

Zobrazení čísel, strojová čísla

Motivace:

$$\sum_{k=1}^{100000} \frac{1}{10} = 9.998,55664$$

- Lidé používají desítkovou soustavu.
- Počítače dvojkovou.

Komunikace s počítačem

- Zadání v 10-soustavě.
- Převod do 2-soustavy (počítač).
- Výpočet (počítač).
- Zpětný převod do 10-soustavy (provádí počítač).
- Výsledek v 10-soustavě.

Binární zlomky

lze vyjádřit jako sumu se zápornými mocninami dvou

$$R \in \mathbb{R} \quad 0 < R < 1 \quad d_j \in \{0, 1\}$$

$$R = (d_1 \cdot 2^{-1}) + (d_2 \cdot 2^{-2}) + \dots + (d_n \cdot 2^{-n}) + \dots$$

$$R = (0, d_1 d_2 \dots d_n \dots)_2$$

Zápis čísel

- V desítkové soustavě (vědecká notace)

$$0,000747 = 7,47 \cdot 10^{-4}$$

$$313,815 = 3,13815 \cdot 10^2$$

- Strojová čísla

normalizovaná pohyblivá řádová čárka (REAL)

$$x = \pm q \cdot 2^n \quad \frac{1}{2} \leq q < 1 \dots \text{mantisa}, \quad n \dots \text{exponent}$$

Příklad:

Sestrojte všechna strojová čísla s mantisou délky 4 a exponentem v rozsahu od -3 do 4, tj.

$$x = q \cdot 2^n, \quad \text{kde } q = 0, d_1 d_2 d_3 d_4, \quad n \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

 Vygenerovani množiny strojovych čísel s mantisou delky 4 a
 exponentem v rozsahu od -3 do 4.

vypis_vsech_cisel =

Columns 1 through 4

0.0625	0.125	0.25	0.5
0.0703125	0.140625	0.28125	0.5625
0.078125	0.15625	0.3125	0.625
0.0859375	0.171875	0.34375	0.6875
0.09375	0.1875	0.375	0.75
0.1015625	0.203125	0.40625	0.8125
0.10938	0.21875	0.4375	0.875
0.1171875	0.234375	0.46875	0.9375

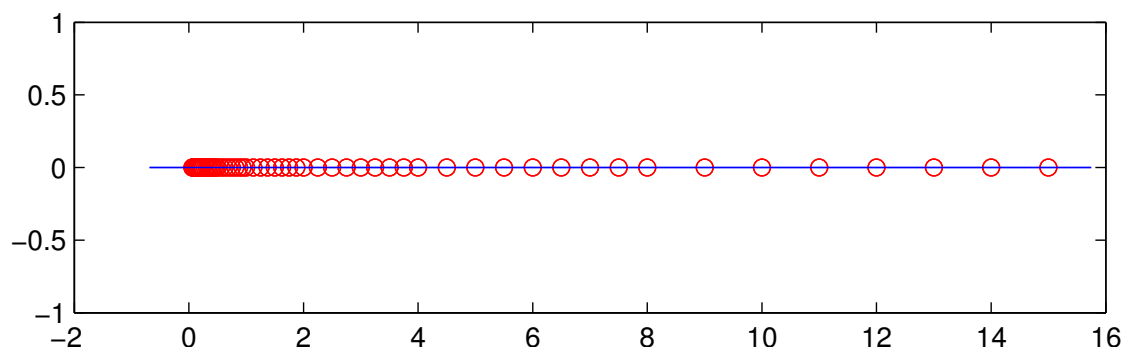
Columns 5 through 8

1	2	4	8
1.125	2.25	4.5	9
1.25	2.5	5	10
1.375	2.75	5.5	11
1.5	3	6	12
1.625	3.25	6.5	13
1.75	3.5	7	14
1.875	3.75	7.5	15

Abychom si lépe uvědomili jakou mantisou a jakým exponentem je určeno získané číslo, uvedeme si je v následující tabulce.

q \ n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0.1000 ₂	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
0.1001 ₂	0.0703125	0,140625	0,28125	0,5625	1,125	2,25	4,5	9
0.1010 ₂	0.078125	0,15625	0,3125	0,625	1,25	2,5	5	10
0.1011 ₂	0.0859375	0,171875	0,34375	0,6875	1,375	2,75	5,5	11
0.1100 ₂	0.09375	0,1875	0,375	0,75	1,5	3	6	12
0.1101 ₂	0.1015625	0,203125	0,40625	0,8125	1,625	3,25	6,5	13
0.1110 ₂	0.109375	0,21875	0,4375	0,875	1,75	3,5	7	14
0.1111 ₂	0.1171875	0,234375	0,46875	0,9375	1,875	3,75	7,5	15

Získaná čísla si je také vhodné vykreslit na číselnou osu, získáme tak přehled o jejich rozložení. Snadno zjistíme, že čísla nejsou rozložena rovnoměrně.



Uvažujme množinu strojových čísel vygenerovanou v předchozím příkladu (tj. strojová čísla s mantisou délky 4 a exponentem v rozsahu od -3 do 4).

Na několika příkladech si ukažme, na která čísla této množiny se zobrazí

Příklad:

zadaná čísla, např. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{15}$.

Předpokládáme, že počítač zobrazí číslo na nejbližší číslo, které lze zobrazit, v případě shody na větší.

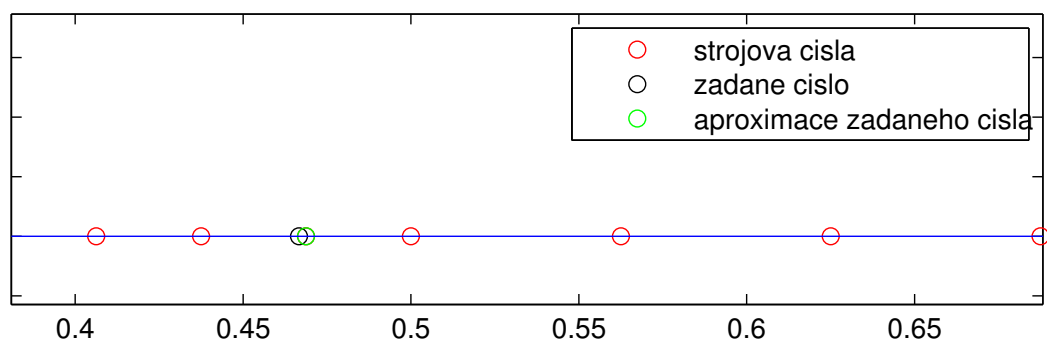
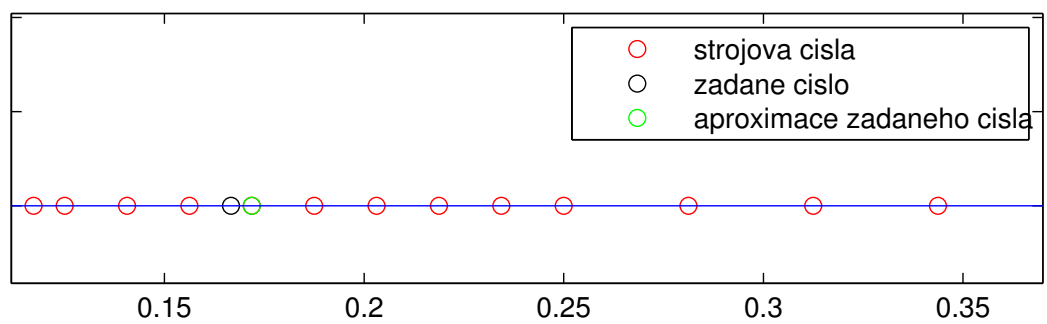
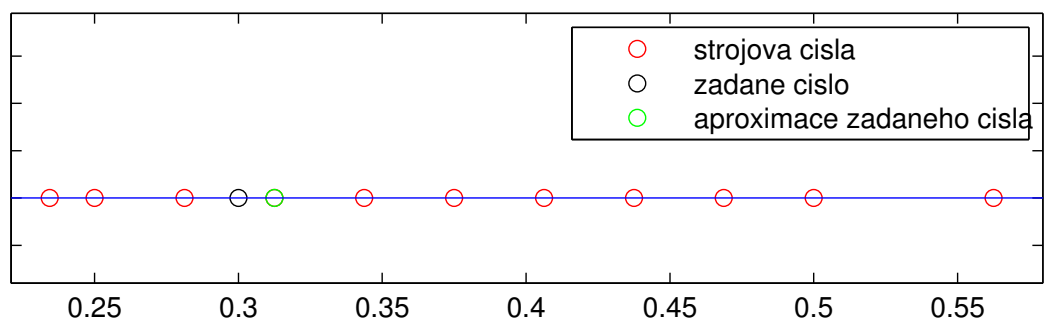
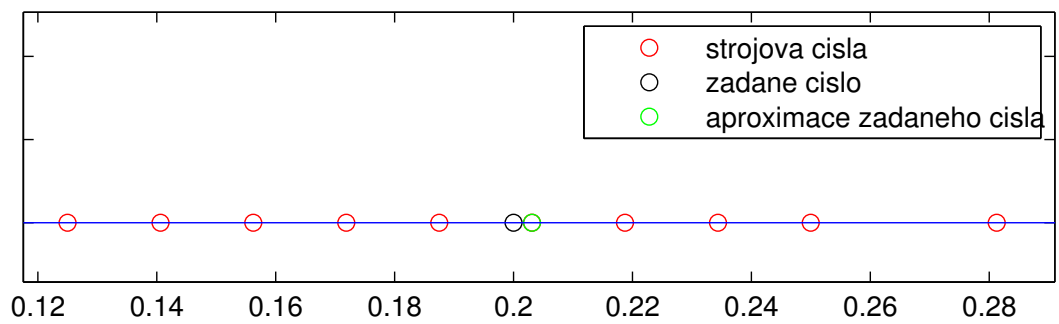
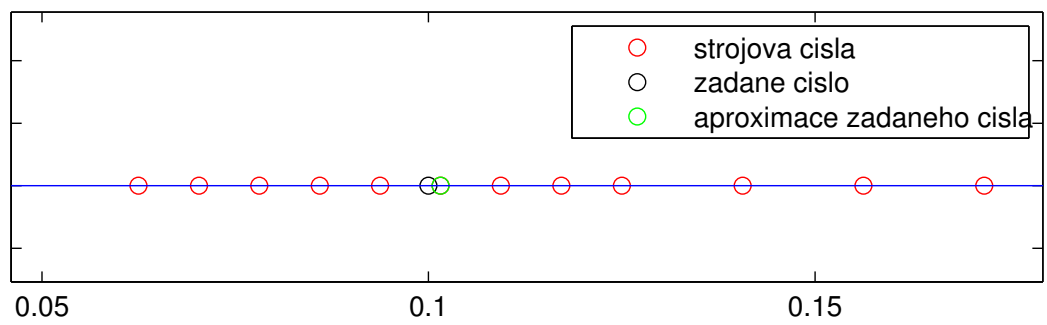
Zobrazení zadaných čísel do množiny strojových čísel
s mantisou délky 4 a exponentem v rozsahu od -3 do 4.

Zobrazuje čísla

čísla =

1/10
1/5
3/10
1/6
7/15

zadané číslo	zápis obrazu	obraz	chyba
0.10000000	0.1101 x 2 ⁻³	0.10156250	-0.00156250
0.20000000	0.1101 x 2 ⁻²	0.20312500	-0.00312500
0.30000000	0.1010 x 2 ⁻¹	0.31250000	-0.01250000
0.16666667	0.1011 x 2 ⁻²	0.17187500	-0.00520833
0.46666667	0.1111 x 2 ⁻¹	0.46875000	-0.00208333



Příklad:

Uvažujme množinu strojových čísel vygenerovanou v předchozím příkladu (tj. strojová čísla s mantisou délky 4 a exponentem v rozsahu od -3 do 4).

Ukažme si, jak se v tomto stroji sečtou čísla $\frac{1}{10}$ a $\frac{1}{5}$.

Zobrazení součtu čísel A a B v zadane množine strojovych čísel
s mantisou delky M a exponentem v rozsahu od Exp_min do Exp_max

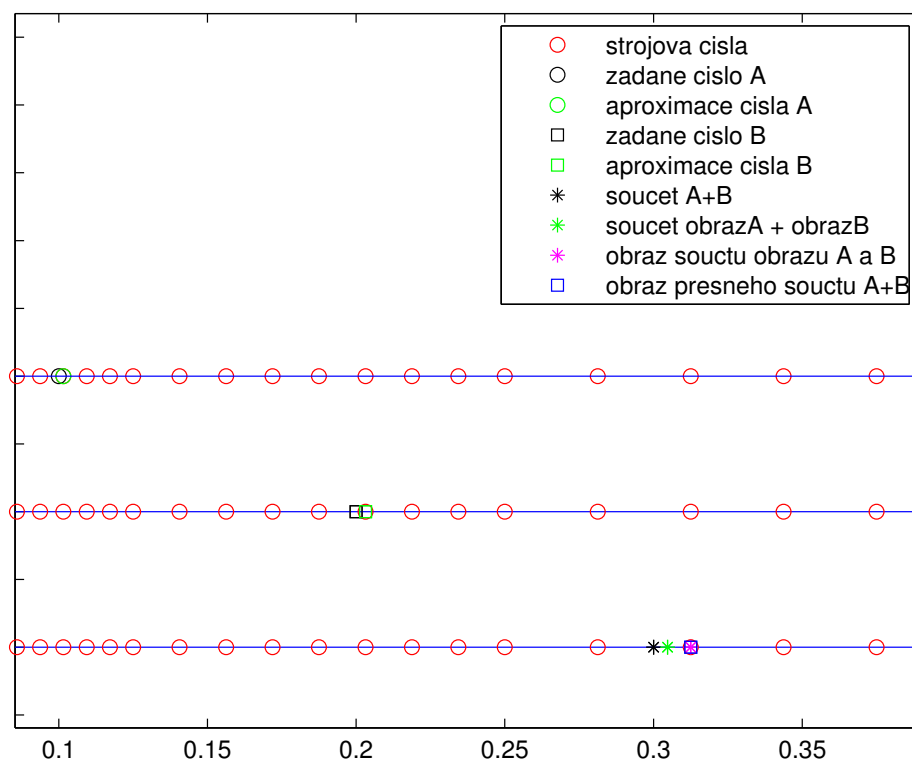
Cislo A = 0.1000000

Cislo B = 0.2000000

Pocet čísel mantisy M = 4

Rozsah pro exponent: od -3 do 4

cislo	zapis obrazu	obraz
A = 0.10000000	0.1101 x 2 ⁻³	0.10156250
B = 0.20000000	0.1101 x 2 ⁻²	0.20312500
obrazA+obrazB=		
0.30468750	0.1010 x 2 ⁻¹	0.31250000
A+B= 0.30000000	0.1010 x 2 ⁻¹	0.31250000



Příklad:

Uvažujme množinu strojových čísel vygenerovanou v předchozím příkladu (tj. strojová čísla s mantisou délky 4 a exponentem v rozsahu od -3 do 4).

Ukažme si, jak se v tomto stroji sečtou čísla $\frac{3}{10}$ a $\frac{1}{6}$.

Zobrazení součtu čísel A a B v zadane množine strojovych čísel
s mantisou delky M a exponentem v rozsahu od Exp_min do Exp_max

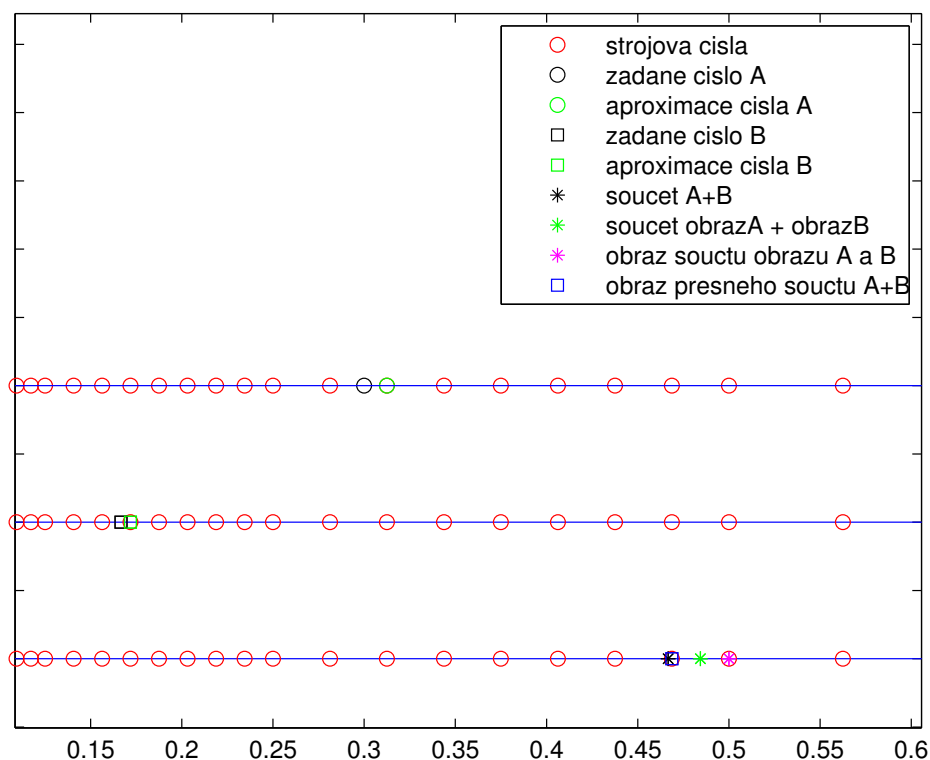
Cislo A = 0.300000

Cislo B = 0.166667

Pocet čísel mantisy M = 4

Rozsah pro exponent: od -3 do 4

cislo	zapis obrazu	obraz
A = 0.30000000	0.1010 x 2 ⁻¹	0.31250000
B = 0.16666667	0.1011 x 2 ⁻²	0.17187500
obrazA+obrazB=		
0.48437500	0.1000 x 2 ⁰	0.50000000
A+B= 0.46666667	0.1111 x 2 ⁻¹	0.46875000



Poznámka:

V předposledním příkladě se shodovali obraz přesného výsledku s obrazem součtu obrazů jednotlivých sčítanců.

V posledním příkladě se obraz přesného výsledku s obrazem součtu obrazů jednotlivých sčítanců neshodoval !

Chyba výpočtu v posledním příkladě:

$$\frac{7}{15} - 0,1000_2 \cdot 2^0 = \frac{14 - 15}{30} = -\frac{1}{30} = -0,0\bar{3}$$

Relativně:

$$\frac{\frac{1}{30}}{\frac{7}{15}} = \frac{1}{14} = 7,14\% \quad !!!$$

Přesnost počítače

- Vymezíme-li pro mantisu 24 bitů, získáme 7 desetinných míst ($2^{24} = 16777216$).
- Vymezíme-li pro mantisu 53 bitů, získáme 16 desetinných míst ($2^{53} = 9007199254740992$).

Základní formáty:

Formát	Bytes	Bitů pro mantisu	Bitů pro exponent
Single	4	24	8
Double	8	53	11

https://en.wikipedia.org/wiki/Single-precision_floating-point_format

https://en.wikipedia.org/wiki/Double-precision_floating-point_format

Příklad:

- Uvážíme formát SINGLE , tj. 24 bitů pro mantisu.

$$\frac{1}{10} = 0,0001\bar{1}_2 \approx 0,1100\,1100\,1100\,1100\,1100_2 \cdot 2^{-3}.$$

$$\text{Chyba zobrazení je } 0,1100_2 \cdot 2^{-27} (= \frac{1}{10} \cdot 2^{-24}) \approx 5,96 \cdot 10^{-9}.$$

- Máme-li počítat $\sum_{k=1}^{100000} \frac{1}{10} = 9.998,55664$.

$$\text{Musí být chyba větší než } 100000 \cdot 5,96 \cdot 10^{-9} = 5,96 \cdot 10^{-4}.$$

Ve skutečnosti je chyba ještě větší, neboť se v průběhu výpočtu musí částečně suma zaokrouhlovat dolů nebo nahoru, jak suma roste, později přičítaná čísla $\frac{1}{10}$ jsou oproti sumě menší a jsou tedy počítány s menší přesností (viz následující příklad).

Příklad: Ve formátu SINGLE sečtete čísla 10000 a 0,1.

```
-----
Prevod cisla 10000 z 10-soustavy do 2-soustavy na 0 desetinných míst
Cela cast ..... 10000
Desetinna cast ..... 0.000000
-----
prevod_cele_casti =

10000 : 2 = 5000 : 2 = 2500 : 2 = 1250 : 2 = 625 : 2 = 312 : 2 =
      0         0         0         0         1         0

= 156 : 2 = 78 : 2 = 39 : 2 = 19 : 2 = 9 : 2 = 4 : 2 = 2 : 2 = 1
      0         0         1         1         1         0         0

Cislo 10000 v 10-soustave prevedeno do 2-soustavy je 10011100010000.
```

$$(10000)_{10} = (10011100010000)_2 = 0,100111001 \cdot 2^{14}$$

$$(2^{14} = 16384)$$

$$\begin{aligned} 10000 \quad \dots \quad & 0,1001\,1100\,1000\,0000\,0000\,0000 \cdot 2^{14} \\ 0,1 \quad \dots \quad & 0,1100\,1100\,1100\,1100\,1100\,1100 \cdot 2^{-3} \\ 0,1 \text{ po SHIFTu} \quad \dots \quad & 0,0000\,0000\,0000\,0000\,0110\,0110 \cdot 2^{14} \\ & = (01100110)_2 \cdot 2^{-24} \cdot 2^{14} = (64 + 32 + 4 + 2) \cdot 2^{-10} = \\ & = \frac{102}{1024} \doteq 0,099609375 \end{aligned}$$

$$10000 + 0,1 \quad \dots \quad 0,1001\,1100\,1000\,0000\,0110\,0110 \cdot 2^{14}$$

Číslo 10000 je zobrazeno přesně.

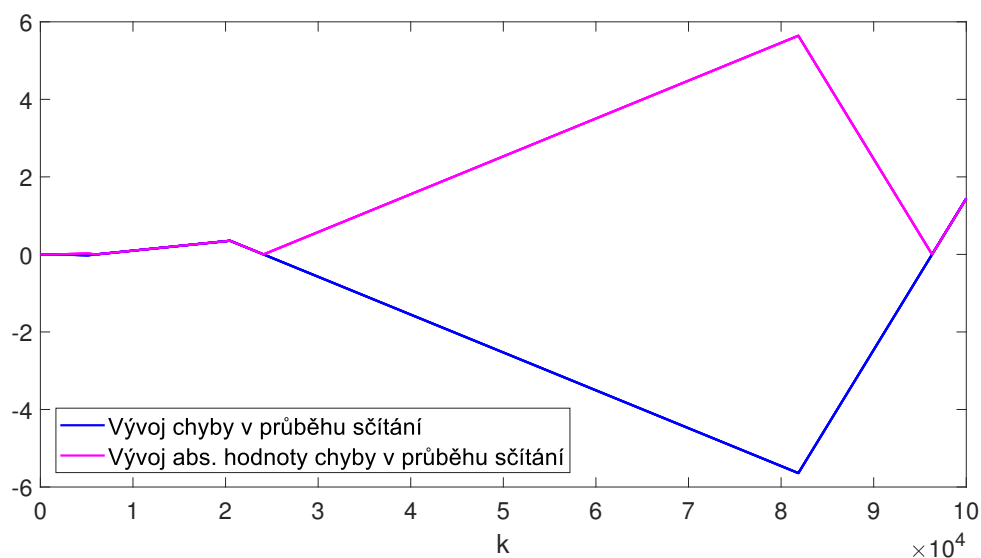
$$\text{Chyba zobrazení } 0,1 \text{ po SHIFTu je } \frac{1}{10} - \frac{102}{1024} \doteq 0,1 - 0,099609375 = 3,90625 \cdot 10^{-4}$$

Shrnutí:

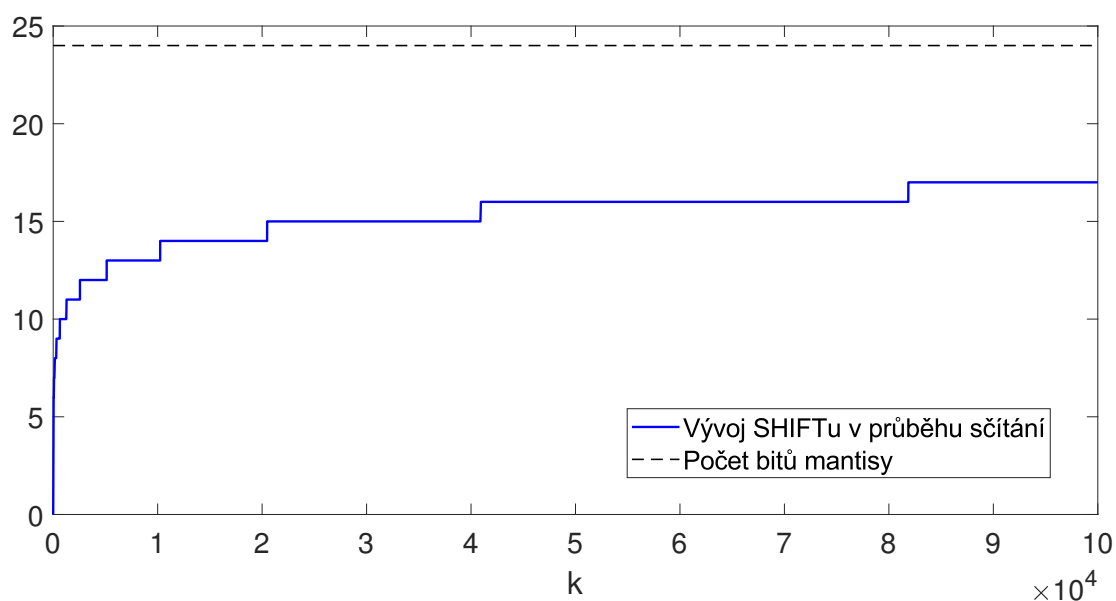
$$10000 + 0,1 \rightarrow \text{výsledek s chybou } 3,90625 \cdot 10^{-4}$$

(v sumě z motivačního příkladu jde o jeden krok)

Podrobnější analýzou získáme graf s vyčíslenou chybou, resp. absolutní hodnotou chyby.



Následující obrázek ukazuje SHIFT exponentu menšího sčítance v průběhu sumace.



Poznámka: Pokud použijeme formát DOUBLE, dostaneme přesnější výsledky, ovšem v principu bude situace obdobná, pouze se nepřesnosti projeví později.

Poznámka: Existují postupy, jak eliminovat chybu při sumaci, např.
https://en.wikipedia.org/wiki/Kahan_summation_algorithm