

Iterační principy

Na iteračním principu je založeno velké množství metod ať z oblasti numerické matematiky, tak z dalších oblastí matematiky.

Příklad: Najděte kladné řešení rovnice $x^2 + x - 2 = 0$.

1. možnost

Úlohu lze řešit použitím vzorce pro řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, tj.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

v našem případě vyjde:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Odpověď: Kladné řešení rovnice je $\alpha = 1$.

Tento výpočet patří mezi přímé metody, tj. teoreticky po konečném počtu operací jsme našli přesné řešení. Je třeba si uvědomit, že existuje jen málo problémů, pro které máme k dispozici vzorec a lze je tedy řešit přímo.

2. možnost

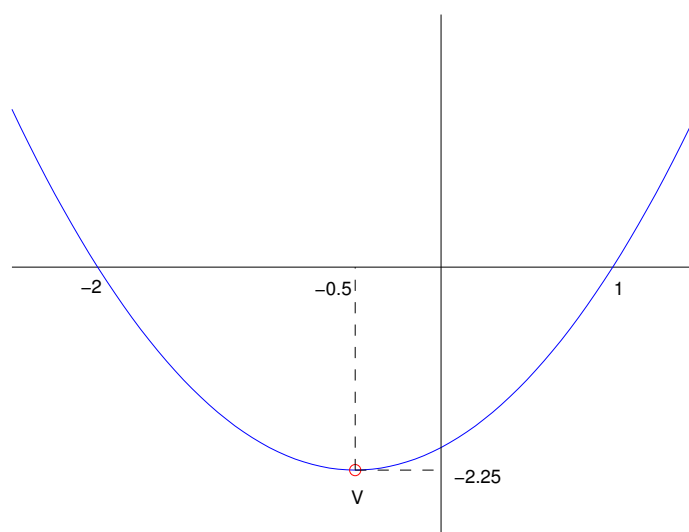
Pro řešení můžeme použít nějakou iterační metodu.

Jak vypadá graf funkce $y = x^2 + x - 2$?

Grafem je parabola, její vrchol určíme pomocí doplnění na čtverec.

$$y = \underbrace{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}_{x^2 + x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{4} - 2$$

Protože je koeficient u x^2 kladný, je parabola otevřená nahoru a vrchol odpovídá bodu, ve kterém je funkční hodnota minimální, tj. pro $x = -\frac{1}{2}$ je funkční hodnota $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2,25$.



Princip iteračních metod spočívá v konstrukci posloupnosti přibližných řešení tak, aby přesné řešení bylo limitním případem. Samozřejmě nesmíme zapomenout, že je nutné zadat počáteční aproximaci, a že je nutné iterační postup nějakým způsobem ukončit (po konečném počtu kroků).

Pro řešení našeho příkladu použijeme třeba **metodu půlení intervalu (bisekci)**.

Na začátku musíme zadat interval, na kterém řešení hledáme, tj. vezmeme třeba $\langle 0, 3 \rangle$. Musí platit, že funkční hodnoty v krajních bodech intervalu mají opačná znaménka, a že je funkce spojitá. Pokud jsou tyto předpoklady splněny, musí existovat alespoň 1 řešení naší úlohy. V každém kroku vezmeme pouze polovinu původního intervalu tak, aby opět funkční hodnoty v krajních bodech měly opačná znaménka.

Dále musíme výpočet nějakým způsobem ukončit. Můžeme použít některý z následujících způsobů:

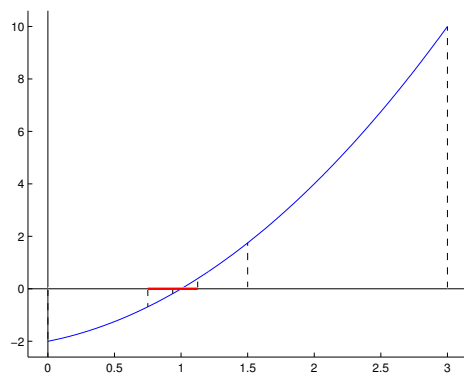
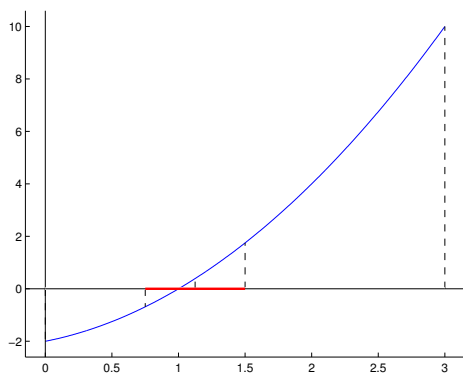
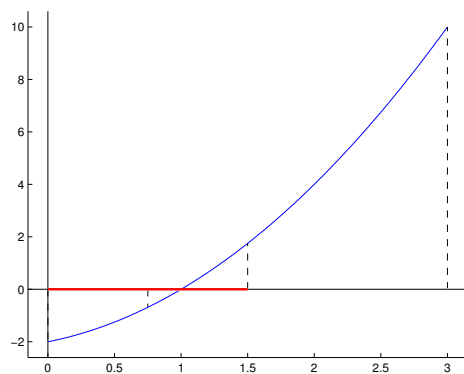
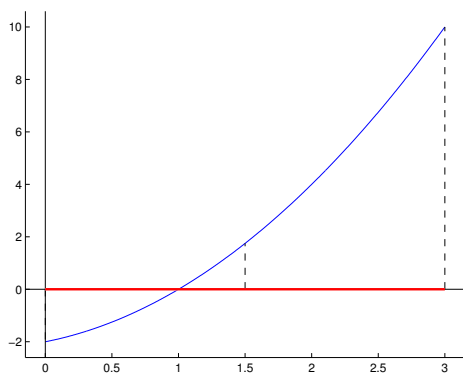
- délka intervalu v daném kroku $< \varepsilon$
- absolutní hodnota funkční hodnoty ve středu intervalu $< \varepsilon$
- počet kroků metody $< N$
- ...

Metoda puleni intervalu pro reseni nelinearni rovnice $f(x)=0$
na intervalu $<0,3>$ a zastavovací podminku $b-a<0.01$

Funkce $f(x)$ je zadana v souboru fce01.m takto:

```
function out=fce01(x);
out=x^2+x-2;
```

k	a	b	s	f(a)	f(b)	f(s)
0	0.0000	3.0000	1.5000	-2.0000	10.0000	1.7500
1	0.0000	1.5000	0.7500	-2.0000	1.7500	-0.6875
2	0.7500	1.5000	1.1250	-0.6875	1.7500	0.3906
3	0.7500	1.1250	0.9375	-0.6875	0.3906	-0.1836
4	0.9375	1.1250	1.0312	-0.1836	0.3906	0.0947
5	0.9375	1.0312	0.9844	-0.1836	0.0947	-0.0466
6	0.9844	1.0312	1.0078	-0.0466	0.0947	0.0235
7	0.9844	1.0078	0.9961	-0.0466	0.0235	-0.0117
8	0.9961	1.0078	1.0020	-0.0117	0.0235	0.0059
9	0.9961	1.0020	0.9990	-0.0117	0.0059	-0.0029

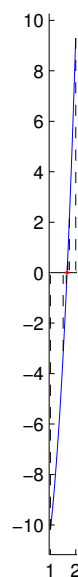


Poznámka: Použitím různých podmínek zastavíme algoritmus obecně v různých krocích.

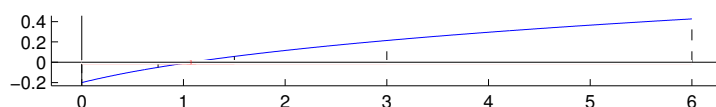
- Pokud bychom použili podmínku, že velikost intervalu v daném kroce je menší než 0,1, pak skončíme v 5. kroku $\dots 1,0312 - 0,9375 < 0,1$.
- Pokud bychom použili podmínku, že funkční hodnota uprostřed intervalu je v abs. hodnotě menší než 0,1, pak skončíme ve 4. kroku $\dots f(1,0312) = 0,0947 < 0,1$.

Otázka: Je lepší použít podmínku na délku intervalu nebo na funkční hodnotu?

Pokud je funkce monotónní a hodně strmá (má velkou absolutní hodnotu derivace), pak se algoritmus zastaví při použití podmínky na velikost intervalu dříve než při použití podmínky na funkční hodnotu, tj. přesnější výsledek získáme použitím podmínky na funkční hodnotu.



Pokud je funkce monotónní a velmi pomalu roste nebo klesá (abs. hodnota derivace je blízka 0), pak se algoritmus zastaví při použití podmínky na velikost intervalu později než při použití podmínky na abs. hodnotu funkce uprostřed intervalu.



Metoda puleni intervalu pro reseni nelinearni rovnice $f(x)=0$
na intervalu $<1,2>$ a zastavovací podminku $b-a<0.01$
a soucasne pro zastavovací podminku $\text{abs}(f(s))<0.01$

Funkce $f(x)$ je zadana v souboru fce02.m takto:

```
function out=fce02(x);
out=0.3*(x+1)^4-15;
Metoda puleni intervalu pro reseni nelinearni rovnice f(x)=0
na intervalu <1,2> a zastavovací podminku b-a<0.01
a soucasne pro zastavovací podminku abs(f(s))<0.01
```

Funkce $f(x)$ je zadana v souboru fce02.m takto:

```
function out=fce02(x);
out=0.3*(x+1)^4-15;
```

k	a		b		s		f(a)		f(b)		f(s)	

0	1.0000		2.0000		1.5000		-10.2000		9.3000		-3.2812	
1	1.5000		2.0000		1.7500		-3.2812		9.3000		2.1574	
2	1.5000		1.7500		1.6250		-3.2812		2.1574		-0.7558	
3	1.6250		1.7500		1.6875		-0.7558		2.1574		0.6500	
4	1.6250		1.6875		1.6562		-0.7558		0.6500		-0.0653	
5	1.6562		1.6875		1.6719		-0.0653		0.6500		0.2892	
6	1.6562		1.6719		1.6641		-0.0653		0.2892		0.1112	
7	1.6562		1.6641		1.6602		-0.0653		0.1112		0.0228	

Zastaveni vypoctu pro podminku na $b-a < 0.010000$

8	1.6562		1.6602		1.6582		-0.0653		0.0228		-0.0213	
9	1.6582		1.6602		1.6592		-0.0213		0.0228		0.0007	

Zastaveni vypoctu pro podminku na $\text{abs}(f(s)) < 0.010000$

Delka posledniho intervalu je $b-a = 0.001953$
Abs. hodnota funkcni hodnoty v bode s je $f(s) = 0.000716$

Metoda puleni intervalu pro reseni nelinearni rovnice $f(x)=0$
na intervalu $<0,6>$ a zastavovací podminku $b-a<0.01$
a soucasne pro zastavovací podminku $\text{abs}(f(s))<0.01$

Funkce $f(x)$ je zadana v souboru fce03.m takto:

```
function out=fce03(x);
out=(x+1)^(1/4)-1.2;
```

k	a		b		s		f(a)		f(b)		f(s)	
0	0.0000		6.0000		3.0000		-0.2000		0.4266		0.2142	
1	0.0000		3.0000		1.5000		-0.2000		0.2142		0.0574	
2	0.0000		1.5000		0.7500		-0.2000		0.0574		-0.0498	
3	0.7500		1.5000		1.1250		-0.0498		0.0574		0.0074	

Zastaveni vypoctu pro podminku na $\text{abs}(f(s)) < 0.010000$

4	0.7500		1.1250		0.9375		-0.0498		0.0074		-0.0202	
5	0.9375		1.1250		1.0312		-0.0202		0.0074		-0.0062	
6	1.0312		1.1250		1.0781		-0.0062		0.0074		0.0007	
7	1.0312		1.0781		1.0547		-0.0062		0.0007		-0.0027	
8	1.0547		1.0781		1.0664		-0.0027		0.0007		-0.0010	
9	1.0664		1.0781		1.0723		-0.0010		0.0007		-0.0002	
10	1.0723		1.0781		1.0752		-0.0002		0.0007		0.0002	

Zastaveni vypoctu pro podminku na $b-a < 0.010000$

Delka posledniho intervalu je $b-a = 0.005859$
Abs. hodnota funkcni hodnoty v bode s je $f(s) = 0.000231$

Pokud funkce není monotónní, nelze dopředu říci, použitím které zastavovací podmínky získáme přesnější aproximaci řešení.

Metoda pulení intervalu pro řešení nelineární rovnice $f(x)=0$
na intervalu $\langle -2, 7.5 \rangle$ a zastavovací podmínku $b-a < 0.01$
a současně pro zastavovací podmínku $\text{abs}(f(s)) < 0.01$

Funkce $f(x)$ je zadána v souboru fce04.m takto:

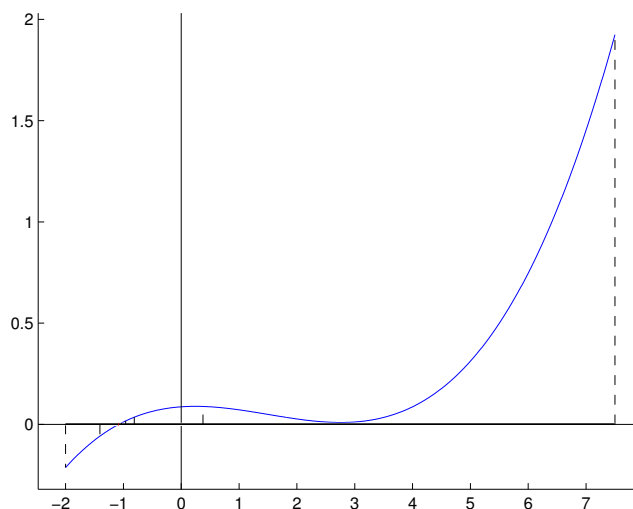
```
function out=fce04(x);
out=0.01*(x+1)*(x-2.5)*(x-3)+0.012;
```

k	a	b	s	f(a)	f(b)	f(s)
0	-2.0000	7.5000	2.7500	-0.2130	1.9245	0.0097

Zastavení výpočtu pro podmínku na $\text{abs}(f(s)) < 0.010000$

1	-2.0000	2.7500	0.3750	-0.2130	0.0097	0.0887
2	-2.0000	0.3750	-0.8125	-0.2130	0.0887	0.0357
3	-2.0000	-0.8125	-1.4062	-0.2130	0.0357	-0.0579
4	-1.4062	-0.8125	-1.1094	-0.0579	0.0357	-0.0042
5	-1.1094	-0.8125	-0.9609	-0.0042	0.0357	0.0174
6	-1.1094	-0.9609	-1.0352	-0.0042	0.0174	0.0070
7	-1.1094	-1.0352	-1.0723	-0.0042	0.0070	0.0015
8	-1.1094	-1.0723	-1.0908	-0.0042	0.0015	-0.0013
9	-1.0908	-1.0723	-1.0815	-0.0013	0.0015	0.0001
10	-1.0908	-1.0815	-1.0862	-0.0013	0.0001	-0.0006

Zastavení výpočtu pro podmínku na $b-a < 0.010000$



Metoda puleni intervalu pro reseni nelinearni rovnice $f(x)=0$
na intervalu $<-1.75,2>$ a zastavovací podminku $b-a<0.01$
a soucasne pro zastavovací podminku $\text{abs}(f(s))<0.01$

Funkce $f(x)$ je zadana v souboru fce05.m takto:

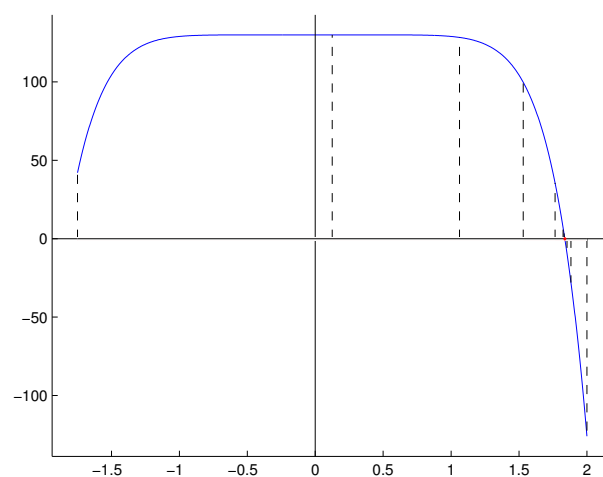
```
function out=fce05(x);
out=130-x^8;
```

k	a	b	s	f(a)	f(b)	f(s)
0	-1.7500	2.0000	0.1250	42.0361	-126.0000	130.0000
1	0.1250	2.0000	1.0625	130.0000	-126.0000	128.3758
2	1.0625	2.0000	1.5312	128.3758	-126.0000	99.7748
3	1.5312	2.0000	1.7656	99.7748	-126.0000	35.5531
4	1.7656	2.0000	1.8828	35.5531	126.0000	-27.9271
5	1.7656	1.8828	1.8242	35.5531	-27.9271	7.3647
6	1.8242	1.8828	1.8535	7.3647	-27.9271	-9.3061
7	1.8242	1.8535	1.8389	7.3647	-9.3061	-0.7383
8	1.8242	1.8389	1.8315	7.3647	-0.7383	3.3699
9	1.8315	1.8389	1.8352	3.3699	-0.7383	1.3301

Zastavení výpočtu pro podmínku na $b-a < 0.010000$

10	1.8352	1.8389	1.8370	1.3301	-0.7383	0.2995
11	1.8370	1.8389	1.8380	0.2995	-0.7383	-0.2185
12	1.8370	1.8380	1.8375	0.2995	-0.2185	0.0407
13	1.8375	1.8380	1.8377	0.0407	-0.2185	-0.0888
14	1.8375	1.8377	1.8376	0.0407	-0.0888	-0.0240
15	1.8375	1.8376	1.8376	0.0407	-0.0240	0.0084

Zastavení výpočtu pro podmínku na $\text{abs}(f(s)) < 0.010000$

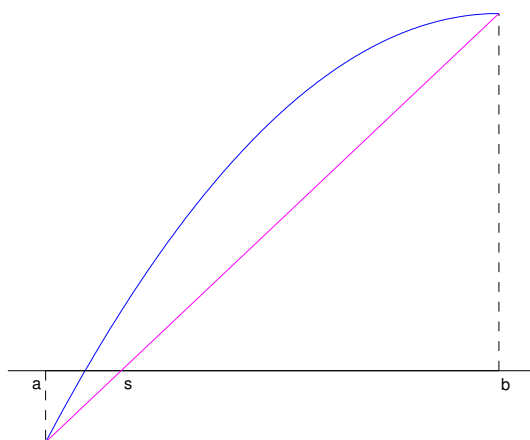


Poznámka:

Z obrázků je patrné, že chyba našeho přibližného řešení může být daleko menší než použité ε , ale také mnohem větší než použité ε .

Chyba řešení se obecně nerovná číslu ε , které jsme použili v zastavovací podmínce !

Ukážeme si jinou metodu na řešení. Naším cílem je rychleji zmenšovat interval, viz obrázek:



Metoda se jmenuje **regula falsi** a algoritmus je stejný jako u bisekce, ovšem jako bod s nebereme střed intervalu, ale průsečík tětiny s osou x .

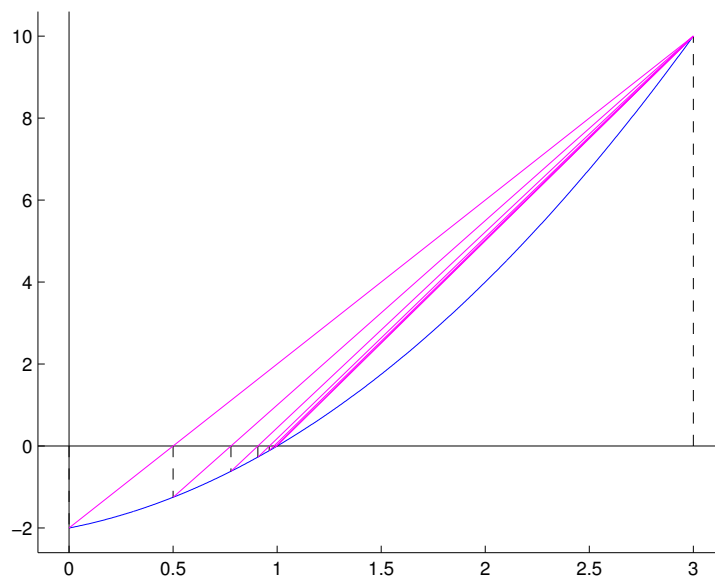
Pokud bychom použili metodu regula falsi na zadání z úvodního příkladu, dostali bychom:

Metoda regula falsi pro řešení nelineární rovnice $f(x)=0$
na intervalu $<0,3>$ a zastavovací podmínku $|f(s)|<0.01$

Funkce $f(x)$ je zadána v souboru fce01.m takto:

```
function out=fce01(x);  
out=x^2+x-2;
```

k	a	b	s	f(a)	f(b)	f(s)
0	0.0000	3.0000	0.5000	-2.0000	10.0000	-1.2500
1	0.5000	3.0000	0.7778	-1.2500	10.0000	-0.6173
2	0.7778	3.0000	0.9070	-0.6173	10.0000	-0.2704
3	0.9070	3.0000	0.9621	-0.2704	10.0000	-0.1123
4	0.9621	3.0000	0.9847	-0.1123	10.0000	-0.0456
5	0.9847	3.0000	0.9939	-0.0456	10.0000	-0.0184
6	0.9939	3.0000	0.9975	-0.0184	10.0000	-0.0074



Z obrázku je patrné, že pro zastavení nelze použít podmínku na délku intervalu v daném kroku, protože tato délka pro počet kroků jdoucí do ∞ neklesá k nule. Tj. musíme použít podmínku na abs. hodnotu funkční hodnoty v bodě s .

Otázka:

Pokud existuje více řešení, tak které najdu?
(Ať už metodou bisekce nebo metodou regula falsi).

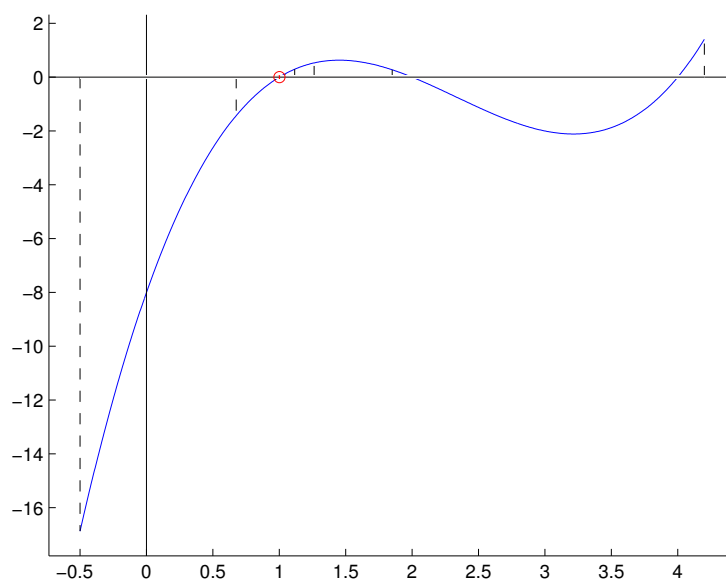
- Nelze dopředu říci bez dalších informací.
- Každá z metod může nalézt jiný z nich pro stejná vstupní data.

Metoda puleni intervalu pro reseni nelinearni rovnice $f(x)=0$
na intervalu $<-0.5, 4.2>$ a zastavovací podminku $b-a < 0.01$

Funkce $f(x)$ je zadana v souboru `fce06.m` takto:

```
function out=fce06(x);  
out=(x-1)*(x-2)*(x-4);
```

k	a	b	s	f(a)	f(b)	f(s)
0	-0.5000	4.2000	1.8500	-16.8750	1.4080	0.2741
1	-0.5000	1.8500	0.6750	-16.8750	0.2741	-1.4318
2	0.6750	1.8500	1.2625	-1.4318	0.2741	0.5300
3	0.6750	1.2625	0.9688	-1.4318	0.5300	-0.0977
4	0.9688	1.2625	1.1156	-0.0977	0.5300	0.2949
5	0.9688	1.1156	1.0422	-0.0977	0.2949	0.1195
6	0.9688	1.0422	1.0055	-0.0977	0.1195	0.0163
7	0.9688	1.0055	0.9871	-0.0977	0.0163	-0.0393
8	0.9871	1.0055	0.9963	-0.0393	0.0163	-0.0112
9	0.9963	1.0055	1.0009	-0.0112	0.0163	0.0026

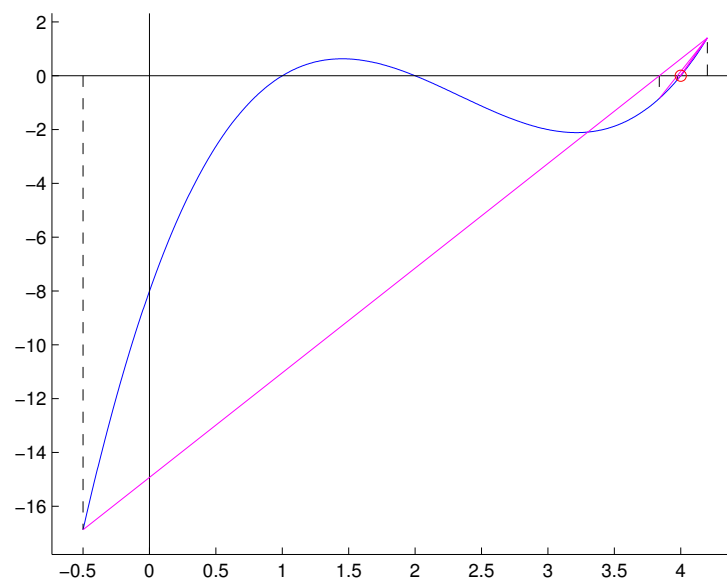


Metoda regula falsi pro reseni nelinearni rovnice $f(x)=0$
na intervalu $\langle -0.5, 4.2 \rangle$ a zastavovací podminku $|f(s)| < 0.01$

Funkce $f(x)$ je zadana v souboru fce06.m takto:

```
function out=fce06(x);
out=(x-1)*(x-2)*(x-4);
```

k	a	b	s	f(a)	f(b)	f(s)	
0	-0.5000	4.2000	3.8380	-16.8750	1.4080	-0.8448	
1	3.8380	4.2000	3.9738	-0.8448	1.4080	-0.1539	
2	3.9738	4.2000	3.9961	-0.1539	1.4080	-0.0235	
3	3.9961	4.2000	3.9994	-0.0235	1.4080	-0.0035	



Příklad:

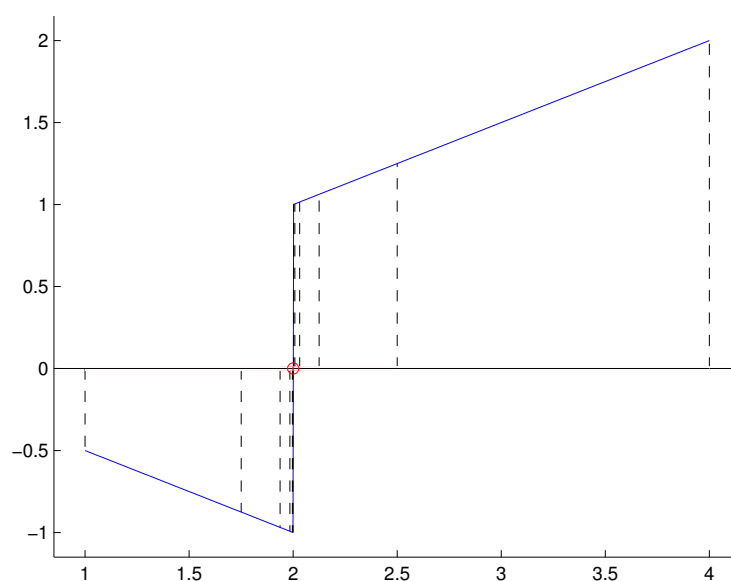
Najděte řešení rovnice $\frac{|x^2 - 2x|}{2x - 4} = 0$ na intervalu $\langle 1; 4 \rangle$ pomocí metody půlení intervalu a metody regula falsi.

Metoda puleni intervalu pro reseni nelinearni rovnice $f(x)=0$ na intervalu $\langle 1,4 \rangle$ a zastavovací podminku $b-a < 0.01$

Funkce $f(x)$ je zadana v souboru fce07.m takto:

```
function out=fce07(x);
out=abs(x^2-2*x)/(2*x-4);
```

k	a	b	s	f(a)	f(b)	f(s)
0	1.0000	4.0000	2.5000	-0.5000	2.0000	1.2500
1	1.0000	2.5000	1.7500	-0.5000	1.2500	-0.8750
2	1.7500	2.5000	2.1250	-0.8750	1.2500	1.0625
3	1.7500	2.1250	1.9375	-0.8750	1.0625	-0.9688
4	1.9375	2.1250	2.0312	-0.9688	1.0625	1.0156
5	1.9375	2.0312	1.9844	-0.9688	1.0156	-0.9922
6	1.9844	2.0312	2.0078	-0.9922	1.0156	1.0039
7	1.9844	2.0078	1.9961	-0.9922	1.0039	-0.9980
8	1.9961	2.0078	2.0020	-0.9980	1.0039	1.0010
9	1.9961	2.0020	1.9990	-0.9980	1.0010	-0.9995

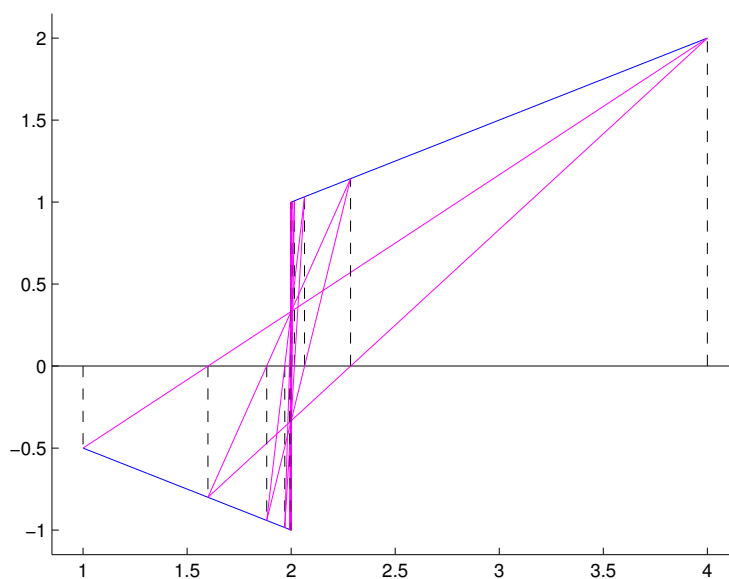


Metoda regula falsi pro reseni nelinearni rovnice $f(x)=0$
na intervalu $\langle 1,4 \rangle$ a zastavovací podmínce $|f(s)| < 0.01$

Funkce $f(x)$ je zadána v souboru fce07.m takto:

```
function out=fce07(x);
out=abs(x^2-2*x)/(2*x-4);
```

k	a	b	s	f(a)	f(b)	f(s)
0	1.0000	4.0000	1.6000	-0.5000	2.0000	-0.8000
1	1.6000	4.0000	2.2857	-0.8000	2.0000	1.1429
2	1.6000	2.2857	1.8824	-0.8000	1.1429	-0.9412
3	1.8824	2.2857	2.0645	-0.9412	1.1429	1.0323
4	1.8824	2.0645	1.9692	-0.9412	1.0323	-0.9846
5	1.9692	2.0645	2.0157	-0.9846	1.0323	1.0079
6	1.9692	2.0157	1.9922	-0.9846	1.0079	-0.9961
7	1.9922	2.0157	2.0039	-0.9961	1.0079	1.0020
8	1.9922	2.0039	1.9980	-0.9961	1.0020	-0.9990
9	1.9980	2.0039	2.0010	-0.9990	1.0020	1.0005
10	1.9980	2.0010	1.9995	-0.9990	1.0005	-0.9998
11	1.9995	2.0010	2.0002	-0.9998	1.0005	1.0001
12	1.9995	2.0002	1.9999	-0.9998	1.0001	-0.9999
13	1.9999	2.0002	2.0001	-0.9999	1.0001	1.0000
14	1.9999	2.0001	2.0000	-0.9999	1.0000	-1.0000
15	2.0000	2.0001	2.0000	-1.0000	1.0000	1.0000
16	2.0000	2.0000	2.0000	-1.0000	1.0000	-1.0000
17	2.0000	2.0000	2.0000	-1.0000	1.0000	1.0000



Shrnutí:

- Bisekce našla jako přibližné řešení číslo 1.9990.
- Metoda regula falsi nekonvergovala.

Nebyl splněn předpoklad spojitosti funkce f na $\langle a, b \rangle$ a rovnice neměla řešení.

Příklad z úvodu přednášky zkusíme řešit jiným způsobem.

Pokud má řešení splňovat rovnici

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

musí taky splňovat rovnici

$$x = 2 - x^2.$$

Zvolíme počáteční aproximaci $x_0 = 2,5$ a počítáme další iterace podle vzorce

$$x_{k+1} = 2 - x_k^2.$$

Dostaneme:

```
Metoda proste iterace pro reseni nelinearni rovnice x=phi(x)
pro pocatecni aproximaci x0=2.5 a zastavovaci podminku
|x(k)-x(k-1)|<0.01
```

```
Funkce funkce_phi(x) je zadana v souboru fce08.m takto:
```

```
function out=fce08(x);
out=2-x^2;
```

k	x(k)
0	2.500000
1	-4.250000
2	-16.062500
3	-256.003906
4	-65536.000015
5	-4294967296.000000
6	-18446744073709551616
.	.
.	.
.	.
10	-Inf
11	-Inf

Posloupnost bohužel nekonverguje.

Zkusíme jiný předpis, například

$$x^2 = 2 - x,$$
$$x = +\sqrt{2 - x} \quad (\text{hledáme kladné řešení}).$$

Pokud bychom volili $x_0 = 2,5$, pak bychom dostali pod odmocninou záporné číslo. Zvolíme proto například $x_0 = 1,5$ a další iterace získáme pomocí předpisu

$$x_{k+1} = \sqrt{2 - x_k}.$$

Dostaneme:

```
Metoda proste iterace pro reseni nelinearni rovnice x=phi(x)
pro pocatecni aproximaci x0=1.5 a zastavovaci podminku
|x(k)-x(k-1)|<0.01
```

Funkce funkce_phi(x) je zadana v souboru fce09.m takto:

```
function out=fce09(x);
out=sqrt(2-x);
```

k	x(k)
0	1.500000
1	0.707107
2	1.137055
3	0.928949
4	1.034916
5	0.982387
6	1.008768
7	0.995606
8	1.002194

Vidíme, že posloupnost konverguje k přesnému řešení $\alpha = 1$. Opět je třeba zvolit zastavovací podmínku. Výpočet ukončíme, pokud rozdíl dvou po sobě jdoucích iterací bude dostatečně malý, tj.

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon.$$

$$|x_8 - x_7| < 0,006588 \leq 0,01 = \varepsilon$$

Pro volbu $\varepsilon = 0,01$ výpočet ukončíme v osmém kroku a za přibližné řešení prohlásíme $x_8 = 1,002194$.

Poslední použitá metoda se nazývá **metoda prosté iterace**.