

Motto: “Hodíme to do počítače a dostaneme výsledek”

Otázky:

Jaký je výsledek?

Dobrý?

Špatný?

Proč?

Úvodní motivační příklady

1)

$$\sum_{k=1}^{100000} \frac{1}{10} = 10000$$

```
%-----
s=0;
h=single(1/10);
for i=1:100000
    s=s+h;
end;
s
%-----

s =

    9.9985566e+03
```

```
%-----
s=0;
for i=1:100000
    s=s+1/10;
end;
s
%-----

s =

    1.0000000000001885e+04
```

Poznámka: Aritmetika s n -platnými ciframi s užitím zaokrouhlování nebo řezání.

2)

Vyčíslení hodnoty funkce zadané ve dvou tvarech

$$f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \text{ a } g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Platí: $x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x(x+1-x)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$

Určete $f(300)$ a $g(300)$ pomocí aritmetiky se 6-ti platnými ciframi a užitím zaokrouhlování.

$$\begin{aligned} f(300) &\approx 300(\sqrt{301} - \sqrt{300}) \\ &= 300(17,3494 - 17,3205) = 300 \cdot 0,0289 \\ &= \mathbf{8,67000} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(300) &\approx \frac{300}{\sqrt{301} + \sqrt{300}} \\ &= \frac{300}{17,3494 + 17,3205} = \frac{300}{34,6699} \\ &= \mathbf{8,65304} \end{aligned}$$

Přesný výsledek je **8,653049162609 ...**

Chyba při vyčíslení $g(300)$ je mnohem menší než u $f(300)$.

3)

Vyčíslení hodnoty polynomu zadaného ve dvou tvarech

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \text{ a } Q(x) = ((x-3)x + 3)x - 1$$

Platí: $((x-3)x + 3)x - 1 = ((x^2 - 3x + 3)x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Určete $P(2,19)$ a $Q(2,19)$ pomocí aritmetiky se 3-mi platnými ciframi a zaokrouhlování.

$$\begin{aligned} P(2,19) &\approx 2,19^3 - 3 \cdot 2,19^2 + 3 \cdot 2,19 - 1 \\ &= 10,5 - 3 \cdot 4,80 + 3 \cdot 2,19 - 1 \\ &= 10,5 - 14,4 + 6,57 - 1 = \mathbf{1,67} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(2,19) &\approx ((2,19 - 3)2,19 + 3)2,19 - 1 \\ &= (-0,81 \cdot 2,19 + 3)2,19 - 1 = (-1,77 + 3)2,19 - 1 \\ &= 1,23 \cdot 2,19 - 1 = 2,69 - 1 = \mathbf{1,69} \end{aligned}$$

Přesný výsledek je **1,685159 ...**

pro $P(2,19)$ je chyba 0,015159

pro $Q(2,19)$ je chyba -0,004841

4) Hledání kořenů polynomu $P(x) = (x - 1)^n$

Pro polynom stupně $n \geq 5$ $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ obecně nelze řešení spočítat pomocí konečného počtu kroků pomocí operací $+$, $-$, \cdot , $/$ a odmocniny $\sqrt[r]{}$, $r \in \mathbb{N}$. Paolo Ruffini (nekompletní důkaz - 1813), Niels Henrik Abel (1824) .

Implementace v Matlabu (například pro $n = 4$)

```
%-----
polynom=poly([ 1 1 1 1 ])
koreny=roots(polynom)
%-----

polynom =

     1     -4      6     -4      1

koreny =

    1.000223371630863e+00
    9.999999706778071e-01 + 2.233423015147889e-04i
    9.999999706778071e-01 - 2.233423015147889e-04i
    9.997766870135252e-01
```

Určete prvních 15 členů posloupnosti, která je zadána rekurentní formulí

5)

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 1 \\ x_n &= 20,2 x_{n-1} - 4 x_{n-2}, \quad n \geq 3 \end{aligned}$$

Přesné řešení je $x_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2}$

Ověření:

$$x_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^{1-2} = 5, \quad x_2 = \left(\frac{1}{5}\right)^{2-2} = 1$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} = 20,2 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-3} - 4 \left(\frac{1}{5}\right)^{n-4} \quad / \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{4-n}$$

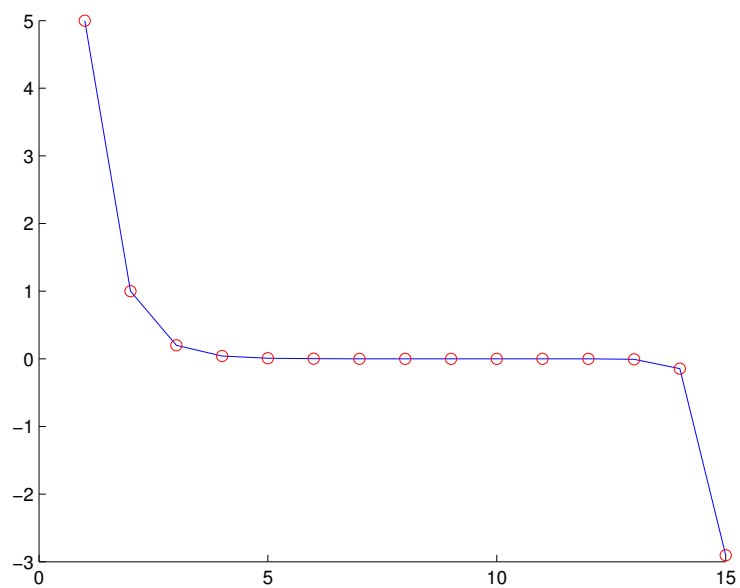
$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = 20,2 \cdot \frac{1}{5} - 4$$

$$0,04 = 4,04 - 4$$

Výsledky z Matlabu:

```
%-----  
x(1)=5;  
x(2)=1;  
  
for n=3:15  
    x(n) = 20.2 * x(n-1) - 4 * x(n-2);  
end;  
%-----
```

n	x(n)
1	5.000000
2	1.000000
3	0.200000
4	0.040000
5	0.008000
6	0.001600
7	0.000320
8	0.000064
9	0.000013
10	0.000002
11	-0.000018
12	-0.000363
13	-0.007259
14	-0.145175
15	-2.903496



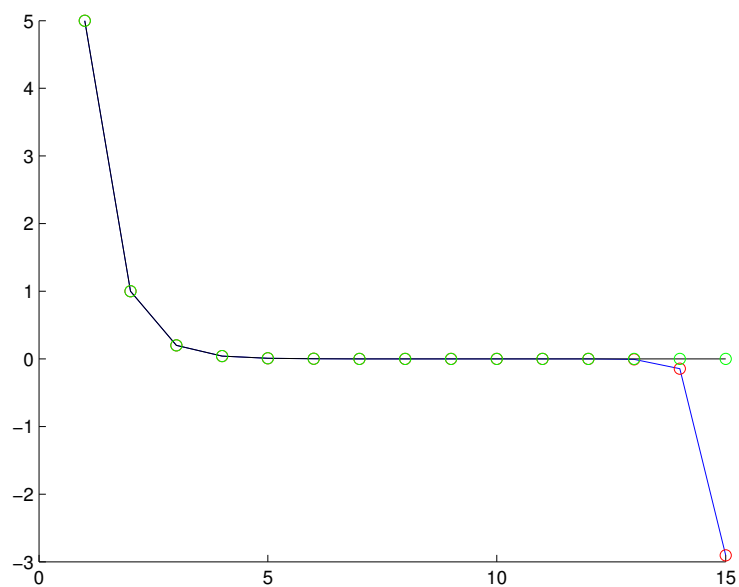
```

%-----
x(1)=5;
x(2)=1;
presne_x(1)=x(1);
presne_x(2)=x(2);

for n=3:15
    x(n) = 20.2 * x(n-1) - 4 * x(n-2);
    presne_x(n) = 0.2^(n-2);
end;
%-----

```

n	x(n)	presne_x(n)	chyba
1	5.000000	5.000000	0
2	1.000000	1.000000	0
3	0.200000	0.200000	-7.21645e-16
4	0.040000	0.040000	-1.41831e-14
5	0.008000	0.008000	-2.83546e-13
6	0.001600	0.001600	-5.67089e-12
7	0.000320	0.000320	-1.13418e-10
8	0.000064	0.000064	-2.26836e-09
9	0.000013	0.000013	-4.53671e-08
10	0.000002	0.000003	-9.07342e-07
11	-0.000018	0.000001	-1.81468e-05
12	-0.000363	0.000000	-0.000362937
13	-0.007259	0.000000	-0.00725874
14	-0.145175	0.000000	-0.145175
15	-2.903496	0.000000	-2.9035



Obecné řešení dif. rovnice

$$x_n = 20,2 x_{n-1} - 4x_{n-2}$$

Řešení hledáme ve tvaru $x_n = A^n$

$$A^n = 20,2 A^{n-1} - 4 A^{n-2} \quad / \cdot A^{2-n}$$

$$A^2 = 20,2 A - 4$$

$$0 = A^2 - 20,2 A + 4$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{20,2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4} = \sqrt{392,04} = 19,8$$

$$A_{1,2} = \frac{20,2 \pm 19,8}{2} = \begin{cases} 20 \\ 0,2 \end{cases}$$

Obecné řešení:
$$x_n = c_1 \cdot 20^n + c_2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

V našem případě $c_1 = 0$.

Vlivem zaokrouhlovacích chyb se stane koeficient c_1 nenulový \Rightarrow nestabilní rekurze.

6) Řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

Pro nezáporný diskriminant má rovnice řešení
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Pro některé hodnoty koeficientů může dojít v aritmetice s pohyblivou desetinnou čárkou k přetečení, podtečení a k selhání. Pokud jsou koeficienty velmi malé nebo velmi velké, potom může b^2 nebo $4ac$ podtéct nebo přetéct. Abychom tomu předešli, vydělíme rovnici hodnotou největšího z parametrů. Potom je největší koeficient 1 nebo -1. Ztrátě přesnosti pro $b \doteq \sqrt{b^2 - 4ac}$ zabráníme použitím alternativní formule (pro $c \neq 0$).

Řešení kvadratické rovnice lze určit z formule
$$x_{1,2} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}} &= \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot \frac{\frac{1}{2c}}{\frac{1}{2c}} = \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{[b^2 - (b^2 - 4ac)] \cdot \frac{1}{2c}} = \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

Uvažujeme rovnici s koeficienty $a = 0,05010$, $b = -98,78$, $c = 5,015$.

```

%-----
% koreny kvadraticke rovnice s koeficienty
  a=0.0501; b=-98.78; c=5.015;
  x=roots([a b c]);
%-----

x1 = 1971.605916
x2 = 0.050771

```

Použijeme-li aritmetiku se 4 ciframi, dostaneme

$$\begin{aligned}
 b^2 - 4ac &= 98,78^2 - 4 \cdot 0,05010 \cdot 5,015 \\
 &= 9757 - 0,2004 \cdot 5,015 \\
 &= 9757 - 1,005 = 9756 \\
 \sqrt{b^2 - 4ac} &= 98,77
 \end{aligned}$$

Standardní formule:

$$x_{1,2} = \frac{98,78 \pm 98,77}{0,1002} = \begin{cases} \mathbf{1972} \\ 0,0998 \quad \mathbf{!!!} \end{cases}$$

Modifikovaná formule:

$$x_{1,2} = \frac{10,03}{98,78 \mp 98,77} = \begin{cases} 1003 \quad \mathbf{!!!} \\ \mathbf{0,05077} \end{cases}$$

Shrnutí

Ke ztrátě přesnosti může docházet při

- odčítání skoro stejných hodnot
- sčítání nesrovnatelných hodnot
- násobení velkých čísel (přetečení)
- násobení malých čísel (podtečení)
- dělení malým číslem blízkým nule

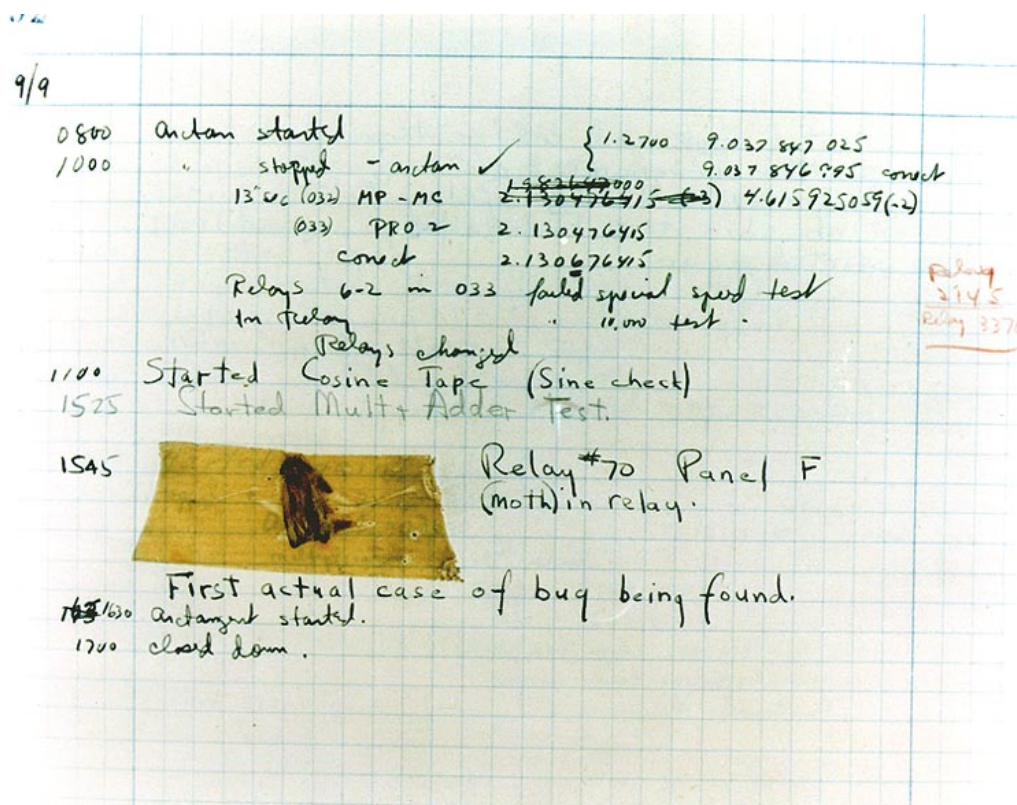
Závažné počítačové chyby (příklady z nedávné historie)

Význam slova **bug**

Programátorská chyba se často i v češtině označuje anglickým výrazem bug a proces jejího odstraňování ladění (debugování).

Bug znamená doslova moucha, štěnice nebo obecně brouk. V angličtině se ve významu chyba (například konstruktérská) používá už velmi dlouho – použil ho například Thomas Edison roku 1878, když mluvil o svých vynálezech. S počítači pak pronikl do mnoha dalších jazyků.

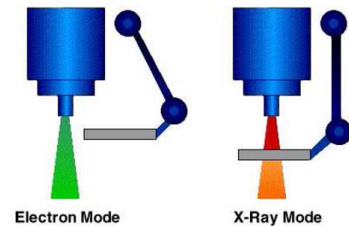
Traduje se, že původem tohoto významu je problém způsobený skutečným hmyzem. Známa je třeba historka o molu zachyceném na relé počítače Mark II dne 9. září 1947. Mol byl pečlivě vyproštěn a nalepen do záznamu s poznámkou “první skutečný případ nalezeného bugu”.



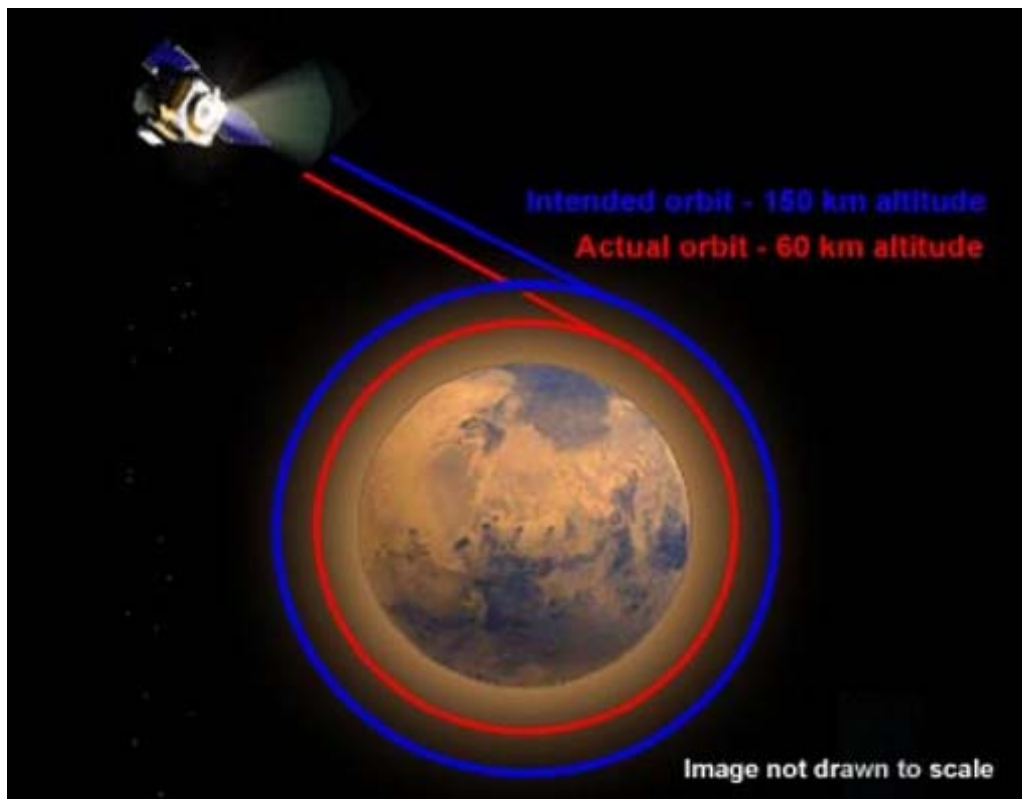
Therac-25



- radiologický přístroj pro léčbu nádorů ozařováním
- červen 1985 - leden 1987 prokázáno min. **6 případů úmrtí**
- ozařoval ve dvou režimech (x-paprsky, elektrony)
- chyby v programu - nedostatečně ošetřené situace
 1. **race condition** (souběh)
chyba při nastavení parametrů operátorem a jejich rychlé opravě
 2. další problém
jedna z bezpečnostních funkcí přístroje kontrolovala nastavené parametry a správný stav indikovala 0 v registru, při chybném nastavení hodnotu registru zvětšila o 1
co se stalo po 256. neúspěšné kontrole? (pro čítač byl vyhrazen 1 Byte)



Mars Climate Orbiter



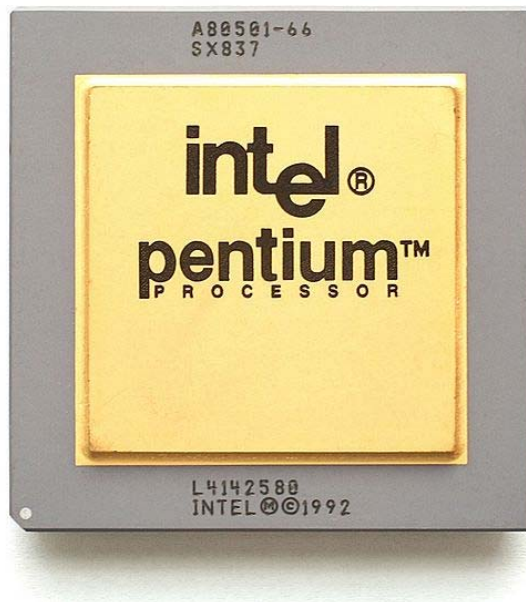
- 11.12.1998 z kosmodromu Eastern Test Range startuje raketa Delta 7425
- 23.9.1999 dorazil k Marsu satelit Mars Climate Orbiter
- nepodařilo se “zakotvit” jej na plánované oběžné dráze (cca 150 km)
- ve skutečnosti se dostal na jinou oběžnou dráhu (cca 60 km)
https://cs.wikipedia.org/wiki/Mars_Climate_Orbiter
- příčina
 - tým v řídicím středisku v Coloradu používal anglické měrné jednotky
 - navigační tým v Kalifornii používali metrické
- satelit shořel v atmosféře **cca 300 000 000 USD**

Ariane 5



- nosná raketa ESA, v roce 1996 byla zničena 40 sekund po startu
<https://www.youtube.com/watch?v=N6PWATvLQCY>
- následník Ariane 4, používala její sw, avšak Ariane 5 dosahovala při startu 5x většího zrychlení hodnoty se dostaly mimo očekávaný rozsah a při konverzi 64-bitového desetinného čísla na 16-bitové celé číslo došlo **přetečení**
- rutina, která měla situaci řešit, byla z důvodu efektivity vypnuta
- Ariane 5 se sebezničila **cca 370 000 000 USD**

Pentium FDIV bug



- 1994, Professor Thomas Nicely (Lynchburg College, Virginia, USA)
<https://faculty.lynchburg.edu/~nicely/pentbug/pentbug.html>
- chyba procesoru Intel P5 Pentium (in floating point unit)
- nesprávné výsledky při dělení desetinných čísel
https://www.ipssr.ku.edu/stafffil/hoyle/pentium_fdiv
- ruční ověření například pomocí zadání výpočtu

1. příklad

$$\text{správná hodnota} \quad \frac{4195835}{3145727} = 1.333820449136241002$$

$$\text{vypočtená hodnota} \quad \frac{4195835}{3145727} = 1.333739068902037589$$

2. příklad

$$\text{správná hodnota} \quad \frac{3145727 \times 4195835}{3145727} = 4195835$$

$$\text{vypočtená hodnota} \quad \frac{3145727 \times 4195835}{3145727} = 4195579$$

- způsobeno nevyplněnou tabulkou v matematickém koprocесору
- celková škoda **cca 500 000 000 USD**