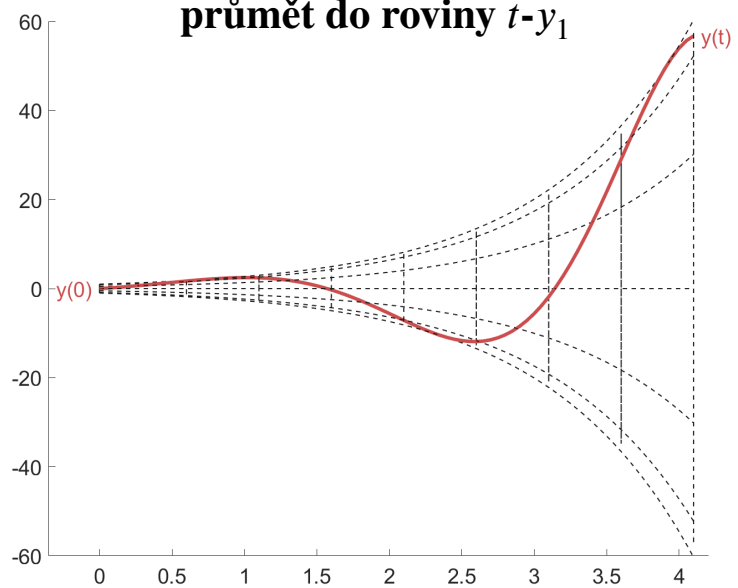




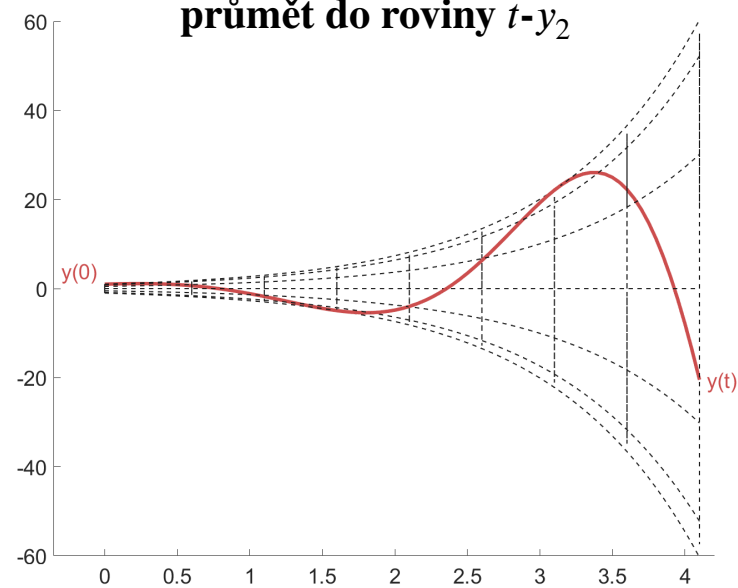
průmět do roviny y_1 - y_2 (fázový prostor)



průmět do roviny t - y_1



průmět do roviny t - y_2



$$\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y} \quad (n = 2)$$

vlastní čísla matice $\mathbf{A}$: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$

odpovídající vlastní vektory:
$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \vec{h}_1 &= \vec{0} \\ (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \vec{h}_2 &= \vec{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{h}_1 \\ \vec{h}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CFS: } & \left\{ e^{(\alpha+j\beta)t} \vec{h}_1, e^{(\alpha-j\beta)t} \vec{h}_2 \right\} \\ & \left\{ e^{\alpha t} \cdot \underline{e^{j\beta t}} \vec{h}_1, e^{\alpha t} \cdot e^{-j\beta t} \vec{h}_2 \right\} \\ & \quad = \underline{\cos \beta t + j \sin \beta t} \quad \text{Eulerova identita} \end{aligned}$$

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} \gamma + j\delta \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \text{pokud má nenulovou 2. složku}$$

$$\Rightarrow e^{\alpha t} \cdot (\cos \beta t + j \sin \beta t) \begin{pmatrix} \gamma + j\delta \\ 1 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \left[\begin{pmatrix} \gamma \cos \beta t - \delta \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} \delta \cos \beta t + \gamma \sin \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix} \right]$$

$$\text{RFS: } \left\{ e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \gamma \cos \beta t - \delta \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}, e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \delta \cos \beta t + \gamma \sin \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix} \right\}$$

$$\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} \gamma - j\delta \\ 1 \end{pmatrix}$$

Příklad A

$\frac{y'' - 9y = 0}{y(0) = 4}$ $y'(0) = 6$	$\longrightarrow$	$\frac{y'_1 = y_2}{y'_2 = 9y_1}$ $\frac{y_1(0) = 4}{y_2(0) = 6}$
$y_1 := y$ $y_2 := y' = y'_1$ $y'_2 = y''$		

tj. $\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}(t), \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 9 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - 9 = 0$$

$\lambda_{1,2} = \pm 3$

$\lambda_1 = 3$: $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) \vec{h}_1 = \vec{0} \quad \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$

$\lambda_2 = -3$: $(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) \vec{h}_2 = \vec{0} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$

FS: $\left\{ e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

obecné řešení: $\vec{y}_H(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{3t} + c_2 e^{-3t} \\ y_2(t) &= 3c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{-3t} \end{aligned}$
--

Počáteční podmínky:

$(t = 0)$

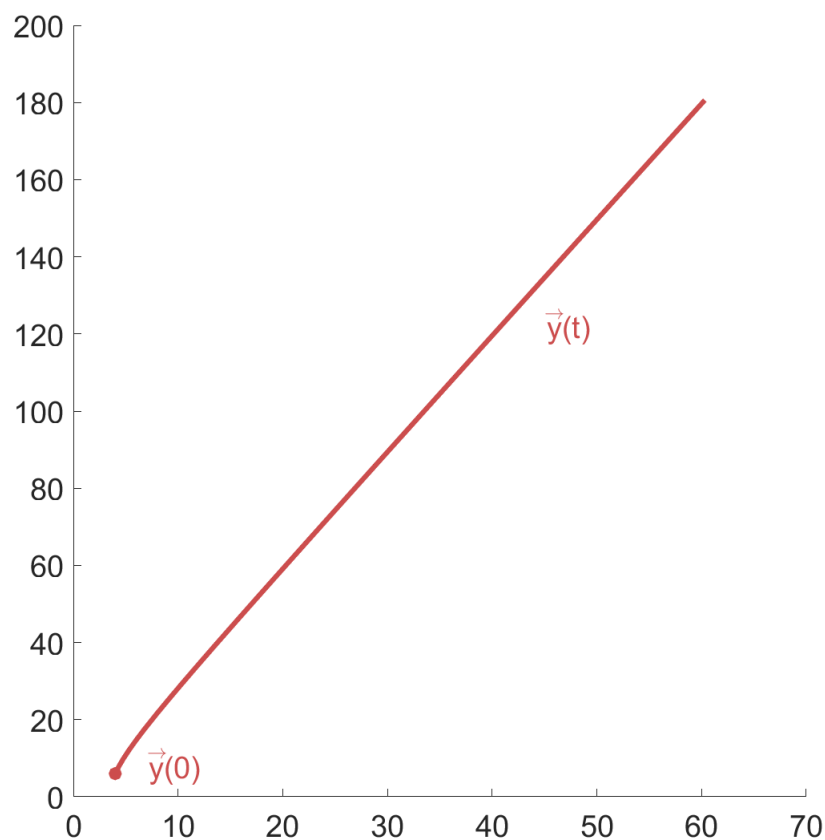
$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & 4 \\ 3c_1 - 3c_2 & = & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} / \cdot 3 \\ \searrow + \end{array}$$

$$6c_1 = 18 \Rightarrow \underline{c_1 = 3}$$

$$3 + c_2 = 4 \Rightarrow \underline{c_2 = 1}$$

$$y_1(t) = 3e^{3t} + e^{-3t}$$

$$y_2(t) = 9e^{3t} - 3e^{-3t}$$



$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^3 + e^{-3} \\ 9e^3 - 3e^{-3} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 60,3 \\ 180,6 \end{pmatrix}$$

Příklad B

$y'' + 10y' + 16y = 0$
$y(0) = 2$
$y'(0) = 0$

 $\xrightarrow{\quad}$

$y_1' = y_2$
$y_2' = -16y_1 - 10y_2$
$y_1(0) = 2$
$y_2(0) = 0$

$y_1 := y$
 $y_2 := y' = y_1'$
 $y_2' = y''$

tj. $\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -10 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}(t), \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -16 & -\lambda - 10 \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda(\lambda + 10) + 16 =$$
$$= \lambda^2 + 10\lambda + 16 = 0 = (\lambda + 2)(\lambda + 8)$$
$$\underline{\lambda_1 = -2}, \quad \underline{\lambda_2 = -8}$$

$$\underline{\lambda_1 = -2}: \quad (\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \vec{h}_1 = \vec{0} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -16 & -8 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\lambda_2 = -8}: \quad (\mathbf{A} + 8\mathbf{I}) \vec{h}_2 = \vec{0} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 1 & 0 \\ -16 & -2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}}$$

FS: $\left\{ e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} \right\}$

obecné řešení: $\vec{y}_H(t) = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-8t} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$

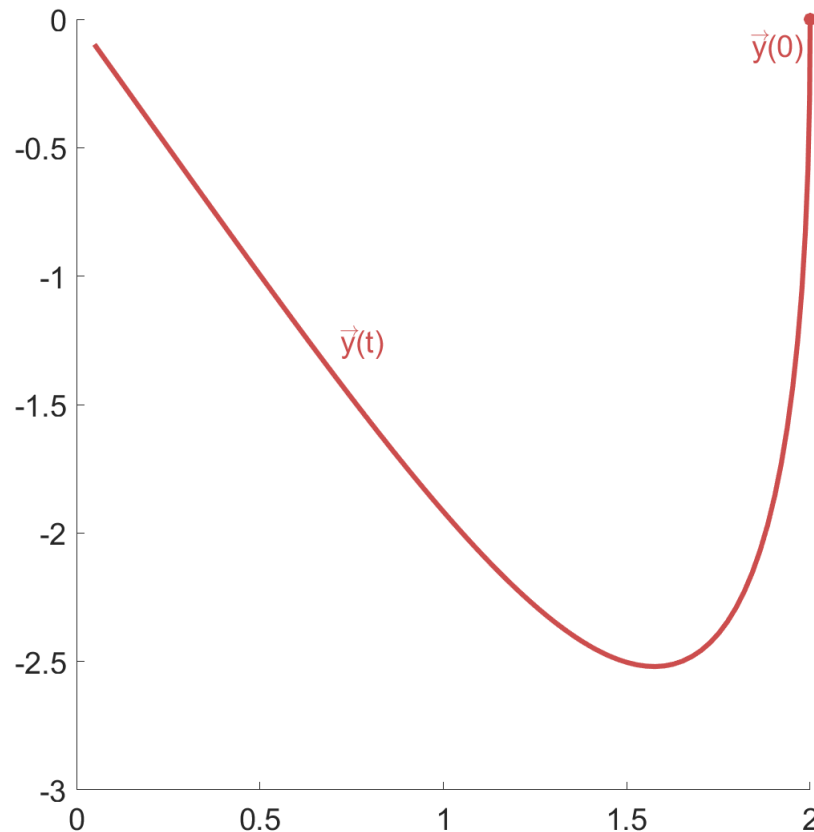
$y_1(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-8t}$
$y_2(t) = -2c_1 e^{-2t} - 8c_2 e^{-8t}$

Počáteční podmínky:
($t = 0$)

$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 & = & 2 \\ -2c_1 - 8c_2 & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} / \cdot 8 \\ \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 6c_1 & = & 16 \\ c_2 & = & 2 - \frac{8}{3} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = \frac{8}{3} \\ c_2 = -\frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y_1(t) = \frac{8}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-8t} \\ y_2(t) = -\frac{16}{3}e^{-2t} + \frac{16}{3}e^{-8t} \end{array}$$



$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1\left(\frac{1}{10}\right) \\ y_2\left(\frac{1}{10}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}e^{-\frac{1}{5}} - \frac{2}{3}e^{-\frac{4}{5}} \\ -\frac{16}{3}e^{-\frac{1}{5}} + \frac{16}{3}e^{-\frac{4}{5}} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1,88 \\ -1,97 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(2) \\ y_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}e^{-4} - \frac{2}{3}e^{-16} \\ -\frac{16}{3}e^{-4} + \frac{16}{3}e^{-16} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0,049 \\ -0,098 \end{pmatrix}$$

Příklad C

$y'' + 6y' + 25y = 0$
$y(0) = 1$
$y'(0) = 1$

$\longrightarrow$

$y_1 := y$
$y_2 := y' = y_1'$
$y_2' = y''$

$y_1' = y_2$
$y_2' = -25y_1 - 6y_2$
$y_1(0) = 1$
$y_2(0) = 1$

tj. $\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -6 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}(t), \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -25 & -\lambda - 6 \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda(\lambda + 6) + 25 = \lambda^2 + 6\lambda + 25 = 0$$
$$\underline{\lambda_{1,2}} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \underline{-3 \pm 4j}$$

$$\underline{\lambda_1 = -3 + 4j}: \quad (\mathbf{A} + (3 - 4j)\mathbf{I}) \vec{h}_1 = \vec{0} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 - 4j & 1 & 0 \\ -25 & -3 - 4j & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 + 4j \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\lambda_2 = \lambda_1^* = -3 - 4j} \quad \dots \quad \underline{\vec{h}_2 = \vec{h}_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 - 4j \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\mathbb{CFS}}: \quad \left\{ e^{(-3+4j)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 + 4j \end{pmatrix}, e^{(-3-4j)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 - 4j \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{\mathbb{RFS}}: \quad \left\{ e^{-3t} \begin{pmatrix} \cos 4t \\ -3 \cos 4t - 4 \sin 4t \end{pmatrix}, e^{-3t} \begin{pmatrix} \sin 4t \\ -3 \sin 4t + 4 \cos 4t \end{pmatrix} \right\}$$

obecné řešení:

$$y_1(t) = e^{-3t} (c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t)$$
$$y_2(t) = e^{-3t} [c_1 (-3 \cos 4t - 4 \sin 4t) + c_2 (-3 \sin 4t + 4 \cos 4t)]$$

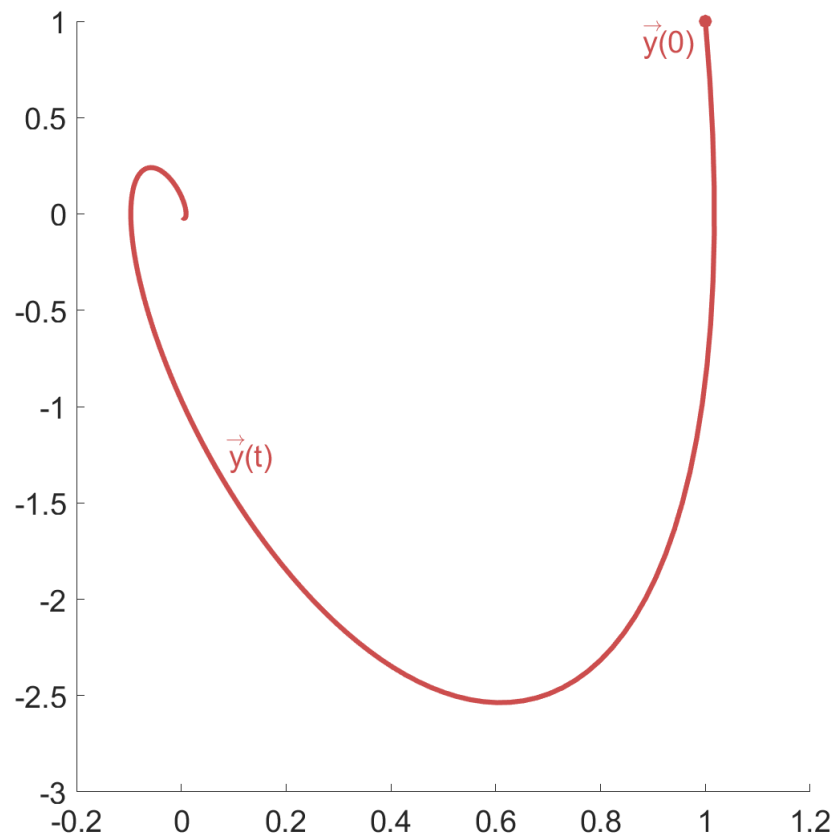
Počáteční podmínky:
($t = 0$)

$$y_1(0) = \underline{c_1 = 1}$$

$$y_2(0) = -3c_1 + 4c_2 = 1 \Rightarrow \underline{c_2 = 1}$$

$$y_1(t) = e^{-3t} (\cos 4t + \sin 4t)$$

$$y_2(t) = e^{-3t} (\cos 4t - 7 \sin 4t)$$



$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3} (\cos 4 + \sin 4) \\ e^{-3} (\cos 4 - 7 \sin 4) \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} -0,07 \\ -0,23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1(2) \\ y_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-6} (\cos 8 + \sin 8) \\ e^{-6} (\cos 8 - 7 \sin 8) \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 0,002 \\ -0,018 \end{pmatrix}$$

Příště:

Krok 2

... Hledáme $\vec{y}_p(t)$

REKAPITULACE

Soustava n lineárních ODR 1. řádu je úloha najít (vektorovou funkci) $\vec{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ takovou, že

$$\vec{y}'(t) = \mathbf{A}\vec{y}(t) + \vec{b}(t), \quad t \in I$$

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \vec{b}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

⊕ počáteční podmínky:

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \quad \text{pro } t_0 \in I \text{ a } \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Víme:

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_H(t) + \vec{y}_P(t)$$

Krok 1 (minule) Najdi všechna řešení $\vec{y}_H(t)$ homogenní rovnice, tj. $\vec{b}(t) = \vec{0}$.

Platí: $\vec{y}_H(t) = c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t) + \dots + c_n \vec{y}_n(t) = \mathbb{Y}(t) \vec{c}$, kde

$$\mathbb{Y}(t) := \left(\vec{y}_1(t) \mid \vec{y}_2(t) \mid \dots \mid \vec{y}_n(t) \right) \quad \text{a} \quad \vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$$

$\mathbb{Y}(t)$ je regulární, tj. existuje $[\mathbb{Y}(t)]^{-1}$, protože $\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)$ jsou lineárně nezávislé

Příklad: ($n = 2$)

$$\vec{y}_H(t) = c_1 \cdot \underbrace{e^{\lambda_1 t} \vec{h}_1}_{\vec{y}_1(t)} + c_2 \cdot \underbrace{e^{\lambda_2 t} \vec{h}_2}_{\vec{y}_2(t)}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

kde λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$

a $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ příslušné vlastní vektory matice $\mathbf{A}$

Krok 2

Hledáme jedno řešení $\vec{y}_P(t)$ nehomogenní rovnice, tj.

$$\vec{y}_P'(t) = \mathbf{A}\vec{y}_P(t) + \vec{b}(t).$$

Metoda variace konstant + princip superpozice

Předpokládáme, že partikulární řešení má tvar

$$\vec{y}_P(t) = \mathbb{Y}(t) \vec{\varphi}(t) = \varphi_1(t)\vec{y}_1(t) + \varphi_2(t)\vec{y}_2(t) + \dots + \varphi_n(t)\vec{y}_n(t),$$

kde $\vec{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je (zatím) neznámá vektorová funkce.

Platí:

$$\vec{y}_P'(t) = \underbrace{\mathbf{A}\mathbb{Y}(t)}_{\mathbb{Y}'(t)} \vec{\varphi}(t) + \mathbb{Y}(t) \vec{\varphi}'(t), \quad t \in I$$

Zdůvodnění ($n = 2$):

$$\begin{aligned} \vec{y}_P'(t) &= \left[\mathbb{Y}(t) \cdot \vec{\varphi}(t) \right]' = \left[\varphi_1(t)\vec{y}_1(t) + \varphi_2(t)\vec{y}_2(t) \right]' \stackrel{*}{=} \underbrace{\varphi_1'(t)\vec{y}_1(t)} + \underbrace{\varphi_1(t)\vec{y}_1'(t)} + \underbrace{\varphi_2'(t)\vec{y}_2(t)} + \underbrace{\varphi_2(t)\vec{y}_2'(t)} = \\ &= \underbrace{\varphi_1'(t)\vec{y}_1(t)} + \underbrace{\varphi_2'(t)\vec{y}_2(t)} + \underbrace{\varphi_1(t)\vec{y}_1'(t)}_{\mathbf{A}\vec{y}_1(t)} + \underbrace{\varphi_2(t)\vec{y}_2'(t)}_{\mathbf{A}\vec{y}_2(t)} = \\ &= \underbrace{\varphi_1'(t)\vec{y}_1(t) + \varphi_2'(t)\vec{y}_2(t)}_{\mathbb{Y}(t) \vec{\varphi}'(t)} + \underbrace{\mathbf{A} \cdot (\varphi_1(t)\vec{y}_1(t) + \varphi_2(t)\vec{y}_2(t))}_{\mathbf{A} \cdot \mathbb{Y}(t) \cdot \vec{\varphi}(t)} \end{aligned}$$

* kde

$$\begin{aligned} \left[\varphi_1(t)\vec{y}_1(t) \right]' &= \begin{pmatrix} \varphi_1(t) y_{11}(t) \\ \varphi_1(t) y_{12}(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) y_{11}(t) + \varphi_1(t) y_{11}'(t) \\ \varphi_1'(t) y_{12}(t) + \varphi_1(t) y_{12}'(t) \end{pmatrix} = \varphi_1'(t) \begin{pmatrix} y_{11}(t) \\ y_{12}(t) \end{pmatrix} + \varphi_1(t) \begin{pmatrix} y_{11}'(t) \\ y_{12}'(t) \end{pmatrix} \\ \left[\varphi_2(t)\vec{y}_2(t) \right]' &\dots \text{ analogicky} \end{aligned}$$

Dosadíme do nehomogenní rovnice:

$$\vec{y}'_P(t) = \mathbf{A}\vec{y}_P(t) + \vec{b}(t)$$

$$\underline{\mathbf{A}\mathbb{Y}(t)\vec{\varphi}(t) + \mathbb{Y}(t)\vec{\varphi}'(t)} = \underline{\mathbf{A}\mathbb{Y}(t)\vec{\varphi}(t)} + \vec{b}(t)$$

$$\mathbb{Y}(t)\vec{\varphi}'(t) = \vec{b}(t)$$

$$\vec{\varphi}'(t) = [\mathbb{Y}(t)]^{-1} \cdot \vec{b}(t)$$

→ funkci $\vec{\varphi}(t)$ určíme integrací

$$\vec{\varphi}(t) = \int \dots$$

→ dosadíme do

$$\vec{y}_P(t) = \mathbb{Y}(t) \cdot \vec{\varphi}(t)$$

Krok 3

Sečteme $\vec{y}_H(t)$ a $\vec{y}_P(t)$, tj.

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_H(t) + \vec{y}_P(t)$$

Krok 4

Dosadíme počáteční podmínky

$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Poznámka: jestliže soustava $\vec{y}'(t) = \mathbf{A}\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$ vznikla převodem z rovnice n -tého řádu, tj.

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}, \quad \text{potom}$$

- $0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \dots$ charakteristická rovnice (viz strana 58 – 63)
- $\mathbb{Y}(t)\vec{\varphi}'(t) = \vec{b}(t)$ je soustava, kterou jsme dostali při variaci konstant pro rovnici n -tého řádu (viz strana 28 – 30)

Příklad:

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = e^{3t}$$

$$y_1(t) = y(t)$$

$$y_2(t) = y'(t) = y'_1(t)$$

$$y'_2(t) = y''(t)$$

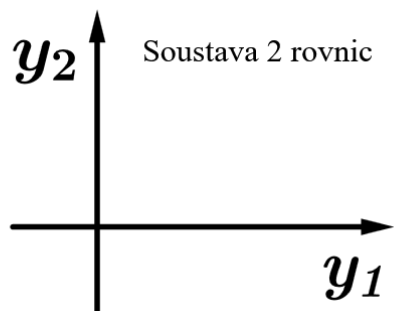
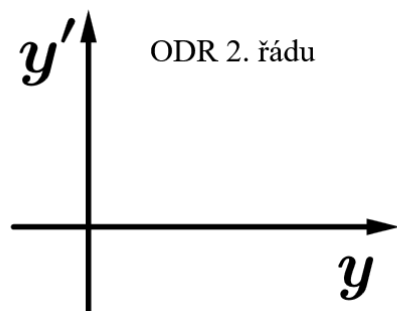
$$y'_1(t) = y_2(t)$$

$$y'_2(t) = -3y_1(t) - 2y_2(t) + e^{3t}$$

tj.

$$\vec{y}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}}_{=\mathbf{A}} \cdot \vec{y}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$



... fázový prostor

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda(-2 - \lambda) - (-3) \cdot 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

Vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ odpovídají řešením charakteristické rovnice. $(y(t) = e^{\lambda t})$

Fundamentální matice

$$\mathbb{Y}(t) = \left(\begin{array}{c|c} y_{11}(t) & y_{21}(t) \\ y_{12}(t) & y_{22}(t) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{c|c} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \vec{y}_1(t) & \vec{y}_2(t) \end{array}$$

kde $\{y_1(t), y_2(t)\}$ je FS rovnice 2. řádu

$$\vec{y}_H(t) = c_1 \vec{y}_1(t) + c_2 \vec{y}_2(t) = \mathbb{Y}(t) \cdot \vec{c}$$

$$\vec{y}_P(t) = \mathbb{Y}(t) \cdot \vec{\varphi}(t) = \varphi_1(t) \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_1'(t) \end{pmatrix} + \varphi_2(t) \begin{pmatrix} y_2(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{Y}(t) \vec{\varphi}'(t) = \vec{b}(t)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \varphi_1'(t) y_1(t) + \varphi_2'(t) y_2(t) = 0 \\ \varphi_1'(t) y_1'(t) + \varphi_2'(t) y_2'(t) = e^{3t} \end{array}$$

pro rovnici 2. řádu: (dostaneme stejnou soustavu pro $\vec{\varphi}'(t)$)

$$y_P(t) = \varphi_1(t) y_1(t) + \varphi_2(t) y_2(t)$$

$$y_P'(t) = \dots$$

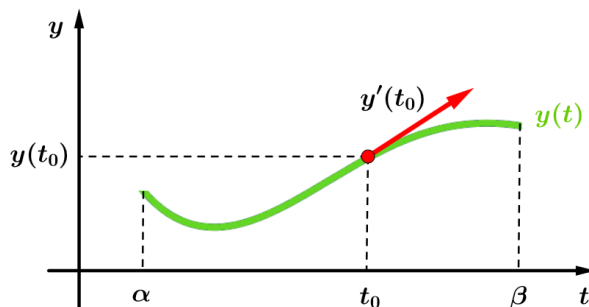
$$y_P''(t) = \dots$$

Počáteční versus okrajové podmínky:

ODR 2. řádu - lineární ... ilustrace

Počáteční úloha

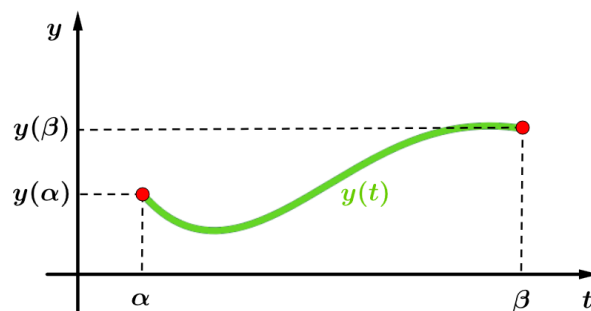
(+) počáteční podmínky:



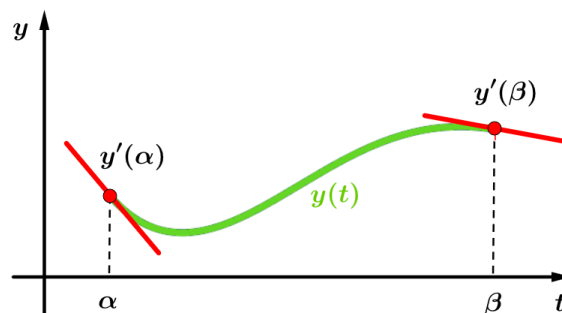
Okrajová úloha

(+) okrajové podmínky (různého typu):

Dirichletovy:



Neumannovy:



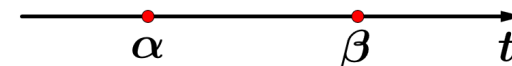
$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = b(t), \quad t \in I \subset \mathbb{R}$$

dáno $t_0 \in \mathbb{R}$... počáteční čas $t_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle =: I$

$$\begin{aligned} y(t_0) &= 2 \\ y'(t_0) &= 1 \end{aligned}$$

$y : I \rightarrow \mathbb{R}$ 2× diferencovatelná
tečný vektor: $(1, y'(t_0))^T$

$\alpha \in I, \beta \in I, \alpha \neq \beta$



$$\begin{aligned} y(\alpha) &= 1 \\ y(\beta) &= 2 \end{aligned}$$

nehomogenní
okrajové podm.

$$\begin{aligned} y(\alpha) &= 0 \\ y(\beta) &= 0 \end{aligned}$$

homogenní
okrajové podm.

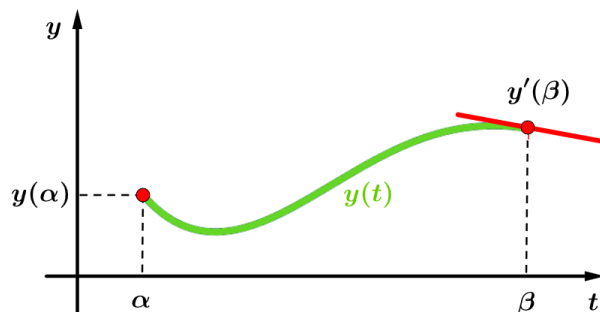
$$\begin{aligned} y'(\alpha) &= -2 \\ y'(\beta) &= -1 \end{aligned}$$

nehomogenní
okrajové podm.

$$\begin{aligned} y'(\alpha) &= 0 \\ y'(\beta) &= 0 \end{aligned}$$

homogenní
okrajové podm.

Smíšené:

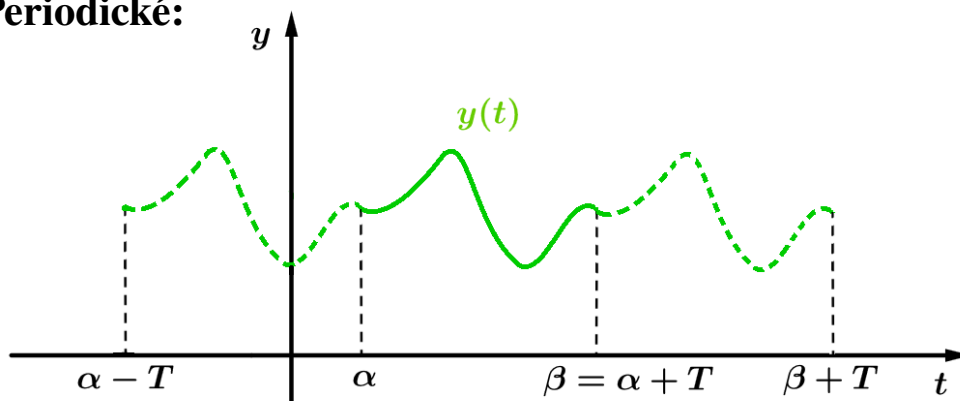


$$\begin{aligned} y(\alpha) &= 1 \\ y'(\beta) &= -1 \end{aligned}$$

nebo např.:

$$\begin{aligned} y'(\alpha) &= \dots \\ y(\beta) &= \dots \end{aligned}$$

Periodické:



$$\begin{aligned} y(\alpha) &= y(\beta) \\ y'(\alpha) &= y'(\beta) \end{aligned}$$

T ... perioda

$$T = \beta - \alpha$$

y ... periodická funkce s periodou T : $y(t) = y(t + T)$, $\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$

Poznámky:

Počáteční úloha má jediné řešení.

Naproti tomu okrajová úloha může mít:

- jediné řešení
- nekonečně mnoho řešení
- žádné řešení



Příklad:

$$\boxed{y'' + y = 0} \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \underline{\lambda_{1,2} = \pm j \in \mathbb{C}}$$

$$\mathbb{CFS}: \{e^{jt}, e^{-jt}\} \Rightarrow y_H(t) = c_1 e^{jt} + c_2 e^{-jt}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

$$\text{Eulerova identita:} \quad e^{jt} = \cos t + j \sin t$$

$$e^{-jt} = \cos t - j \sin t$$

$$\textcircled{+} \rightarrow \cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})$$

$$\textcircled{-} \rightarrow \sin t = \frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})$$

$$\mathbb{RFS}: \{\cos t, \sin t\} \Rightarrow \boxed{y_H(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$



obecné řešení lineární ODR 2. řádu

$$\boxed{y'' + y = 0}$$

Počáteční úloha:

$$\boxed{\begin{array}{l} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{array}} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\text{dosadíme do obecného řešení:} \quad y(0) = c_1 \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} = 1 \quad \Rightarrow \quad y(0) = \underline{c_1 = 1}$$

$$y'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

$$y'(0) = -c_1 \underbrace{\sin 0}_{=0} + c_2 \underbrace{\cos 0}_{=1} = 2 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = \underline{c_2 = 2}$$

Řešení počáteční úlohy je

$$\boxed{y(t) = \cos t + 2 \sin t}$$

Okrajové úlohy:

①

$$y'' + y = 0, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y(0) = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

dosadíme:

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = \underline{c_1 = 1}$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{c_2 = 0}$$

Řešení Dirichletovy okrajové úlohy je

$$y(t) = \cos t$$

②

$$y'' + y = 0, t \in (0, \pi)$$

$$y(0) = 0$$

$$y(\pi) = 1$$

dosadíme:

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = \underline{c_1 = 0}$$

$$y(\pi) = c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = \underline{-c_1 = 1}$$



Úloha nemá řešení !

③

$$y'' + y = 0, t \in (0, \pi)$$

$$y(0) = 0$$

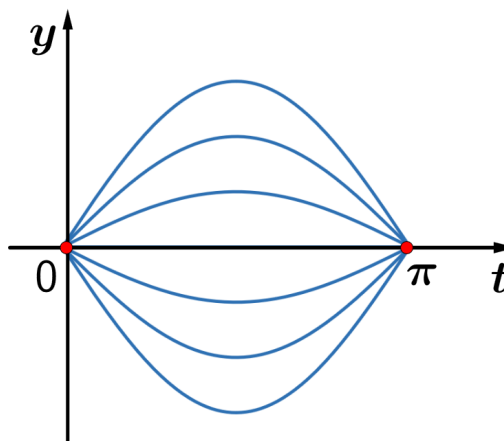
$$y(\pi) = 0$$

dosadíme:

$$y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = \underline{c_1 = 0}$$

$$y(\pi) = c_1 \cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) = \underline{-c_1 = 0}$$

$$\underline{c_2 \in \mathbb{R} \text{ libovolné !}}$$



Úloha má nekonečně mnoho řešení

$$y(t) = c_2 \sin t, c_2 \in \mathbb{R}$$

④

$$y'' + y = 0, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'(0) = 1$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$$

dosadíme:

$$y'(0) = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = \underline{c_2 = 1}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -c_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{-c_1 = 0}$$

Řešení Neumannovy okrajové úlohy je

$$y(t) = \sin t$$

⑤

$$y'' + y = 0, t \in (0, \pi)$$

$$y'(0) = 1$$

$$y'(\pi) = 0$$

dosadíme:

$$y'(0) = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = \underline{c_2 = 1}$$

$$y'(\pi) = -c_1 \sin(\pi) + c_2 \cos(\pi) = \underline{-c_2 = 0}$$



Úloha nemá řešení !

⑥

$$y'' + y = 0, t \in (0, \pi)$$

$$y'(0) = 1$$

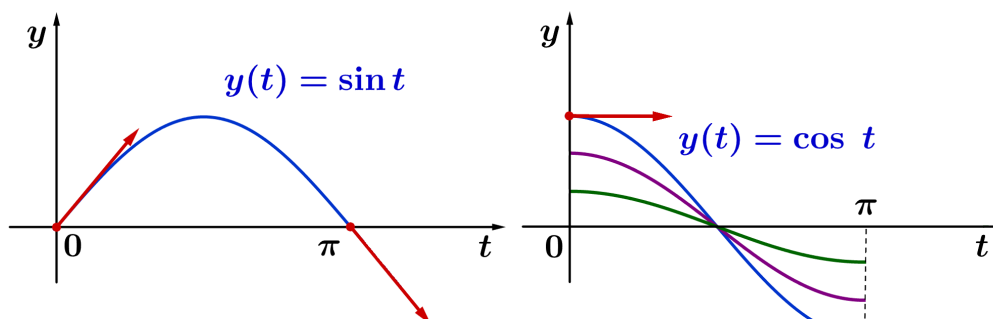
$$y'(\pi) = -1$$

dosadíme:

$$y'(0) = -c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = \underline{c_2 = 1}$$

$$y'(\pi) = -c_1 \sin(\pi) + c_2 \cos(\pi) = \underline{-c_2 = -1}$$

$$\underline{c_1 \in \mathbb{R} \text{ libovolné !}}$$



Úloha má nekonečně mnoho řešení

$$y(t) = c_1 \cos t + \sin t, c_1 \in \mathbb{R}$$

Laplaceova transformace

Definice: **Laplaceovým obrazem** funkce $f : \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ rozumíme funkci definovanou vztahem

$$F(p) := \mathcal{L}[f(t)](p) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad \text{kde } p \text{ je parametr (obecně komplexní číslo).}$$

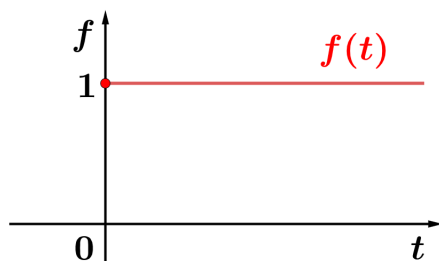
Značení: $F(p)$; F ; $\mathcal{L}[f] = F$ (pozor: F neznačí primitivní funkci k funkci f !)

Poznámky:

- pro jednoduchost budeme předpokládat, že $p \in \mathbb{R}$ (známe Eulerovu identitu, která nám toto umožní)
- integrál v definici $F(p)$ nemusí pro všechny hodnoty p konvergovat (tj. být konečný)
- hodnota integrálu nezávisí na hodnotách funkce f pro $t < 0$!
často se předpokládá, že $f(t) = 0$, $t < 0$ (integrujeme od 0 do $+\infty$).

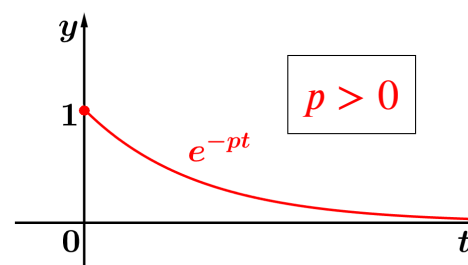
Příklad:

$$f(t) = 1, t \geq 0$$



$$\underline{F(p)} = \mathcal{L}[1](p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{1}_{=f(t)} e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} =$$

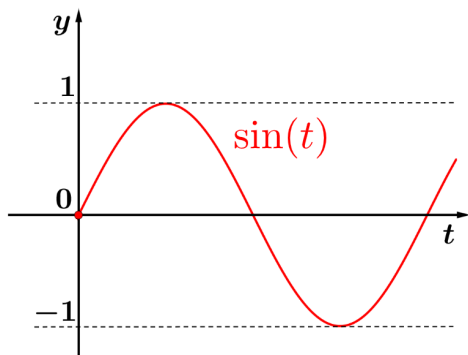
$$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-pt}}{-p} - \frac{e^{-p \cdot 0}}{-p} =$$



$$= \overset{!}{0} + \frac{1}{p} = \underline{\underline{\frac{1}{p}}}$$

Příklad:

$$f(t) = \sin t, \quad t \geq 0$$



$$\underline{F(p)} = \mathcal{L}[\sin t](p) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\sin t}_{=f(t)} e^{-pt} dt \quad (\Rightarrow \text{integrace „per partes“})$$

$$\begin{aligned} I &= \int \sin t e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{ll} u = \sin t & u' = \cos t \\ v' = e^{-pt} & v = \frac{e^{-pt}}{-p} \end{array} \right| = \underline{-\frac{e^{-pt}}{p} \sin t} - \int \frac{e^{-pt}}{-p} \cos t dt = \\ &= \left| \begin{array}{ll} u = \cos t & u' = -\sin t \\ v' = \frac{e^{-pt}}{-p} & v = \frac{e^{-pt}}{p^2} \end{array} \right| = \underline{-\frac{e^{-pt}}{p} \sin t} - \frac{e^{-pt}}{p^2} \cos t - \underbrace{\frac{1}{p^2} \int \sin t e^{-pt} dt}_{=I} \end{aligned}$$

$$I = -\frac{e^{-pt} (\cos t + p \cdot \sin t)}{p^2} - \frac{1}{p^2} \cdot I \quad / \cdot p^2$$

$$p^2 I = -e^{-pt} (\cos t + p \cdot \sin t) - I \quad / + I$$

$$(p^2 + 1)I = -e^{-pt} (\cos t + p \cdot \sin t) \quad / : (p^2 + 1) > 0$$

$$I = \frac{-e^{-pt} (\cos t + p \cdot \sin t)}{p^2 + 1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \left[-\frac{1}{p^2 + 1} e^{-pt} \underbrace{(p \cdot \sin t + \cos t)}_{\text{omezená funkce}} \right]_0^{+\infty} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{p^2 + 1} e^{-pt} (p \cdot \sin t + \cos t) \right) - \left(-\frac{1}{p^2 + 1} \underbrace{e^{-p \cdot 0}}_{=1} \left(p \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} + \underbrace{\cos 0}_{=1} \right) \right) = \\ &\quad \downarrow \\ &\quad 0, \quad \underline{p > 0!} \\ &= 0 + \frac{1}{p^2 + 1} = \underline{\frac{1}{p^2 + 1}} \quad \boxed{p > 0} \end{aligned}$$

Poznámka: Výpočet z definice je náročný i pro jednoduché funkce. Budeme se snažit využít znalost

$$\boxed{\mathcal{L}[1](p) = \frac{1}{p}, p > 0} \quad \text{a} \quad \boxed{\mathcal{L}[\sin t](p) = \frac{1}{p^2 + 1}, p > 0} \quad \text{pro odvození obrazů dalších funkcí.}$$

Využijeme tzv. **slovník Laplaceovy transformace** a následující vlastnosti Laplaceovy transformace.

Vlastnosti Laplaceovy transformace

V1 LINEARITA $\alpha, \beta \dots$ čísla; f_1 a f_2 funkce

$$\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{L}[f_1] + \beta \mathcal{L}[f_2],$$

jestliže $\mathcal{L}[f_1]$ a $\mathcal{L}[f_2]$ existují! (tj. pokud má pravá strana smysl)

Zdůvodnění:

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} (\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) e^{-pt} dt}_{\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2]} = \alpha \underbrace{\int_0^{+\infty} f_1(t) e^{-pt} dt}_{\mathcal{L}[f_1]} + \beta \underbrace{\int_0^{+\infty} f_2(t) e^{-pt} dt}_{\mathcal{L}[f_2]}$$

Příklady:

$$\underline{\mathcal{L}[1 + \sin t](p)} = \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2 + 1} \quad \boxed{p > 0}$$

$$\underline{\mathcal{L}[3]} = \mathcal{L}[3 \cdot 1] = 3 \cdot \mathcal{L}[1] = 3 \cdot \frac{1}{p} \quad \boxed{p > 0}$$

$$\underline{\mathcal{L}[10 \sin t]} = 10 \cdot \mathcal{L}[\sin t] = 10 \cdot \frac{1}{p^2 + 1} \quad \boxed{p > 0}$$

$$\mathcal{L}[f(\omega t)](p) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right)$$

(zde již důsledně píšeme argumenty)

Zdůvodnění:

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{\omega t}{\omega} = \tau\right) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{ll} \tau = \omega t & t = \frac{\tau}{\omega}, \omega \neq 0 \\ d\tau = \omega dt & dt = \frac{d\tau}{\omega} \\ t = 0 & \tau = \omega \cdot 0 = 0 \\ t \rightarrow +\infty & \tau = \omega \cdot t \rightarrow +\infty \end{array} \right| = \frac{1}{\omega} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{\omega}\tau} d\tau = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right)$$

$\omega > 0$

Příklad:

pro $\omega > 0$:

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{L}[\sin(\omega t)]} &= \frac{1}{\omega} \mathcal{L}[\sin(t)]\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\frac{p^2 + \omega^2}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} = \underline{\underline{\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}} \end{aligned}$$

$p > 0$

$$\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = \mathcal{L}[f(t)](p - a) = F(p - a)$$

Zdůvodnění:

$$\int_0^{+\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p - a)$$

Příklad:

$$\underline{\mathcal{L}[e^{at}]} = \mathcal{L}[e^{at} \cdot \underbrace{1}_{=f(t)}] = \mathcal{L}[1](p - a) = \frac{1}{\underline{p - a}}, \quad p - a > 0, \quad \boxed{p > a}$$

$$(\text{ Víme, že } \mathcal{L}[1](p) = \frac{1}{p}, \quad p > 0)$$

$$\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}[f(t)]) = -\frac{dF}{dp}$$

Zdůvodnění:

Uvědomme si, že $-\frac{d}{dp}[f(t)e^{-pt}] = -(f(t)e^{-pt} \cdot (-t))$, tj.

$$\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} -\frac{d}{dp}[f(t)e^{-pt}] dt = -\frac{d}{dp}\left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt\right) = -\frac{dF}{dp}$$

Příklady:

$$\underline{\mathcal{L}[t]} = \mathcal{L}[t \cdot \underbrace{1}_{=f(t)}] = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}[1]) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = \underline{\frac{1}{p^2}} \quad \left[\frac{1}{p}\right]' = [p^{-1}]' = -1 \cdot p^{-2} = -\frac{1}{p^2}$$

$$\underline{\mathcal{L}[t^2]} = \mathcal{L}[t \cdot \underbrace{t}_{=f(t)}] = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}[t]) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \underline{\frac{2}{p^3}} \quad \left[\frac{1}{p^2}\right]' = [p^{-2}]' = -2 \cdot p^{-3} = -\frac{2}{p^3}$$

$$\underline{\mathcal{L}[t^3]} = \mathcal{L}[t \cdot \underbrace{t^2}_{=f(t)}] = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}[t^2]) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{2}{p^3}\right) = \underline{\frac{6}{p^4}} \quad \left[\frac{1}{p^3}\right]' = [p^{-3}]' = -3 \cdot p^{-4} = -\frac{3}{p^4}$$

$$\underline{\mathcal{L}[t^4]} = \dots$$

$$\mathcal{L}[f'] = p \cdot \mathcal{L}[f] - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = p F(p) - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$$

Zdůvodnění:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt &= \left| \begin{array}{ll} u = e^{-pt} & u' = -p e^{-pt} \\ v' = f'(t) & v = f(t) \end{array} \right| = \left[e^{-pt} \cdot f(t) \right]_0^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(e^{-pt} f(t) \right) - \lim_{t \rightarrow 0_+} \left(e^{-pt} f(t) \right) + p F(p) = 0 - e^{-p \cdot 0} \cdot \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) + p F(p) = p F(p) - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) \end{aligned}$$

Příklad:

$$\underline{\mathcal{L}[\cos t]} = \mathcal{L}[(\sin t)'] = p \cdot \mathcal{L}[\sin t] - \lim_{t \rightarrow 0_+} \sin t =$$

$$(\text{víme, že } \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{p^2 + 1}, p > 0 \quad \text{a} \quad \text{funkce } \sin t \text{ je spojitá v } 0_+)$$

$$= p \cdot \frac{1}{p^2 + 1} - \sin 0 = \underline{\underline{\frac{p}{p^2 + 1}}}, p > 0$$

Poznámky:

- $\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$ se někdy značí $f(0_+)$
- Jestliže je f spojitá v bodě 0 zprava, potom $\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = f(0)$.
- V aplikacích má $\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$ význam počáteční podmínky !

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f(t)]$$

Zdůvodnění:

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = \left[H(\tau)\right]_0^t = H(t) - H(0) \quad H(\tau) \text{ je primitivní funkce k funkci } f(\tau)$$

$$\mathcal{L}[g(t)] = ?$$

$$g'(t) = H'(t) = f(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0_+} (H(t) - H(0)) = H(0) - H(0) = 0$$

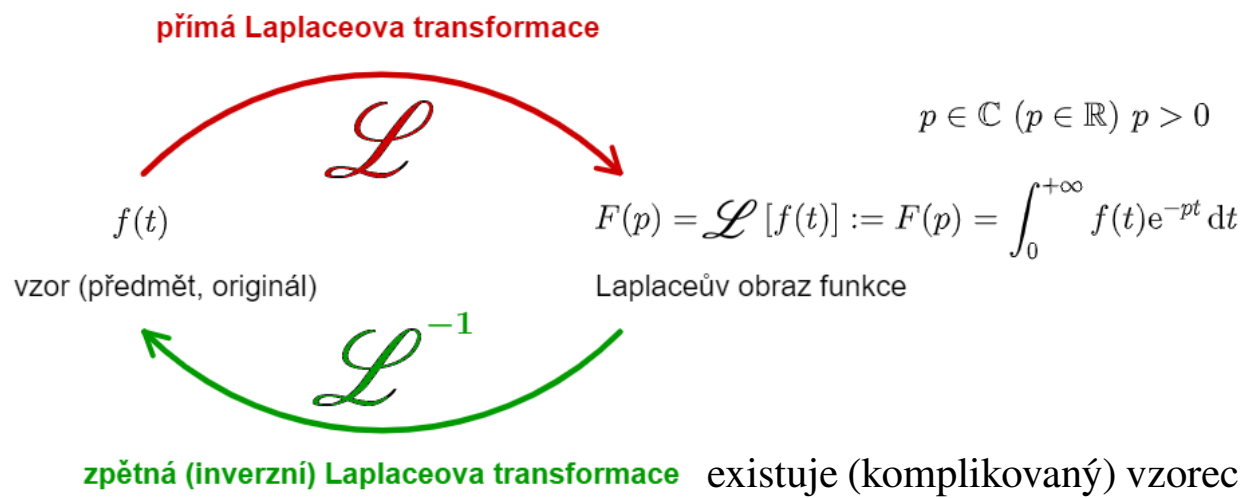
$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = p \mathcal{L}[g(t)] - \lim_{t \rightarrow 0_+} g(t) = p \mathcal{L}[g(t)]$$

Shrnutí:

Zatím jsme vybudovali tento **slovník Laplaceovy transformace**:

$f(t) \dots$ vzor	$F(p) \dots$ obraz
1	$\frac{1}{p}, \quad p > 0$
$\sin t$	$\frac{1}{p^2 + 1}, \quad p > 0$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad p > 0, \quad \omega > 0$
e^{at}	$\frac{1}{p - a}, \quad p > a$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$
t^3	$\frac{6}{p^4}$
$\cos t$	$\frac{p}{p^2 + 1}, \quad p > 0$

REKAPITULACE

Vlastnosti Laplaceovy transformace

V1	<u>LINEARITA</u>	$\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{L}[f_1] + \beta \mathcal{L}[f_2]$
V2	<u>ZMĚNA MĚŘÍTKA</u>	$\mathcal{L}[f(\omega t)](p) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right)$
V3	<u>POSUNUTÍ V OBRAZU</u>	$\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = \mathcal{L}[f(t)](p - a) = F(p - a)$
V4	<u>DERIVACE OBRAZU</u>	$\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{dp}(\mathcal{L}[f(t)]) = -\frac{dF}{dp}$
V5	<u>OBRAZ DERIVACE</u>	$\mathcal{L}[f'] = p \cdot \mathcal{L}[f] - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = p F(p) - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$
V6	<u>OBRAZ INTEGRÁLU</u>	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f(t)]$

Zatím jsme vybudovali tento **slovník Laplaceovy transformace**:

$f(t)$... vzor	$F(p)$... obraz
1	$\frac{1}{p}, \quad p > 0$
$\sin t$	$\frac{1}{p^2 + 1}, \quad p > 0$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad p > 0, \quad \omega > 0$
e^{at}	$\frac{1}{p - a}, \quad p > a$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^2	$\frac{2}{p^3}$
t^3	$\frac{6}{p^4}$
$\cos t$	$\frac{p}{p^2 + 1}, \quad p > 0$

Příklady: $\omega > 0$

$$1) \quad \underline{\mathcal{L}[\sinh(\omega t)]} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})\right] \stackrel{\text{V1}}{=} \frac{1}{2} \mathcal{L}[e^{\omega t} - e^{-\omega t}] \stackrel{\text{V1}}{=} \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}[e^{\omega t}] - \mathcal{L}[e^{-\omega t}] \right) =$$

$$\stackrel{\text{slovník}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p - (-\omega)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(p + \omega) - (p - \omega)}{(p - \omega) \cdot (p + \omega)} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\omega}{p^2 - \omega^2} = \underline{\underline{\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}}}, \quad p > \omega$$

$$2) \quad \underline{\mathcal{L}[\cos(\omega t)]} \stackrel{\text{V2}}{=} \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\frac{p^2 + \omega^2}{\omega^2}} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{p}{\omega} \cdot \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} = \underline{\underline{\frac{p}{p^2 + \omega^2}}}, \quad p > 0$$

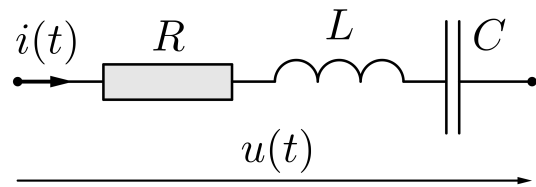
$$3) \quad \underline{\mathcal{L}[\cosh(\omega t)]} = \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} \cdot (\sinh(\omega t))'\right] \stackrel{\text{V1}}{=} \frac{1}{\omega} \cdot \mathcal{L}[(\sinh(\omega t))'] \stackrel{\text{V5}}{=} \frac{1}{\omega} \left(p \cdot \mathcal{L}[\sinh(\omega t)] - \lim_{t \rightarrow 0_+} \sinh(\omega t) \right) \stackrel{1)}{=}$$

$$\stackrel{1)}{=} \frac{1}{\omega} \left(p \cdot \frac{\omega}{p^2 - \omega^2} - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{p}{p^2 - \omega^2}}}, \quad p > \omega$$

$$4) \quad \underline{\mathcal{L}[f''(t)]} = \mathcal{L}[(f'(t))'] \stackrel{\text{V5}}{=} p \cdot \mathcal{L}[f'(t)] - \lim_{t \rightarrow 0_+} f'(t) \stackrel{\text{V5}}{=} p \cdot \left(p \cdot \mathcal{L}[f(t)] - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) \right) - \lim_{t \rightarrow 0_+} f'(t) =$$

$$= \frac{p^2 \cdot \mathcal{L}[f(t)] - p \cdot \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) - \lim_{t \rightarrow 0_+} f'(t)}{\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{počáteční} & \text{počáteční} \\ \text{podmínka} & \text{podmínka} \end{array}}$$

Příklad: pasivní lineární RLC dvojpól



$$\left(u'_C(t) = \frac{1}{C} i(t) \quad \text{viz strana 21} \right)$$

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Označme: $\mathcal{L}[i(t)] =: I(p)$ $i(t)$... stavová proměnná (neznáme)

$$\begin{aligned} \text{Potom} \quad U(p) &:= \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}\left[Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau\right] = \\ &\stackrel{\text{V1}}{=} R \mathcal{L}[i(t)] + L \mathcal{L}[i'(t)] + \frac{1}{C} \mathcal{L}\left[\int_0^t i(\tau) d\tau\right] = \\ &\stackrel{\text{V5, V6}}{=} R I(p) + L \left(p I(p) - \lim_{t \rightarrow 0_+} i(t) \right) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{p} I(p) = \\ &= R I(p) + pL I(p) - L \lim_{t \rightarrow 0_+} i(t) + \frac{1}{Cp} I(p) = \\ &= \underbrace{\left(R + pL + \frac{1}{Cp} \right)}_{=: Z(p)} I(p) - \underbrace{L \lim_{t \rightarrow 0_+} i(t)}_{\text{počáteční podmínka (ať je rovna 0)}} = \\ &\quad \text{obrazová impedance} \\ &\quad \text{(viz odborné předměty)} \end{aligned}$$

Závěr:

Zobecněný Ohmův zákon ... $U(p) = Z(p) \cdot I(p)$

Význam Laplaceovy transformace

$$u(t) = Ri(t) + Li'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

v původní proměnné t jde o integro-diferenciální vztah

↓

$$U(p) = Z(p) \cdot I(p)$$

v nové proměnné p jde o algebraický vztah

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)} \longrightarrow I(p) = Y(p) U(p)$$

$Z(p)$... obrazová impedance

$Y(p)$... obrazová admitance

Shrnutí:

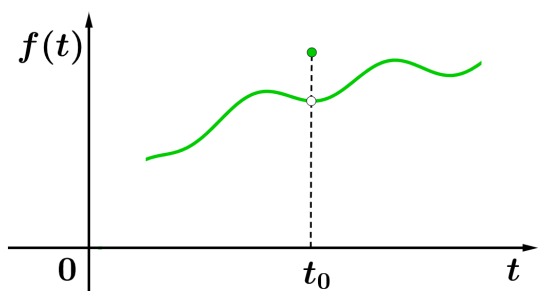
Po použití Laplaceovy transformace jsme místo rovnosti s derivacemi a integrály, které jsou v $u(t)$, dostali algebraický vztah bez derivací a integrálů (v komplexní proměnné) pro $U(p)$.

Víme: Ne každou funkci $f(t)$ lze zobrazit v Laplaceově transformaci, tj. vypočítat $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$!

Zobrazitelné funkce

Funkci f lze zobrazit v Laplaceově transformaci, jestliže platí:

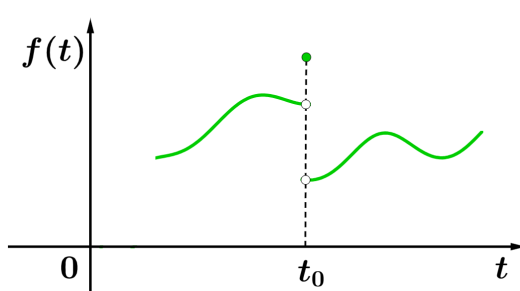
- ① na každém omezeném intervalu $\langle a; b \rangle \subset \langle 0; +\infty \rangle$ má funkce f nejvýše konečně mnoho bodů nespojitosti nejvýše 1. druhu



$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \neq f(t_0)$$

odstranitelná nespojitost

OK.



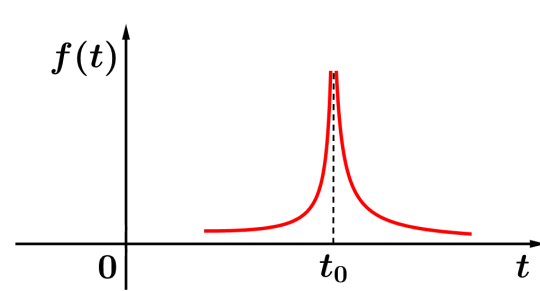
$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0+} f(t) = l_1 \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t) = l_2 \in \mathbb{R}$$

$$l_1 \neq l_2$$

skok (nespojitost I. druhu)

OK.



jinak

KO.

Protože nejde

„integrát uvnitř $\langle 0; +\infty \rangle$! “

- ② f má nejvýše exponenciální růst, tj. $\exists m, \sigma > 0 \quad \forall t \in \langle 0, +\infty \rangle : |f(t)| \leq m e^{\sigma t}$

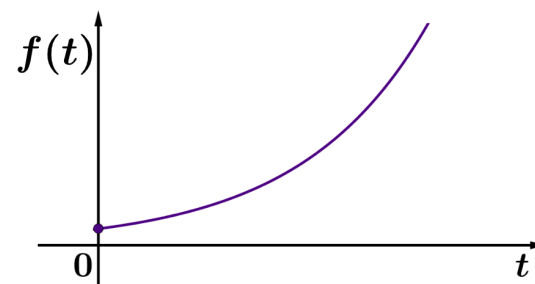
Proč? „Abychom mohli integrovat až do $+\infty$! “

$$|f(t) e^{-pt}| \leq |f(t)| \cdot e^{-pt} \leq m e^{\sigma t} e^{-pt} = m e^{(\sigma-p)t}$$

$$\underline{p > \sigma} \Rightarrow \sigma - p < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\sigma-p)t} = 0 \Rightarrow$$

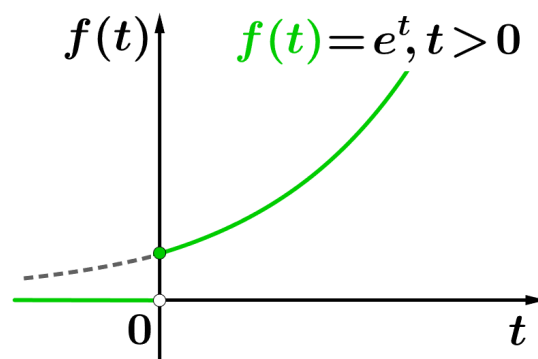
$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} m e^{(\sigma-p)t} dt = \left[m \frac{e^{(\sigma-p)t}}{\sigma-p} \right]_0^{+\infty} = \underbrace{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{m}{\sigma-p} e^{(\sigma-p)t}}_{=0} - \frac{m}{\sigma-p} \in (0; +\infty)$$

Takže $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \leq \int_0^{+\infty} m e^{(\sigma-p)t} dt < +\infty ! \quad \text{pro } p > \sigma$

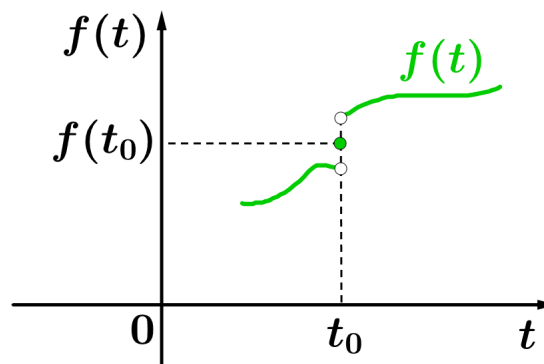


Poznámka: Často se připojují dvě dodatečné podmínky na f .

③ $\forall t < 0 : f(t) = 0$



④ $\forall t_0 \in \langle 0; +\infty \rangle : f(t_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow t_0+} f(t) + \lim_{t \rightarrow t_0-} f(t) \right)$



(Podmínky ③ a ④ nebudeme potřebovat)

Pro zavedení zpětné Laplaceovy transformace si uvědomme:

Platí:

$$\bullet \quad \forall t \in \langle 0; +\infty) : f(t) = g(t) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathcal{L}[f(t)]}_{F(p)} = \underbrace{\mathcal{L}[g(t)]}_{G(p)} \quad (\text{přímá Laplaceova transformace})$$

Poznámka:

Stačí i méně: funkce f a g se mohou lišit v konečně mnoha bodech (to nemá vliv na hodnotu integrálu).

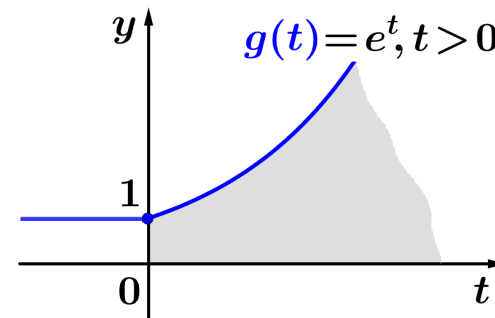
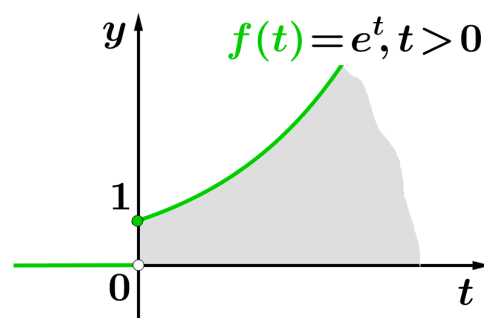
Nyní se snažíme ukázat platnost opačné implikace pro zpětnou Laplaceovu transformaci.

• Lerchova věta: $(\Leftarrow)$

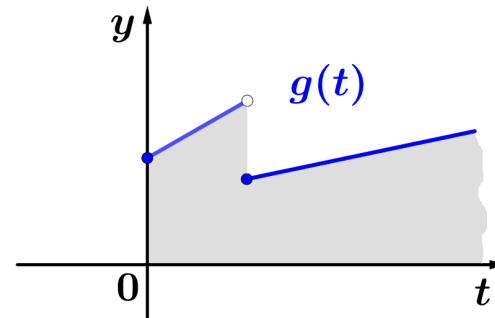
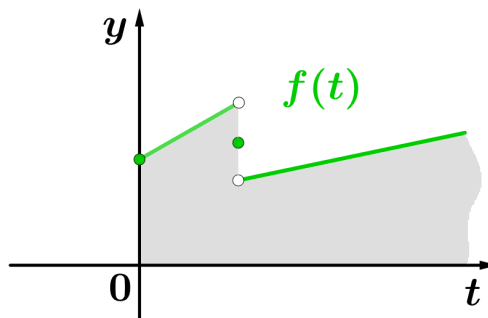
Jestliže $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, potom $f(t_0) = g(t_0)$ pro každé $t_0 \in \langle 0; +\infty)$, ve kterém jsou obě funkce spojité, tj. funkce f a g se mohou lišit pouze v bodech nespojitosti, kterých je málo díky podmínce ① a pro $t < 0$.

např:

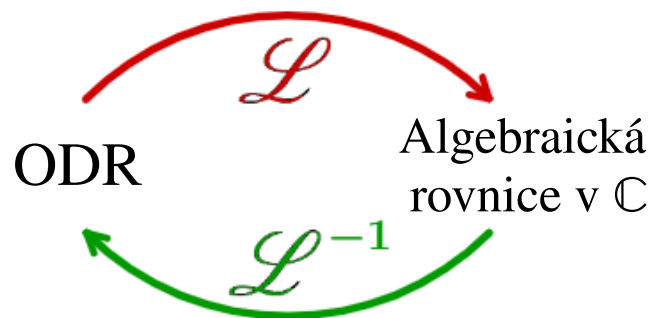
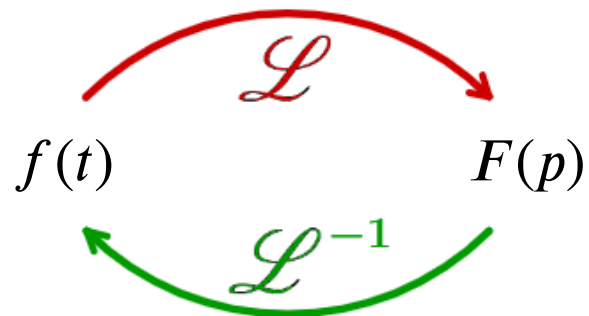
viz podmínka ③



viz podmínka ④



$\Rightarrow$ Proto podmínky ③ a ④ nemusíme uvažovat.



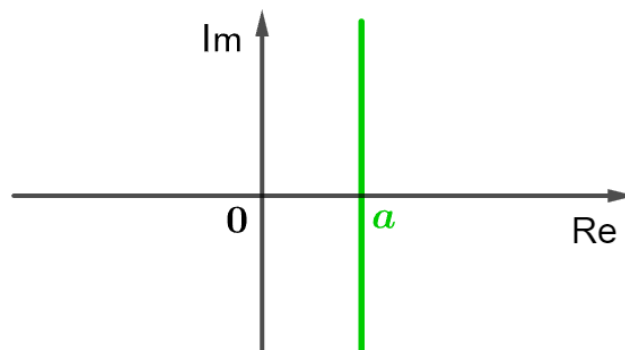
Slovník

$f(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$F(p)$
	$\xleftarrow{\mathcal{L}^{-1}}$	

Definiční vztah pro zpětnou Laplaceovu transformaci

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

... integrujeme přes přímku v $\mathbb{C}$



... integrál musí konvergovat

... Nepoužívá se !

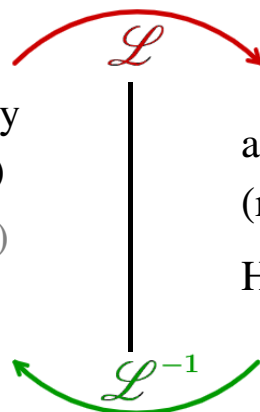
Slovník Laplaceovy transformace

$f(t)$... vzor	$F(p)$... obraz
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$

Schéma řešení ODR pomocí Laplaceovy transformace

lineární ODR n -tého řádu s konstantními koeficienty
(resp. soustava n ODR 1. řádu s konst. koeficienty)
+ počáteční podmínky (pro $\mathcal{L}$ použijeme rovnou)

Hledáme: $y(t) = ?$ $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)]$



algebraická rovnice v komplexním oboru
(resp. soustava algebraických rovnic)

Hledáme: $Y(p) = ?$ $Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$

Poznámka:

Uvedené schéma připomíná **symbolicko-komplexní metodu** z odborných předmětů, ta ovšem funguje jen na situace, kdy zdroje v obvodu jsou harmonické ($\sin, \cos \dots$) a hledáme tzv. ustálené stavy, tj. jak např. vypadá průběh proudu v obvodu po odeznění všech přechodných dějů. Na rozdíl od toho, Laplaceova transformace zahrne i tyto přechodné děje a hlavně i zdroje, které nejsou nutně harmonické.

Při použití **slovníku Laplaceovy transformace** si uvědomme:

	$f(t) \dots$ vzor	$F(p) \dots$ obraz
	$1, t \geq 0$	$\frac{1}{p}, p > 0, p \in \mathbb{R} \quad (\operatorname{Re} p > 0, p \in \mathbb{C}) !$
	$e^{at}, t \geq 0$	$\frac{1}{p - a}, p > a \quad (\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a, p \in \mathbb{C}) !$

Příklad:

$$\begin{aligned} y'(t) + 2y(t) &= 4 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

cíl: $y(t) = ?$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{p(p+2)}\right] = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+2}\right] = ? \quad \dots \text{ není přímo v našem slovníku}$$

Víme, ale: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1$ a $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right] = e^{-2t}$... (ze slovníku)

VAROVÁNÍ: $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+2}\right] \neq \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+2}\right]$

Víme: $\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{L}[f_1] + \beta \mathcal{L}[f_2] = \alpha F_1(p) + \beta F_2(p) \quad / \mathcal{L}^{-1}$

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F_1(p) + \beta F_2(p)] = \alpha \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[F_1(p)]}_{f_1(t)} + \beta \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[F_2(p)]}_{f_2(t)} \quad \dots \text{ linearita } \boxed{\text{V1}}$$

Cíl: místo **součinu** chceme mít **součet**, tj. použijeme ROZKLAD NA PARCIÁLNÍ ZLOMKY

označme: $Y(p) = \mathcal{L}[y(t)]$

$$\mathcal{L}[y'(t) + 2y(t)] = \mathcal{L}[4]$$

$$\mathcal{L}[y'(t)] + 2 \cdot \mathcal{L}[y(t)] = 4 \cdot \mathcal{L}[1]$$

$$pY(p) - \lim_{t \rightarrow 0+} y(t) + 2 \cdot Y(p) = 4 \cdot \frac{1}{p}$$

$$pY(p) + 2Y(p) = \frac{4}{p} \quad \text{Cíl: } Y(p) = ?$$

$$(p+2)Y(p) = \frac{4}{p} \quad /: (p+2) \neq 0$$

$$Y(p) = \frac{4}{p(p+2)}$$

Metoda A = ROZKLAD NA PARCIÁLNÍ ZLOMKYChceme:

$$\frac{1}{p(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} \quad / \cdot p(p+2)$$

$$1 = A(p+2) + Bp$$

$$p=0: \quad 1 = A(0+2) + B \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2A \quad \Rightarrow \quad \underline{A = \frac{1}{2}} \quad (\text{dosadili jsme za } p \text{ nulové body})$$

$$p=-2: \quad 1 = A(-2+2) + B \cdot (-2) \quad \Rightarrow \quad 1 = -2B \quad \Rightarrow \quad \underline{B = -\frac{1}{2}}$$

nebo jinak:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \cdot p + 1 = Ap + 2A + Bp \\ 0 \cdot p + 1 = (A+B)p + 2A \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \end{array}}} \quad (\text{porovnáme koeficienty na obou stranách rovnice})$$

Dostáváme:

$$\frac{1}{p(p+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{p+2}$$

Takže:

$$\begin{aligned} \underline{y(t)} &= 4 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+2} \right] = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{p+2} \right] = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p} \right] - \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p+2} \right] \right) = \\ &= \underline{2 - 2e^{-2t}}, \quad t \geq 0 ! \end{aligned}$$

Shrnutí:

- zobrazili jsme počáteční úlohu pomocí Laplaceovy transformace na algebraickou rovnici pro $Y(p)$
 - vypočítali jsme $Y(p)$
 - zobrazili jsme $Y(p)$ pomocí zpětné Laplaceovy transformace na $y(t)$
- (použili jsme rozklad na parciální zlomky, linearitu $\mathcal{L}$ a $\mathcal{L}^{-1}$ a slovník)

Rozklad na parciální zlomky není nutný pokud použijeme jinou metodu využívající **konvoluci funkcí**.

Metoda B = VYUŽITÍ KONVOLUCE FUNKCÍ

pro $f, g: \langle 0; +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - s) g(s) ds$$

Zdůvodnění = (pomocí substituce v určitém integrálu)

$$\int_0^t f(\tau) g(\underbrace{t - \tau}_s) d\tau = \left| \begin{array}{ll} s = t - \tau & \tau = t - s \\ ds = -d\tau & d\tau = -ds \\ \tau = 0 & s = t \\ \tau = t & s = 0 \end{array} \right| = \int_t^0 f(t - s) g(s) (-ds) = \int_0^t f(t - s) g(s) ds$$

Platí:

V7

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g] = F(p) \cdot G(p)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(p) \cdot G(p)] = (f * g)(t) \quad (\text{srovnej s } \underline{\text{VAROVÁNÍM}})$$

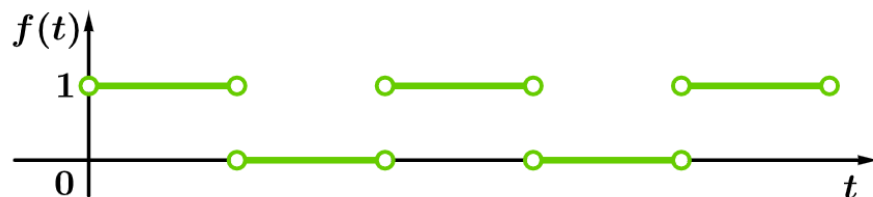
ukážeme pouze na příkladu:

$$\begin{aligned} \underline{y(t)} &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{p(p+2)}\right] = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p+2}\right] \stackrel{\text{V7}}{=} 4 \cdot (1 * e^{-2t}) = \left(\begin{array}{l} \text{použijeme 2. integrál z definice} \\ f(t) = 1 \quad \forall t \end{array} \right) = \\ &= 4 \cdot \int_0^t e^{-2s} ds = 4 \cdot \left[\frac{e^{-2s}}{-2} \right]_0^t = 4 \cdot \left(\frac{e^{-2t}}{-2} - \frac{1}{-2} \right) = \underline{-2e^{-2t} + 2}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Dostali jsme stejný výsledek jako při použití rozkladu na parciální zlomky.

Závěrečné poznámky:

- ① U všech rovnic, např. $y' + 2y = b(t)$, jsme požadovali, aby pravá strana $b(t)$ byla spojitá. Pomocí Laplaceovy transformace lze zobrazit i nespojité funkce, které nemají nespojitosti II. druhu. Umíme tedy řešit i rovnice s nespojitou pravou stranou, např.



význam $b(t)$... zdroje

odpovídá střídavému zapnutí, vypnutí, ...

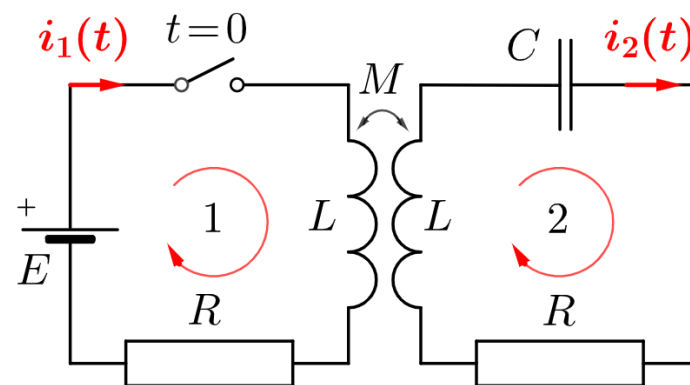
- ② Funguje i na integro-diferenciální rovnice, resp. jejich soustavy.

Příklad:

soustava dvou integro-diferenciálních rovnic
induktivně vázané dvě smyčky, M ... přenos

Kirchhoffovy zákony:

(součet napětí v každé smyčce je roven 0)



$$L i_1'(t) + M i_2'(t) + R i_1(t) = E$$

$$L i_2'(t) + M i_1'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + R i_2(t) = 0$$

$\mathcal{L}$ ↪

$$I_1(p) = \mathcal{L}[i_1(t)]; \quad I_2(p) = \mathcal{L}[i_2(t)]; \quad \text{poč. podm.: } i_1(0) = 0, i_2(0) = 0$$

$$L p I_1(p) + M p I_2(p) + R I_1(p) = \frac{E}{p}$$

$$L p I_2(p) + M p I_1(p) + \frac{1}{C} \frac{1}{p} I_2(p) + R I_2(p) = 0$$

$$\mathcal{L}[E] = \mathcal{L}[E \cdot 1] = E \cdot \mathcal{L}[1] = \frac{E}{p}$$

$$\mathcal{L}[i_1'] = p \cdot \mathcal{L}[i_1] - \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0+} i_1(t)}_{=0}$$

- Řešením soustavy $\mathbf{A}\vec{I} = \vec{b}$ vypočítáme $I_1(p)$ a $I_2(p)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} R + Lp & Mp \\ Mp & R + Lp + \frac{1}{Cp} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} E \\ p \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{I} = \begin{pmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \end{pmatrix}$$

$$\vec{I} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{E (CLp^2 + CRp + 1)}{p (CL^2p^3 + 2CLR p^2 + Lp - CM^2p^3 + CR^2p + R)} \\ -\frac{CEMp}{CL^2p^3 + 2CLR p^2 + Lp - CM^2p^3 + CR^2p + R} \end{pmatrix}$$

např. pro $E = C = L = R = M = 1$:

$$I_1(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p(2p^2 + 2p + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p + 1}{2p^2 + 2p + 1} = \dots = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p + \frac{1}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2}$$

$$I_2(p) = -\frac{p}{2p^2 + 2p + 1} = \dots = -\frac{1}{2} \cdot \frac{p + \frac{1}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{(p + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2}$$

- Provedeme $\mathcal{L}^{-1}$

$$\underline{i_1(t)} = \mathcal{L}^{-1}[I_1(p)] = \underline{1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

$$\underline{i_2(t)} = \mathcal{L}^{-1}[I_2(p)] = \underline{\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

③ Existují i jiné transformace ! Volba vhodné transformace závisí na řešeném problému.

- Fourierova transformace ... frekvenční analýza spojitého signálu (f)
- diskrétní Fourierova transformace ... frekvenční analýza diskrétního signálu (Σ)
- transformace Z ... řešení diferenčních rovnic

Opět jsou odvozeny vlastnosti těchto transformací a případně slovníky. Podrobnosti viz literatura, google, atd.

Ve stručnosti uvedme základní informace k Fourierově transformaci v porovnání s Laplaceovou transformací.

Základní vzorce Laplaceovy transformace

Def	<u>DEFINICE</u>	$\mathcal{L}[f(t)](p) := \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$
V1	<u>LINEARITA</u>	$\mathcal{L}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{L}[f_1] + \beta \mathcal{L}[f_2]$
V2	<u>ZMĚNA MĚŘÍTKA</u>	$\mathcal{L}[f(at)](p) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$
V3	<u>POSUNUTÍ V OBRAZU</u>	$\mathcal{L}[e^{at} \cdot f(t)] = F(p - a)$
V4	<u>DERIVACE OBRAZU</u>	$\mathcal{L}[t \cdot f(t)] = -\frac{d}{dp} F(p)$
V5	<u>OBRAZ DERIVACE</u>	$\mathcal{L}[f'(t)] = p F(p) - \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t)$
V6	<u>OBRAZ INTEGRÁLU</u>	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right](p) = \frac{1}{p} F(p)$

Základní vzorce Fourierovy transformace

Def DEFINICE

$$\mathcal{F}[f(t)](j\omega) := F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

V1 LINEARITA

$$\mathcal{F}[\alpha f_1 + \beta f_2] = \alpha \mathcal{F}[f_1] + \beta \mathcal{F}[f_2]$$

V2 ZMĚNA MĚŘÍTKA

$$\mathcal{F}[f(at)](j\omega) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

V3 POSUNUTÍ V OBRAZU

$$\mathcal{F}[e^{jat} \cdot f(t)] = F(j(\omega - a))$$

V4 DERIVACE OBRAZU

$$\mathcal{F}[t \cdot f(t)] = j \frac{d}{d\omega} F(j\omega)$$

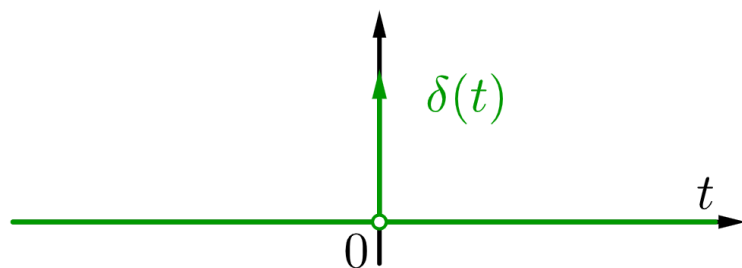
V5 OBRAZ DERIVACE

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(j\omega)$$

V6 OBRAZ INTEGRÁLU

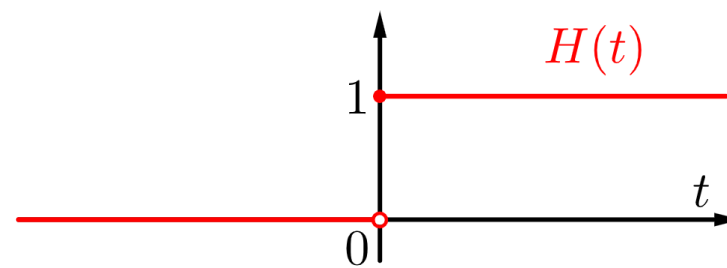
$$\mathcal{F}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(j\omega)}{j\omega}$$

Diracův (jednotkový) impuls



$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

Heavisideova (skoková) funkce



$$H(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Slovník Laplaceovy transformace

$f(t)$... vzor	$F(p)$... obraz
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p - a}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p - a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$e^{at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p - a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos(\omega t)$	$\frac{p - a}{(p - a)^2 + \omega^2}$

Slovník Fourierovy transformace

$f(t)$... vzor	$F(j\omega)$... obraz
Diracův (jednotkový) impuls $\delta(t)$	1
Heavisideova (skoková) funkce $H(t)$	$\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$\cos(at)$	$\pi [\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a)]$
$\sin(at)$	$j\pi [\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)]$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
$e^{-at} H(t), a > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
$t e^{-at} H(t), a > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$e^{-at} \cos(bt) H(t), a > 0$	$\frac{a + j\omega}{b^2 + (a + j\omega)^2}$
$e^{-at} \sin(bt) H(t), a > 0$	$\frac{b}{b^2 + (a + j\omega)^2}$

Taylorovy řady

Dáno:

- bod $x_0 \in \mathbb{R}$ (střed Taylorovy řady)
- funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která má derivace všech potřebných řádů („pěkná“) např. e^x , $\sin x$, ...

Taylorův polynom n -tého stupně funkce f v bodě x_0 je definován vztahem:

$$T_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Značení: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, ...

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0), \quad f^{(1)}(x_0) = f'(x_0), \quad f^{(2)}(x_0) = f''(x_0), \quad \dots$$

Poznámky:

- $T_n(x)$ závisí na bodě x_0 , ve kterém funkci f aproximujeme. Často bereme $x_0 = 0$, ale může být $x_0 \neq 0$.
- $T_n(x)$ závisí také hlavně na funkci f .

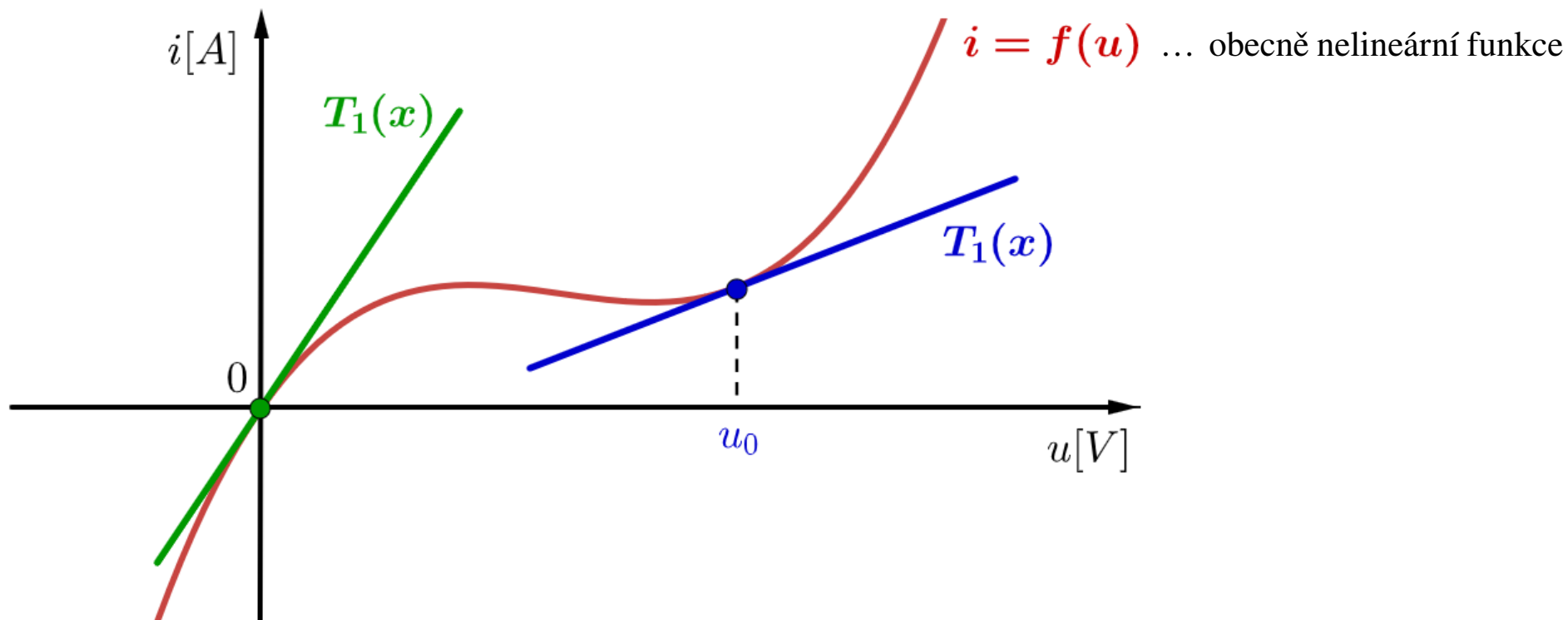
Chyba aproximace funkce f Taylorovým polynomem n -tého stupně v bodě x_0 je $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$.

Poznámka:

Pomocí Taylorova polynomu se např. počítá hodnota funkce e^x , $\sin x$ na kalkulačce a PC.

Jedná se tedy o aproximaci určenou s nějakou danou přesností.

Příklad: Voltampérová charakteristika součástky



závislost i na u nahradíme $T_1(x)$... linearizace

v bodě $u_0 = 0$... $i = \frac{1}{R} u$ (Ohmův zákon)

v bodě $u_0 \neq 0$... linearizace v pracovním bodě

Grafický význam linearizace je náhrada tečnou ke grafu funkce v daném bodě.

Příklad:

$$f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0$$

$$\underline{T_0(x)} = f(x_0) = \underline{0}$$

$$f(x_0) = f(0) = \sin 0 = 0$$

$$\underline{T_1(x)} = \underbrace{f(x_0)}_{T_0(x)} + f'(x_0)(x - x_0) = 0 + 1 \cdot (x - 0) = \underline{x}$$

$$f'(x) = \cos x; \quad f'(x_0) = \cos 0 = 1$$

$$\Rightarrow \sin x \approx x \quad \text{pro } x \approx 0 \quad \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1 \quad \text{pro } x \rightarrow 0$$

$$\underline{T_2(x)} = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T_1(x)} + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 = \underline{x}$$

$$f''(x) = -\sin x; \quad f''(x_0) = -\sin 0 = 0$$

$$\Rightarrow T_2(x) = x \quad \dots \quad \text{stejný jako } T_1(x)$$

$$\underline{T_3(x)} = T_2(x) + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 = \underline{x - \frac{x^3}{6}}$$

$$f'''(x) = -\cos x; \quad f'''(x_0) = -\cos 0 = -1$$

$$\underline{T_4(x)} = T_3(x) + \frac{1}{4!} f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4 = \underline{x - \frac{x^3}{6}}$$

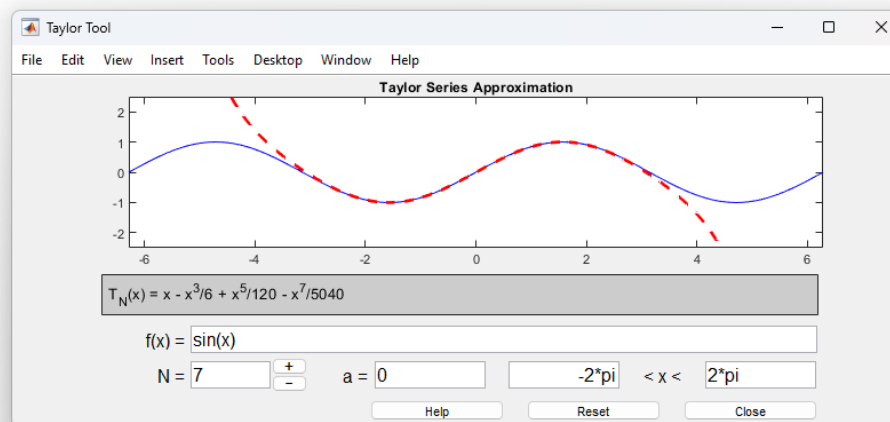
$$f^{(4)}(x) = \sin x; \quad f^{(4)}(x_0) = \sin 0 = 0$$

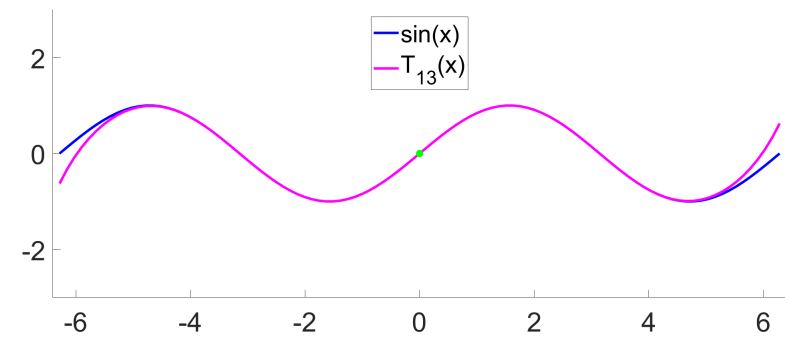
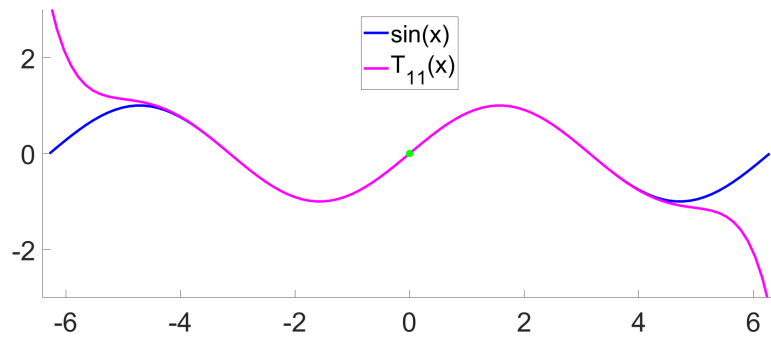
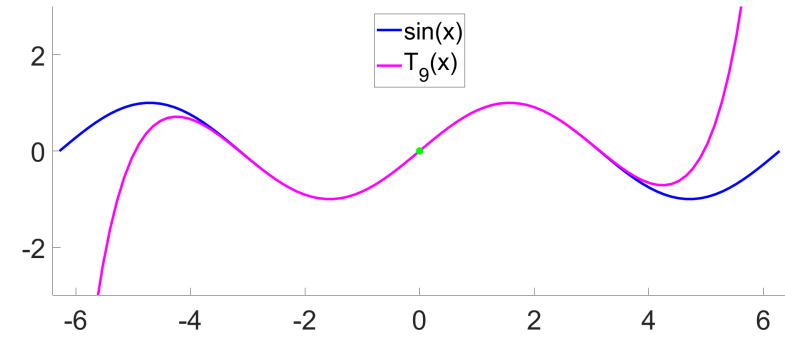
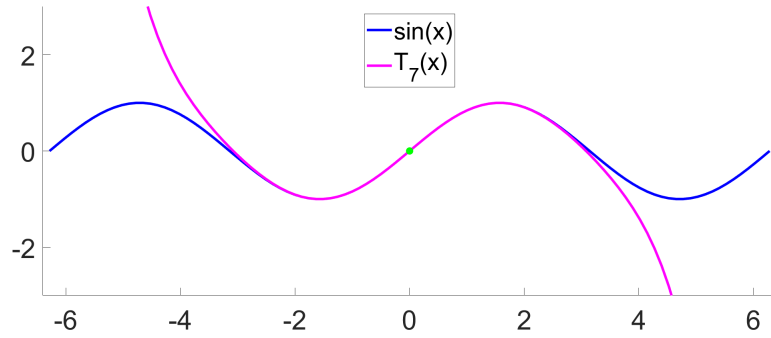
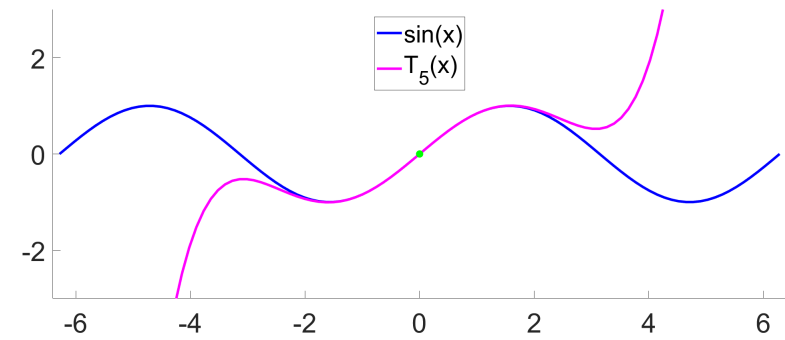
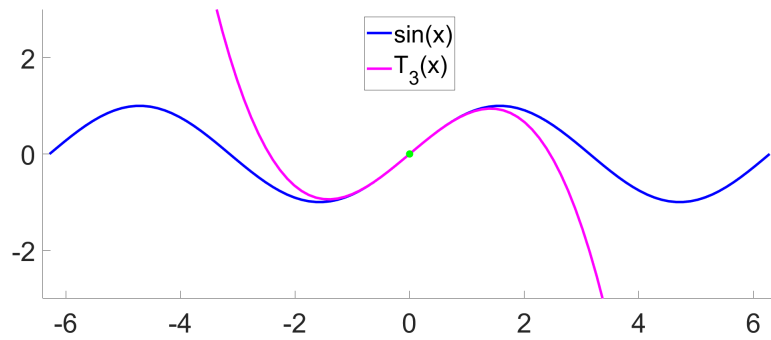
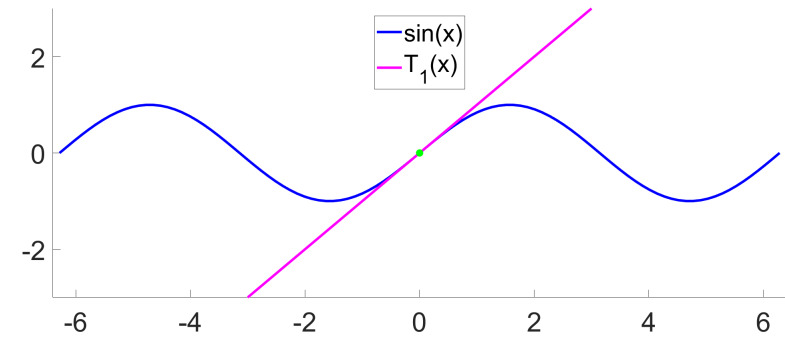
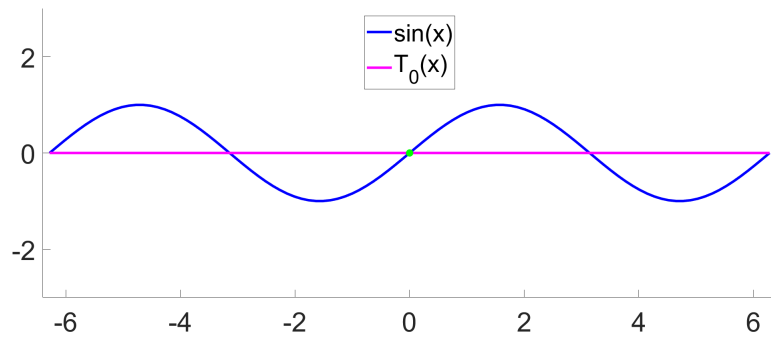
⋮

$$\Rightarrow T_4(x) = x - \frac{x^3}{6} \quad \dots \quad \text{stejný jako } T_3(x)$$

MATLAB

... taylortool



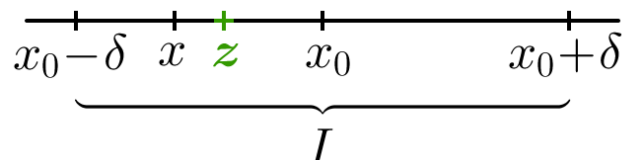


Jak je to s chybou aproximace $R_n(x)$?

Jestliže má funkce f na intervalu $I := \langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle$ derivace až do řádu $n + 1$, potom lze zbytek $R_n(x)$ vyjádřit v tzv. Lagrangeově tvaru:

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) \stackrel{!}{=} \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z) (x - x_0)^{n+1}$$

kde bod z leží mezi x_0 a $x \in I$.



Poznámky:

- Existují i jiné tvary zbytku - Peanův, Cauchyův (viz Google).
- Vztah pro $R_n(x)$ je odvozen na základě věty o střední hodnotě.
- Nevíme, kde přesně bod z leží !

Příště se podíváme na to, jakým způsobem lze odhadnout $R_n(x)$ a co platí, pokud budeme n zvětšovat do $+\infty$.

Taylorova řada funkce f v bodě x_0 je definována vztahem:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$$

(nekonečná řada)

Poznámky:

- Pro dané $x \in \mathbb{R}$ se jedná o součet nekonečně mnoha čísel, který nemusí existovat, tj. příslušná číselná řada nemusí konvergovat (viz zimní semestr)

např. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \dots$ konverguje, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \dots$ diverguje

- $T_n(x)$ má význam n -tého částečného součtu řady

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots, \quad (s_n)_{n=1}^{+\infty} \dots \text{ posloupnost částečných součtů}$$

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S \dots \text{ konvergentní řada}$$

$\uparrow$
součet řady

- $T_n(x)$ závisí na hodnotě $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ pro nějaká x může řada mít součet, ale pro jiná x nikoli !

Množina $x \in \mathbb{R}$, pro která příslušná číselná řada konverguje, se nazývá **obor konvergence** a značí se **K** .

- Součtová funkce Taylorovy řady** je definována vztahem:

$$T(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in K$$

Příklad:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

1) Určete $T_n(x)$:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{1-0} = 1 \quad (x_0 = 0)$$

$$f'(x) = [(1-x)^{-1}]' = -1 \cdot (1-x)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{(1-0)^2} = 1$$

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{1}{(1-x)^3} \cdot (-1) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f''(x_0) = \frac{2}{(1-0)^3} = 2$$

$$f'''(x) = 2 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{(1-x)^4} \cdot (-1) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}$$

$$f'''(x_0) = \frac{2 \cdot 3}{(1-0)^4} = 2 \cdot 3 = 6 = 3!$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{(1-x)^5} \quad \dots \text{ ověřte si}$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(1-0)^5} = 4!$$

$\vdots$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{(1-x)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{n!}{(1-0)^{n+1}} = n!$$

$$\begin{aligned} \underline{T_n(x)} &= 1 + 1 \cdot (x-0) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x-0)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (3!) \cdot (x-0)^3 + \frac{1}{4!} \cdot (4!) \cdot (x-0)^4 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot (n!) \cdot (x-0)^n = \\ &= \underline{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n} \end{aligned}$$

Tedy:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$$

... Taylorův polynom n -tého stupně funkce $f(x) = \frac{1}{1-x}$ v bodě $x_0 = 0$

Pro konkrétní volbu x získáme hodnotu $T_n(x)$, tj. např.

$$x = \frac{1}{2} \quad \dots \quad T_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$x = 2 \quad \dots \quad T_n(2) = \sum_{k=0}^n 2^k$$

atd.

2) Určete obor konvergence K a součtovou funkci $T(x)$:

$$\underline{T(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \underline{\frac{1}{1-x}}, \quad \boxed{x \in (-1; 1) = K}$$

↑

číselná nekonečná geometrická řada $\forall x$

$$q = x, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{pro } |q| < 1$$

SHRNUTÍ:

Vstup: $f(x) = \frac{1}{1-x} \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Výstup: $T(x) = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1; 1) = K$

↳ Taylorova řada funkce f v bodě x_0 (pro jiné x_0 získáme obecně jinou Taylorovu řadu)

Tedy: $f(x) \neq T(x) \quad x \in D(f)$

ALE: $\boxed{f(x) = T(x) \quad x \in K = (-1; 1)}$

Otázky na příště:

- Pro jaké funkce existuje $T(x)$?
- Jaký je obor konvergence K ?
- Kdy platí, že $f(x) = T(x)$?

Poznámka:

Využití pro výpočet např. $\sin 2,34$ na kalkulačce

(např. $\sin 2,34 \approx T_{50}(2,34)$)

Chyba této aproximace závisí na $R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z) (x - x_0)^{n+1}$

Příklad k procvičení:

Určete Taylorovu řadu pro funkci $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

REKAPITULACE

Dáno: funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in \mathbb{R}$ (f chceme aproximovat)

↑
„pěkná“, tj. existují derivace všech potřebných řádů

Taylorův polynom

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

Chyba: $R_n(x) := f(x) - T_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z)(x - x_0)^{n+1}$, kde z leží někde mezi x a x_0 .

Taylorova řada:

$$T(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in K$$

↑
obor konvergence

Ukázali jsme si příklad:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0, \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k \longrightarrow T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1; 1) = K$$

$$f(x) \neq T(x), \quad x \in D(f) \quad \boxed{\text{ALE}} \quad \underline{f(x) = T(x), \quad x \in K!}$$

↑

Odpovězme na otázku, pro jaké funkce f toto platí

Platí: Jestliže má f stejnoměrně omezené derivace všech řádů na intervalu $I = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, $\delta > 0$, tj.

$$\exists M > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall z \in I : |f^{(n)}(z)| < M,$$

potom $f(x) \stackrel{!}{=} T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset K.$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_0 - \delta & x_0 & x_0 + \delta \\ \hline \end{array} \\ \hline I \end{array}$$

Praktický význam:

Funkci f aproximujeme konečnou řadou $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$

a čím větší n vezmeme, tím bude aproximace přesnější.

Terminologie:

Říkáme, že funkce f lze v bodě x_0 rozvinout v Taylorovu řadu a $T(x)$ se nazývá Taylorův rozvoj funkce f v bodě x_0 .

Zdůvodnění:

Zvolíme libovolné $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset K$

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = R_n(x) + T_n(x) \quad \Bigg/ \lim_{n \rightarrow +\infty}$$

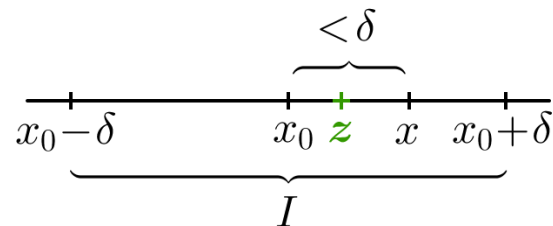
$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) + \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x)$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & ??? & \parallel \\ f(x) = & 0 & + & T(x) \end{array}$$

Víme:

$$R_n(x) := \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z) (x - x_0)^{n+1}$$

(kde z leží někde mezi x a x_0)



Takže:

$$|R_n(x)| := \frac{1}{(n+1)!} \cdot |f^{(n+1)}(z)| \cdot |x - x_0|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot M \cdot \delta^{n+1} = M \cdot \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} M \cdot \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = M \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \stackrel{*}{=} M \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0}$$

*

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0}$$

pro $|a| < 1$ zřejmě

pro $a \geq 1$

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n} = \quad (\exists n_0 \in \mathbb{N} : a < n_0, \text{ tj. } \frac{a}{n_0} < 1)$$

$$= \frac{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot \textcolor{blue}{a} \cdots \textcolor{blue}{a} \cdot a}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n_0 \cdot \textcolor{blue}{(n_0 + 1)} \cdots \textcolor{blue}{(n-1)} \cdot n} \leq$$

$$\leq \frac{a^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{a}{n} = \underbrace{\frac{a^{n_0+1}}{n_0!}}_{= \text{konst.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (\text{podle věty o sevření})$$

$$\underbrace{\text{pro } a \leq -1} \quad \left| \frac{a^n}{n!} \right| \leq \frac{|a|^n}{n!} \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow +\infty$$

tj. platí pro $a \in \mathbb{R}$

Příklad:

$$\boxed{f(x) = \sin x, x_0 = 0} \quad (\text{již minule})$$

$$1) \quad \underline{T_n(x)} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

$$f(x) = \sin x \qquad f(x_0) = f(0) = \sin 0 = 0$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(x_0) = f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(x_0) = f''(0) = -\sin 0 = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(x_0) = f'''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(x_0) = f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0$$

$\vdots$

derivace se dále po čtveřicích opakují

$$T_3(x) = 0 + 1 \cdot (x - 0) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (x - 0)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (-1) \cdot (x - 0)^3 = x - \frac{1}{6} x^3$$

$$T_4(x) = x - \frac{1}{6} x^3 \quad (= T_3(x)) \quad \text{členy se sudou mocninou} = 0$$

$$2) \quad \underline{T(x)} = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \frac{1}{9!} x^9 + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in K = ???$$

$\downarrow$ Taylorovy koeficienty

$$3) \quad \underline{K = ???} \quad (\text{viz str. 114}) \quad \boxed{\forall z \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}: |f^{(n)}(z)| \leq 1,}$$

$\uparrow$

bud' $\sin z$, $\cos z$, $-\sin z$ nebo $-\cos z$

$$\Rightarrow f(x) = T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \boxed{x \in \mathbb{R}} = K$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Příklad:

Pomocí Taylorovy řady funkce $\sin x$ v bodě $x_0 = 0$ aproximujte hodnotu $\sin x$ pro $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$ tak, aby chyba byla nejvýše 10^{-5} , resp. 10^{-12} . (Pro $x \notin \langle -\pi, \pi \rangle$ využijeme periodicitu $\sin x$.)

Pro chybu Taylorova polynomu platí:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(z)$$

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| \cdot |f^{(n+1)}(z)| \leq$$

$$\leq \frac{|(x - x_0)^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot 1 \leq$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq$$

$$\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq$$

$$\leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!} \leq 10^{-5} \text{ (resp. } 10^{-12})$$

$$T_{15}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!}$$

$$T_{24}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{17}}{17!} - \frac{x^{19}}{19!} + \frac{x^{21}}{21!} - \frac{x^{23}}{23!}$$

n	$\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$
0	3.141592653589793
1	4.934802200544679
2	5.167712780049969
3	4.058712126416768
4	2.550164039877345
5	1.335262768854589
6	0.599264529320792
7	0.235330630358893
8	0.082145886611128
9	0.025806891390014
10	0.007370430945714
11	0.001929574309404
12	0.000466302805768
13	0.000104638104925
14	0.000021915353448
15	0.000004303069587 < 10^{-5}
16	0.000000795205400
17	0.000000138789525
18	0.000000022948429
19	0.000000003604731
20	0.000000000539266
21	0.000000000077007
22	0.000000000010518
23	0.000000000001377
24	0.000000000000173 < 10^{-12}

Příklad a)

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1$$

Varianta A

Brutální síla - jako dříve, výpočet derivací, ...

Varianta B

(Chytře) Víme:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\bar{x})^k = \frac{1}{1 - \bar{x}}, \quad \bar{x} \in (-1; 1), \quad \bar{x}_0 = 0$$

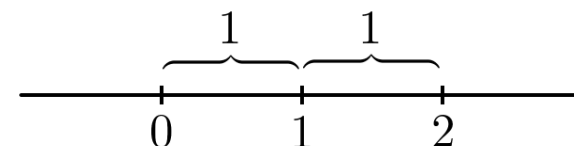
$$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1 - (-x + 1)} = \left| \begin{array}{l} \bar{x} = -x + 1 = 1 - x \\ x_0 = 1 \Rightarrow \bar{x}_0 = 0 \\ |\bar{x}| < 1, \text{ tj. } |x - 1| < 1 \end{array} \right| = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - x)^k =$$

chceme použít něco, co známe

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} ((-1) \cdot (x - 1))^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \underset{\uparrow}{(-1)^k} \cdot \frac{(x - 1)^k}{\searrow}$$

Taylorovy koeficienty a_k

$$|x - 1| < 1, \text{ tj. } x \in (0, 2) = K$$



Závěr:

$$f(x) = \frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (x - 1)^k, \quad x \in (0, 2), \quad x_0 = 1$$

Příklad b)

$$f(x) = \frac{3}{1-2x}, \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = 3 \cdot \frac{1}{1-2x} = \left| \begin{array}{l} \textcircled{x} = 2x \\ x_0 = 0 \Rightarrow \textcircled{x}_0 = 0 \\ |\textcircled{x}| < 1, |2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2} \end{array} \right| = 3 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (2x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{3 \cdot 2^k}_{a_k} \cdot x^k$$

Závěr:

$$f(x) = \frac{3}{1-2x} = \sum_{k=0}^{+\infty} 3 \cdot 2^k \cdot x^k, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad x_0 = 0$$

Příklad c)

$$f(x) = \frac{1}{2-x}, \quad x_0 = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} x^k \quad \left| \frac{x}{2} \right| < 1 \Leftrightarrow |x| < 2$$

Závěr:

$$f(x) = \frac{1}{2-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} x^k, \quad x \in (-2, 2), \quad x_0 = 0$$

Platí: Jestliže $f(x) = T(x)$, $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$,

$$\text{potom } f'(x) = T'(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1} \quad \text{pro } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Tj. Taylorovu řadu lze derivovat člen po členu

„derivace nekonečného součtu je nekonečný součet derivací“

Schematicky

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} (\quad) \right)' = \sum_{k=1}^{+\infty} (\quad)'$$

Příklad d)

$$f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0$$

Varianta A

Brutální síla - výpočet derivací, ...

Varianta B

(Chytře) Víme: $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = (\sin x)' = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2k+1) x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad x \in \mathbb{R}$$

rozeepsáno pro kontrolu:

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \frac{1}{9!} x^9 - \frac{1}{11!} x^{11} + \dots \\ \frac{d}{dx} \curvearrowright \cos x &= 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \frac{1}{8!} x^8 - \frac{1}{10!} x^{10} + \dots \end{aligned}$$

$\curvearrowright \int dx$

Poznámka: Funguje i pro integraci!

Příklad

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0$$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k, \quad x \in (-1, 1)}$$

$$g(x) = \ln(1+x), \quad x_0 = 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} = f(x)$$

$$g(x) = \int_0^x f(u) \, du = [g(u)]_0^x = g(x) - g(0) = g(x)$$

$$\begin{aligned} \underline{g(x)} &= \int_0^x \frac{1}{1+u} \, du = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u^k \right) \, du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^k u^k \, du = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[\frac{u^{k+1}}{k+1} \right]_0^x = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad x \in (-1, 1) \end{aligned}$$

Základní Maclaurinovy řady (Taylorovy řady pro $x_0 = 0$)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad x \in (-1, 1)$$

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p}{n} x^n = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \dots \quad x \in (-1, 1), \quad p \in \mathbb{R}$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad x \in (-1, 1)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[(2n-1)!!]^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad x \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

REKAPITULACE

Taylorovy řady - aproximace funkce f pomocí polynomů

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{Taylorův polynom}$$

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad \text{Taylorova řada}$$

$$f(x) = T(x), \quad x \in K \quad \dots \text{ obor konvergence}$$

Fourierovy řady - aproximace funkce f součtem goniometrických funkcí ($f \dots$ periodická funkce)

Dáno: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodická funkce se základní periodou $T > 0$, $\omega := \frac{2\pi}{T}$ (úhlová frekvence)

Fourierův (trigonometrický) polynom funkce f řádu n je definován vztahem

$$\mathcal{F}_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) \quad \text{kde}$$

Fourierovy koeficienty $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ jsou dány vzorci:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cos(k\omega x) dx, \quad k = \underline{0}, 1, 2, \dots \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \sin(k\omega x) dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

kde α volíme tak, aby integrace byla co nejjednodušší.

Fourierova (trigonometrická) řada funkce f je pro dané $x \in \mathbb{R}$ definována vztahem

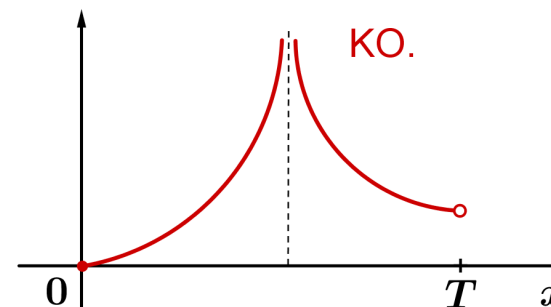
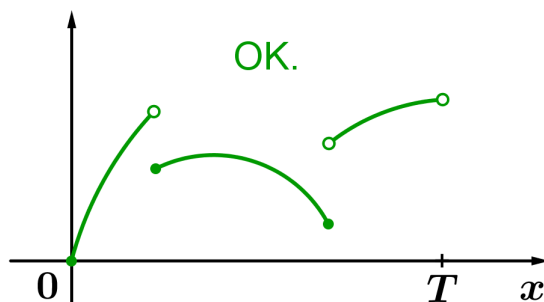
$$\mathcal{F}_n(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_n(x) =: \mathcal{F}(x)$$

↓

součtová funkce Fourierovy řady

Platí: Jestliže

- (i) f je periodická s periodou $T > 0$
- (ii) f i f' mají v základním intervalu periody nejvýše konečný počet bodů nespojitosti nejvýše 1. druhu (skok),



potom

$$\forall x \in \mathbb{R} : \mathcal{F}(x) = \frac{1}{2} \left[\lim_{u \rightarrow x_-} f(u) + \lim_{u \rightarrow x_+} f(u) \right]. \quad (*) \quad (\text{takto se prakticky spočítá})$$

Poznámky:

- Ať f je spojitá v bodě x , tj. platí, že $f(x) = \lim_{u \rightarrow x} f(u) = \lim_{u \rightarrow x_-} f(u) = \lim_{u \rightarrow x_+} f(u)$.

$$\text{Potom } \underline{\mathcal{F}(x)} = \frac{1}{2} [f(x) + f(x)] = \frac{1}{2} \cdot 2f(x) = \underline{f(x)} !$$

- Graf součtové funkce Fourierovy řady $\mathcal{F}$ lze kreslit bez znalosti hodnot Fourierových koeficientů a_k, b_k .

Vše díky vztahu (*)

Definice: Systém funkcí $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ je ortogonální na intervalu (a, b) , pokud jsou funkce f_n na sebe kolmé, tj.

$$\int_a^b f_m(x) \cdot f_n(x) dx = 0 \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$$

Definice: Posloupnost $\{1, \cos \omega x, \sin \omega x, \cos 2\omega x, \sin 2\omega x, \dots\}$ se nazývá trigonometrický systém funkcí.
($\omega \dots$ frekvence)

Věta: Trigonometrický systém je ortogonální na libovolném intervalu délky $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Speciálně: $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ ortogonální na intervalu délky $T = 2\pi$, tj. např. $(-\pi, \pi)$.

$$n \neq m$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$$

$$n = m$$

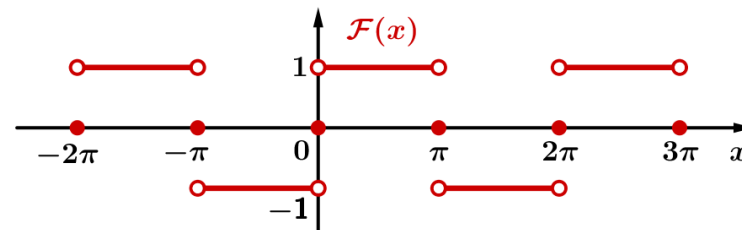
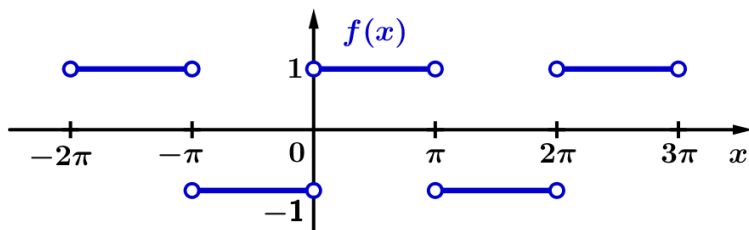
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$$

Příklad

$$T = 2\pi \quad \text{a} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi) \\ -1, & x \in (-\pi, 0) \end{cases} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$



$$\mathcal{F}(0) := \frac{1}{2} \left[\lim_{u \rightarrow 0_-} f(u) + \lim_{u \rightarrow 0_+} f(u) \right] = \frac{1}{2} [(-1) + 1] = 0$$

... podobně v ostatních bodech nespojitosti

Vypočteme Fourierovy koeficienty:

$$\underline{k=0} \quad a_0 = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \underbrace{\cos(0 \omega x)}_{=1} dx = \left| \begin{array}{l} T = 2\pi, \quad \omega = 1 \\ \alpha = -\pi \Rightarrow \alpha + T = -\pi + 2\pi = \pi \end{array} \right| = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Varianta A - „Brutální síla“

$$\underline{a_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (-1) dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right) = \frac{1}{\pi} \left([-x]_{-\pi}^0 + [x]_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} (0 - \pi + \pi - 0) = \underline{0}$$

Varianta B - „Chytře“

$$\underline{a_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \left| \begin{array}{l} f \text{ je lichá funkce a integrujeme} \\ \text{přes interval symetrický okolo } 0 \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = \underline{0}$$

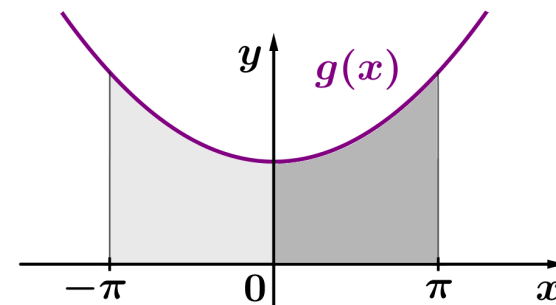
$$\underline{k = 1, 2, \dots}$$

$$\underline{a_k} = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \cos(k\omega x) dx = \left| \begin{array}{l} T = 2\pi, \quad \omega = 1 \\ \alpha = -\pi \Rightarrow \alpha + T = \pi \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{lichá}} \cdot \underbrace{\cos(kx)}_{\text{sudá}} dx = \underline{0}$$

lichá

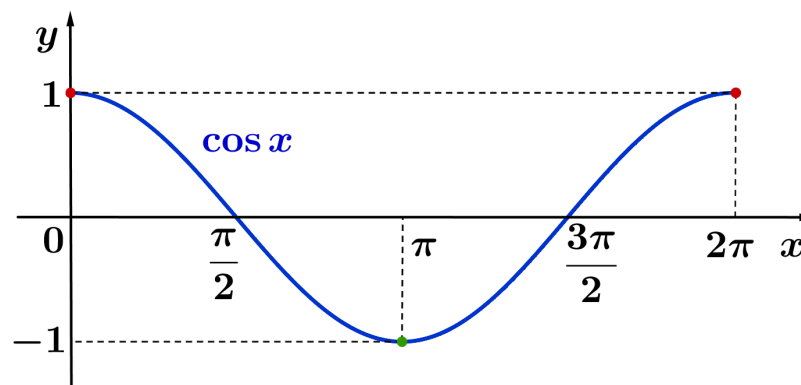
$$\underline{b_k} = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \sin(k\omega x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{lichá}} \cdot \underbrace{\sin(kx)}_{\text{lichá}} dx =$$

sudá



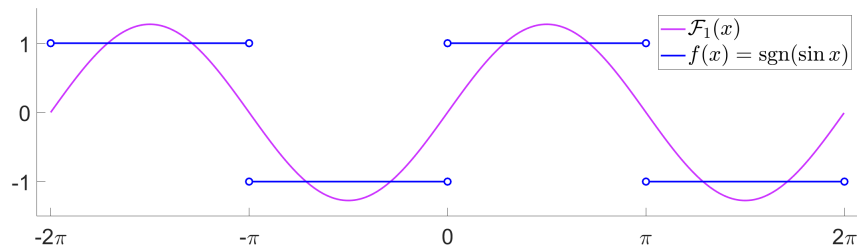
$$= \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{1}{k} \right) \cdot (\cos(k\pi) - \cos(0)) = -\frac{2}{k\pi} (\cos(k\pi) - 1) =$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{k\pi} (\underline{-1} - 1) = \frac{4}{k\pi}, & k \dots \underline{\text{liché}} \\ -\frac{2}{k\pi} (\underline{1} - 1) = \underline{0}, & k \dots \underline{\text{sudé}} \end{cases}$$

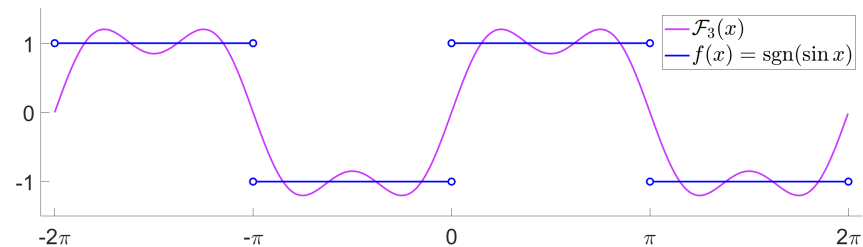


$$\underline{\mathcal{F}(x)} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(kx) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4}{(2l-1)\pi} \sin((2l-1)x) = \underline{\underline{\frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \dots}}}$$

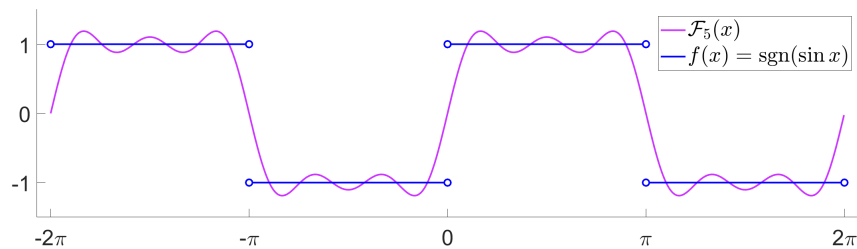
$$\mathcal{F}_1(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x)$$



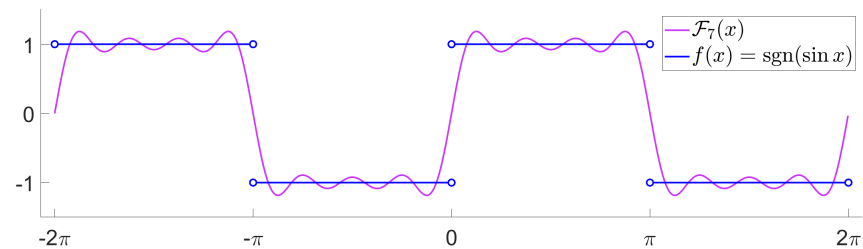
$$\mathcal{F}_3(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x)$$



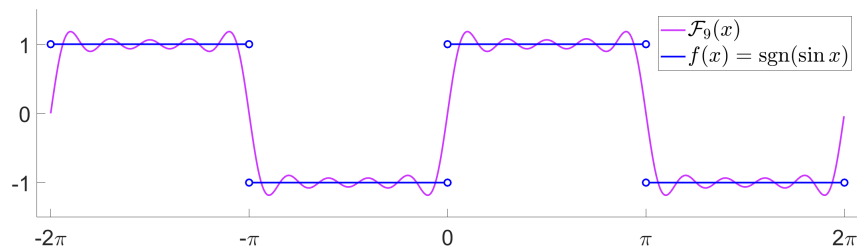
$$\mathcal{F}_5(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x)$$



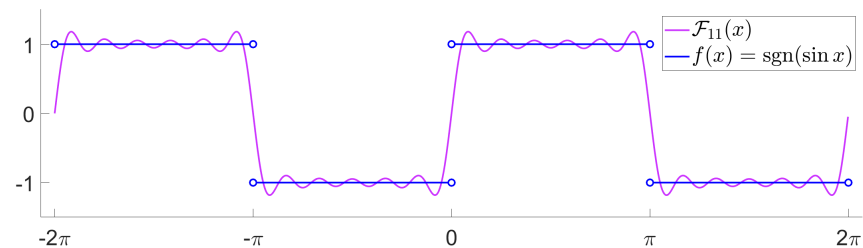
$$\mathcal{F}_7(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \sin(5x) + \frac{4}{7\pi} \sin(7x)$$



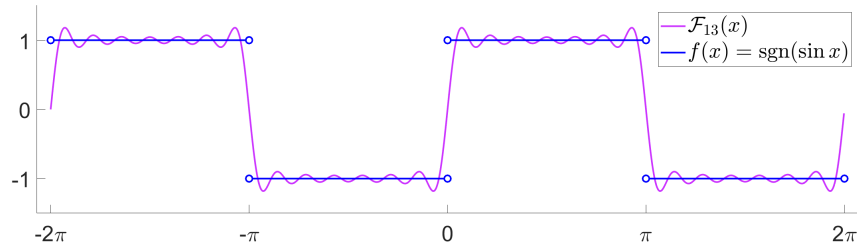
$$\mathcal{F}_9(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{9\pi} \sin(9x)$$



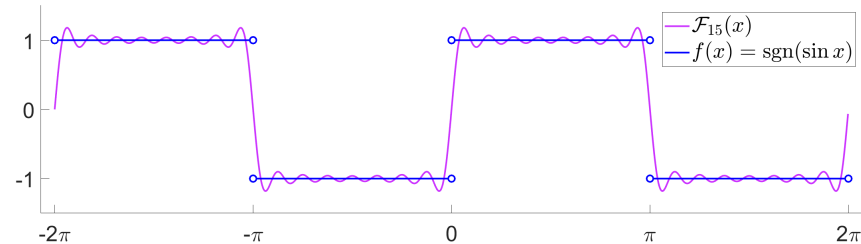
$$\mathcal{F}_{11}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{11\pi} \sin(11x)$$



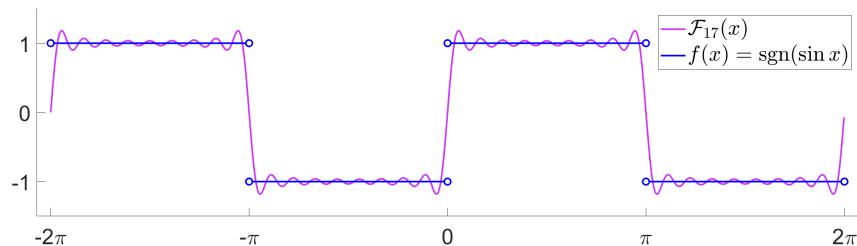
$$\mathcal{F}_{13}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{13\pi} \sin(13x)$$



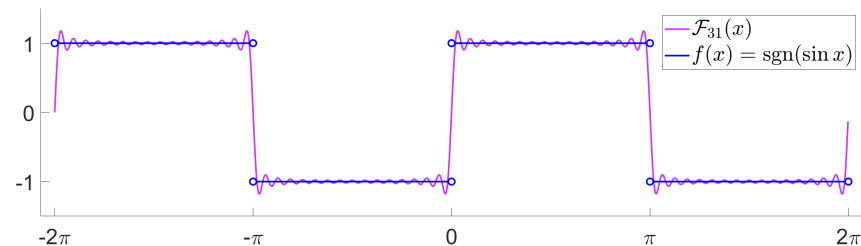
$$\mathcal{F}_{15}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{15\pi} \sin(15x)$$



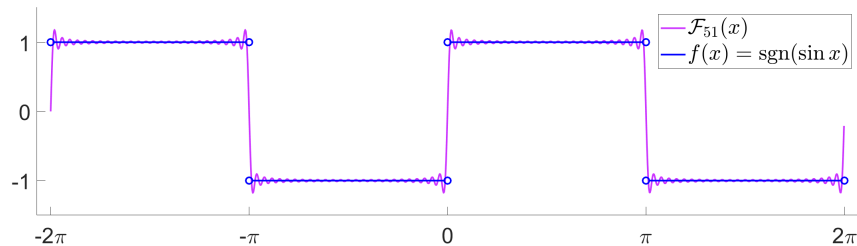
$$\mathcal{F}_{17}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{17\pi} \sin(17x)$$



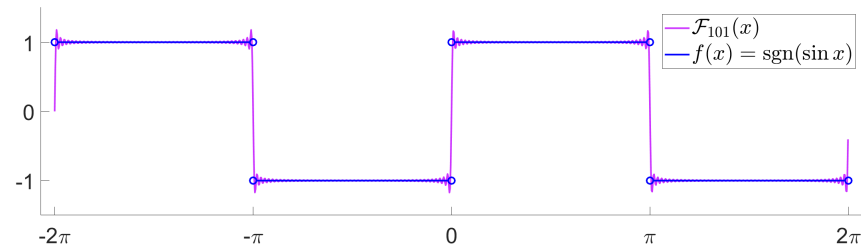
$$\mathcal{F}_{31}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{31\pi} \sin(31x)$$



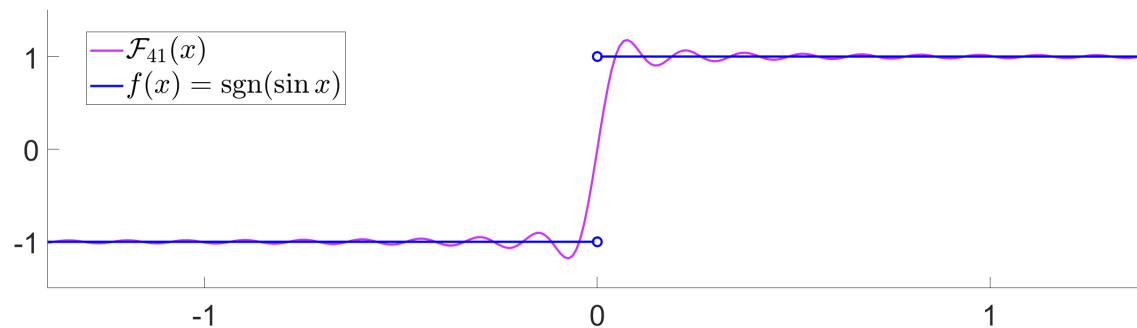
$$\mathcal{F}_{51}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{51\pi} \sin(51x)$$



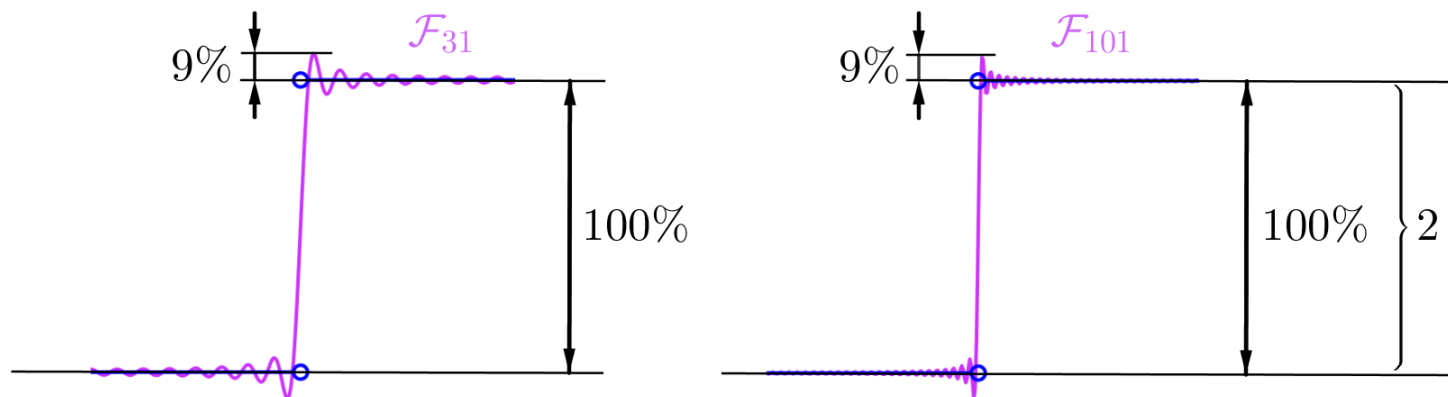
$$\mathcal{F}_{101}(x) = \frac{4}{\pi} \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \sin(3x) + \dots + \frac{4}{101\pi} \sin(101x)$$



Gibbsův jev



- pokud nespojitou funkci aproximujeme spojitými siny a kosiny, dochází k překmitnutí o velikosti 18% skoku
- velikost překmitu se s rostoucím počtem použitých funkcí v součtu nemění, pouze se zužuje



Uvažujme Fourierův polynom o n sčítancích, tj.

$$\mathcal{F}_{2n-1}(x) = \sum_{l=1}^n \frac{4}{(2l-1)\pi} \cdot \sin((2l-1)x) \quad / \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \mathcal{F}_{2n-1}(x) = \sum_{l=1}^n \frac{\sin((2l-1)x)}{(2l-1)} = \sum_{l=1}^n \int_0^x \cos((2l-1)t) dt = \int_0^x \sum_{l=1}^n \cos((2l-1)t) dt$$

víme, že platí:
$$\frac{\sin((2l-1)x)}{(2l-1)} = \int_0^x \cos((2l-1)t) dt$$

Pro součet kosinové řady platí:

$$\sum_{l=1}^n \cos((2l-1)t) = \cos t + \cos 3t + \cos 5t + \dots + \cos(2n-1)t = \frac{\cos nt \cdot \sin nt}{\sin t} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2nt}{\sin t}$$

Tedy:

$$\frac{\pi}{4} \cdot \mathcal{F}_{2n-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt$$

tj. pro lokální extrémy musí platit:

$$\mathcal{F}'_{2n-1}(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2nx}{\sin x} = 0 \quad x_k = \frac{k\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

tj. první extrém nabývá pro $x_1 = \frac{\pi}{2n}$ a má hodnotu

$$\mathcal{F}_{2n-1}(x_1) = \mathcal{F}_{2n-1}\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt = \left. \begin{array}{l} y = 2nt \Rightarrow t = \frac{y}{2n} \\ dt = \frac{1}{2n} dy \\ t = 0 \Rightarrow y = 0 \\ t = \frac{\pi}{2n} \Rightarrow y = \pi \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{2n \cdot \sin \frac{y}{2n}} dy =$$

pro velké n a malé $t = \frac{y}{2n}$ lze použít přibližný vzorec $\sin \frac{y}{2n} \approx \frac{y}{2n}$, takže

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy = \dots \doteq \underline{1,1789797}$$

↳ „překmit“ o přibližně 9% velikosti skoku (= 2)

Poznámka:

Gibbsův jev nastává u Fourierova polynomu lib. řádu $\mathcal{F}_n(x)$ a velikost „překmitu“ nezávisí na počtu sčítanců.

U součtové funkce $\mathcal{F}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_n(x)$ již Gibbsův jev nenastává.

(V praxi ovšem vždy použijeme konečný počet sčítanců.)

Poznámka:

Pokud chceme sestavit Fourierovu řadu pro lichou funkci, vypadnou všechny členy obsahující kosinus (sudá funkce), dostaneme tzv. sinovou řadu.

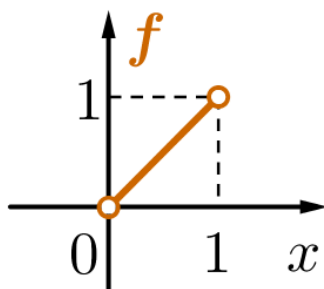
Analogicky při výpočtu Fourierovy řady sudé funkce vypadnou členy obsahující siny (liché funkce) a dostaneme tzv. kosinovou řadu.

Poznámky:

① Co udělat v případě, že f není periodická ?

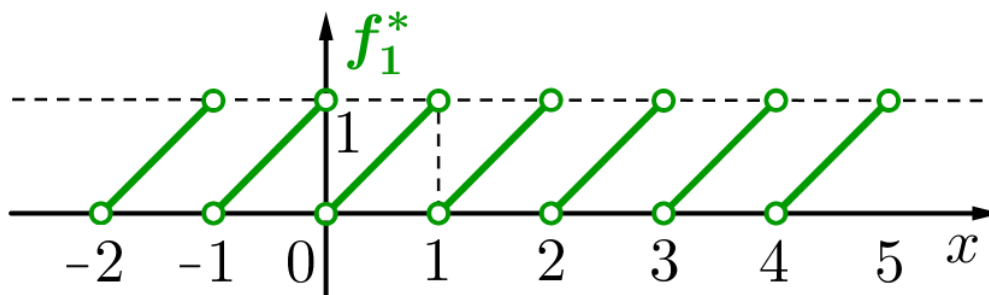
Odpověď: uděláme z ní periodickou (různé možnosti, podle toho, co chci)

Příklad:



$$f(x) = x, \quad x \in (0, 1)$$

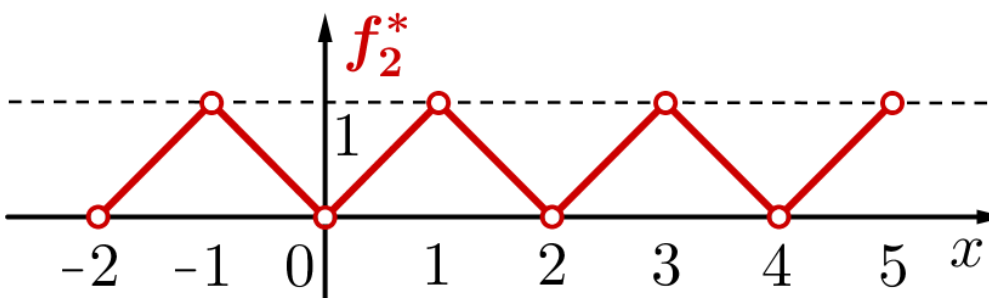
A přímé periodické rozšíření (prodloužení)



Počítej Fourierovu řadu funkce f_1^* , tj.

$$\underline{T = 1} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

B sudé periodické rozšíření (prodloužení)

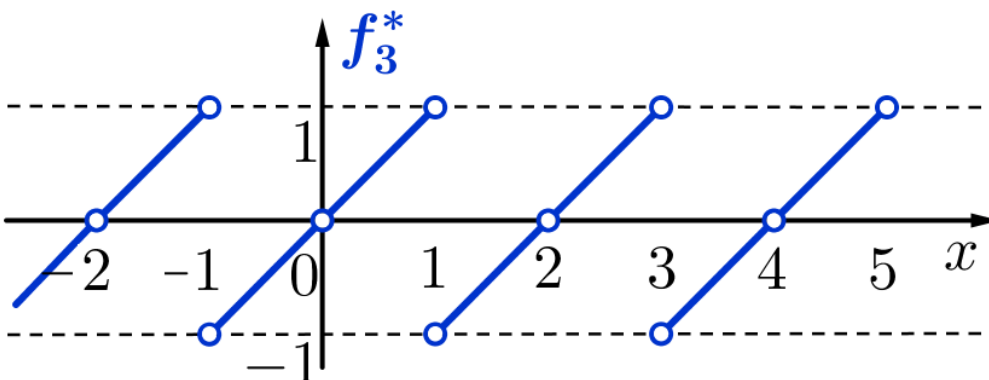


Počítej Fourierovu řadu funkce f_2^* , tj.

$$\underline{T = 2} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

(kosinová řada)

C liché periodické rozšíření (prodloužení)

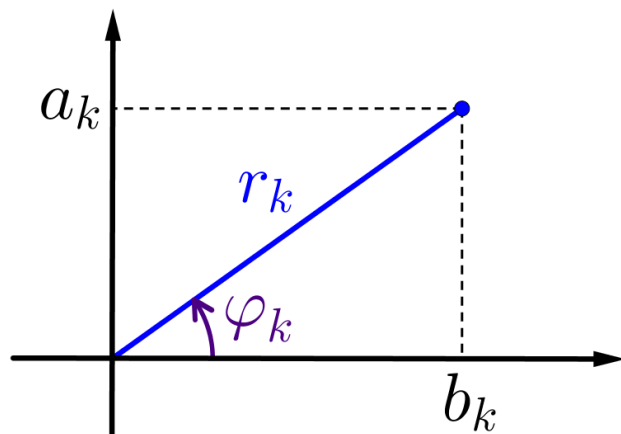


Počítej Fourierovu řadu funkce f_3^* , tj.

$$\underline{T = 2} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

(sinová řada)

② Jiný zápis Fourierovy řady



polární souřadnice r_k, φ_k

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)$$

pro $k = 1, 2, \dots$

$$r_k^2 = a_k^2 + b_k^2$$

$$\sin \varphi_k = \frac{a_k}{r_k} \Leftrightarrow a_k = r_k \sin \varphi_k$$

$$\cos \varphi_k = \frac{b_k}{r_k} \Leftrightarrow b_k = r_k \cos \varphi_k$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k} \Leftrightarrow \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{a_k}{b_k}$$

Dostaneme:

$$\begin{aligned} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x) &= r_k \sin \varphi_k \cos(k\omega x) + r_k \cos \varphi_k \sin(k\omega x) = (\text{součtové vzorce}) = \\ &= r_k \sin(k\omega x + \varphi_k) \end{aligned}$$

↓

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

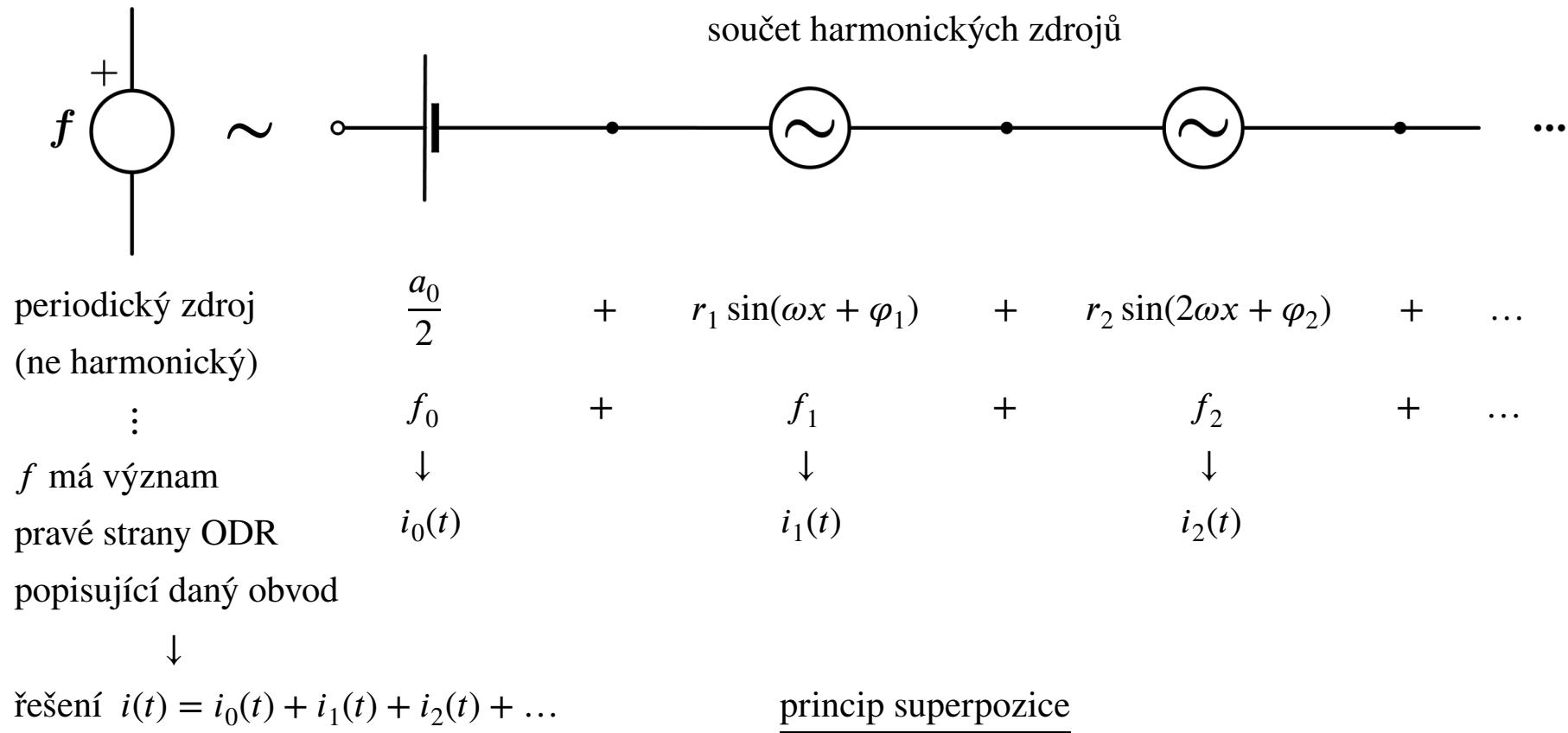
Závěr:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{a_0}{2} + \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} r_k \sin(k\omega x + \varphi_k)}_{\text{harmonické funkce}}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 amplituda fázové posunutí

$r_k \rightarrow 0$ pro $k \rightarrow +\infty$

harmonické funkce s vysokými frekvencemi
mají menší a menší vliv



Na závěr ukážeme užití funkčních řad pro řešení počátečních a okrajových úloh.

Metoda neurčitých koeficientů

Příklad:

$$y'' = xy, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

lineární ODR 2. řádu s nekonstantními koeficienty !

(neumíme řešit !)

řešení hledáme ve tvaru mocninné řady:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad a_n = ?$$

→ z počátečních podmínek:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y(0) = a_0 = 0$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$y'(0) = a_1 = 1$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n \rightarrow \boxed{a_2 = 0} \wedge \boxed{(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1}}$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{a_0}{3 \cdot 2}, \quad a_4 = \frac{a_1}{4 \cdot 3}, \quad a_5 = \frac{a_2}{5 \cdot 4} = 0, \quad a_6 = \frac{a_3}{6 \cdot 5} = \frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}, \quad \dots$$

$$y(x) = a_0 \left(1 + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^6}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{x^9}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \dots \right) + a_1 \left(x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{x^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \dots \right)$$

$$\boxed{y(x) = x + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{x^7}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{x^{10}}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} + \dots}$$

Fourierova metoda (pro periodické a okrajové úlohy)

Příklad:

$$\begin{aligned} y'' + y &= 3 \sin 2x + 7 \sin 5x, & x \in (-\pi, \pi) \\ y(\pi) &= 0, & y(-\pi) = 0 \end{aligned}$$

okrajová úloha, homogenní Dirichletovy podmínky

$$x \in (-\pi, \pi) \Rightarrow T = 2\pi, \omega = 1$$

řešení hledáme ve tvaru Fourierovy řady

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad \rightarrow \quad y'' = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot (-n^2) \cdot \cos nx + b_n \cdot (-n^2) \cdot \sin nx$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-n^2 a_n \cos nx - n^2 b_n \sin nx) + \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 3 \sin 2x + 7 \sin 5x$$

trigonometrický systém - lineárně nezávislý

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} (1 - n^2) a_n &= 0 & \forall n \in \mathbb{N} \\ a_0 &= 0 \\ (1 - n^2) b_n &= 0 & \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 5\} \\ (1 - 2^2) b_2 &= 3 \\ (1 - 5^2) b_5 &= 7 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 \dots &\text{libovolné} \\ a_n &= 0, n \geq 2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} b_1 \dots &\text{libovolné} \\ b_2 &= -1 \\ b_n &= 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2, 5\} \\ b_5 &= -\frac{7}{24} \end{aligned}$$

řešení ODR:

$$y(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x - \sin 2x - \frac{7}{24} \sin 5x$$

+ okraj. podm.:

$$y(\pi) = a_1 \cdot (-1) + b_1 \cdot 0 - 0 - 0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$a_1 = 0$$

$$b_1 \dots \text{libovolné}$$

$$y(-\pi) = a_1 \cdot (-1) + b_1 \cdot 0 - 0 - 0 = 0$$

řešení okraj. úlohy:

$$y(x) = b_1 \sin x - \sin 2x - \frac{7}{24} \sin 5x, \quad b_1 \dots \text{libovolné}$$

Příklad:

$$\begin{cases} y'' + 2y = f(x) \\ y \dots 2\pi\text{-periodická} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi) \\ 0 & x \in (-\pi, 0) \end{cases} \\ \text{- periodická jinde}$$

$$T = 2\pi, \quad \omega = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

Pravou stranu rozvineme ve Fourierovu řadu

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin nx$$

Dosadíme do rovnice

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [(2 - n^2) a_n \cos nx + (2 - n^2) b_n \sin nx] = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin nx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_0 = 1} \quad (2 - n^2) a_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

$$(2 - n^2) b_n = \frac{1}{n\pi} \cdot (1 - (-1)^n) \quad \Rightarrow \quad \boxed{b_n = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi(2 - n^2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Závěr:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi(2 - n^2)} \sin nx}$$