

Chaos ($\chi\alpha\omicron\varsigma$)

Deterministický chaos - na první pohled slova s protichůdným obsahem.

Edward Norton Lorenz (23.5.1917 - 16.4.2008) (*otec chaosu*)

Americký matematik (Harvard) a meteorolog (MIT). Při studiu modelů počasí Lorenz objevil, že počasí se ne vždy chová podle předpovědi. Malá odchylka v počátečních hodnotách proměnných v jeho primitivním počítačovém modelu počasí měla za následek veliké rozdíly v chování počasí. Tato citlivá závislost na počátečních podmínkách se stala známou jako motýlí efekt.

Vylučuje prediktabilitu (dlouhodobější)

Deterministické chování Ve zdánlivě chaotických systémech (turbulence, stoupající kouř) existuje skrytý řád. Je možné stanovit, jaké příčiny vedly k danému pozorovanému následku (většinou je to však možné pouze dodatečně - *a posteriori*).

$$\text{PŘÍČINA} \Rightarrow \text{NÁSLEDEK}$$

Soběpodobnost Určitá vlastnost se zachovává nezávisle na měřítku. Objevuje se určitý řád ve zdánlivém chaosu. Graficky znázorněná vlastnost soběpodobnosti ... fraktál.

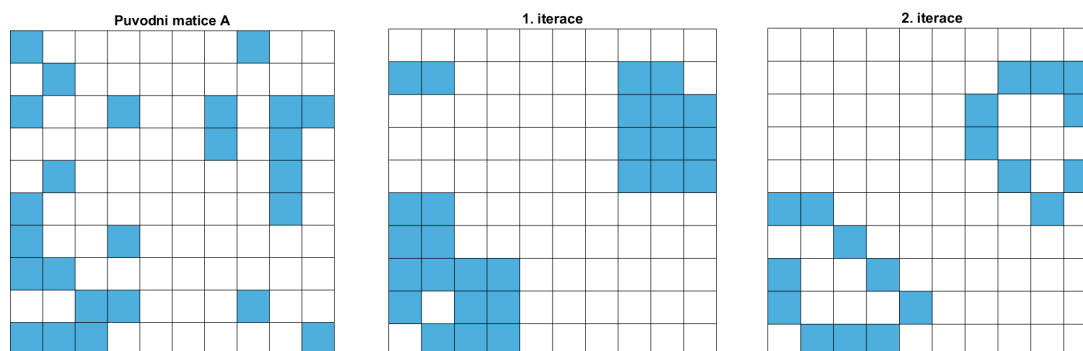
Samoorganizace Například pohyb ryb v hejnu.

Věrohodný model - Každá ryba se řídí třemi jednoduchými lokálními pravidly:

soudržnost hejna, zařazení a oddělení.

Je překvapující, jak komplikované kolektivní chování z těchto 3 jednoduchých pravidel vychází. Neexistuje žádný globální plán pohybu nebo perspektiva a neexistuje žádný vůdce hejna (podobné chování mravenců).

Hra život



Zkusme sestavit jednoduchý model růstu populace.

Pro jednoduchost uvažujeme kolonii bakterií, která se vždy po určitém čase dělením rozmnoží.

Přírůstek za čas Δt :
$$\frac{y(n+1) - y(n)}{\Delta t} = k \cdot y(n) \quad (\text{diferenční rovnice})$$

$y(n)$... počet jedinců (bakterií) v čase n

k ... koeficient růstu (tj. frekvence dělení bakterií za určitý čas)

Δt ... změna času (z času n do času $n+1$) ... časový krok

$$y(n+1) - y(n) = k \cdot y(n) \cdot \Delta t$$

$$y(n+1) = (k\Delta t + 1) \cdot y(n)$$

$$y(n+1) = b \cdot y(n)$$

Získali jsme rekurentně zadanou posloupnost.

Poznámka: Stejný model lze použít i pro modelování počtu lidí nebo zvířat atd.

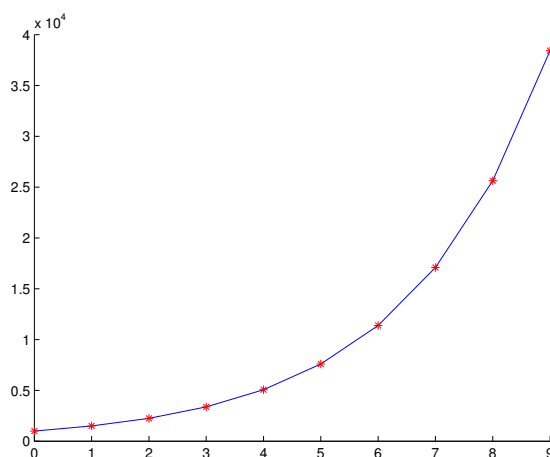
Příklad: Jaké je chování systému $x_{n+1} = b \cdot x_n$ pro různé hodnoty parametrů ?

Pro zvolené $b = 1,5$ a $x_0 = 1000$ dostaneme:

Nejjednodušší model
růstu populace:

$x_0 = 1000$ (zadáno)
 $x_{n+1} = b \cdot x_n$
parametr $b = 1.500000$

n	hodnota(n)
1	1000.000000
2	1500.000000
3	2250.000000
4	3375.000000
5	5062.500000
6	7593.750000
7	11390.625000
8	17085.937500
9	25628.906250
10	38443.359375



Exponenciální chování

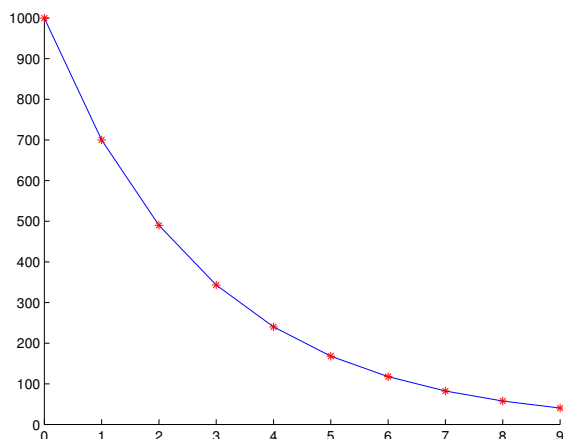
Pro zvolené $b = 0,7$ a $x_0 = 1000$ dostaneme:

Nejjednodušší model
rustu populace:

$x_0 = 1000$ (zadáno)
 $x_{(n+1)} = b \cdot x_{(n)}$
 parametr $b = 0.700000$

n	hodnota(n)

1	1000.000000
2	700.000000
3	490.000000
4	343.000000
5	240.100000
6	168.070000
7	117.649000
8	82.354300
9	57.648010
10	40.353607



Opět exponenciální chování

Pokud vezmeme v úvahu omezený prostor nebo omezený zdroj potravy, nemůže tento model fungovat (chování je exponenciální).

⇒ Musíme vybrat model, ve kterém se počet jedinců bude regulovat tak, aby nemohl být překročen určitý maximální počet.

Uvažujeme tento model:

$$X_{n+1} = b \cdot X_n \cdot (10^4 - X_n) / 10^4 = b \cdot X_n \cdot \left(1 - \frac{X_n}{10^4}\right)$$

10^4 ... maximální možný počet jedinců v populaci.

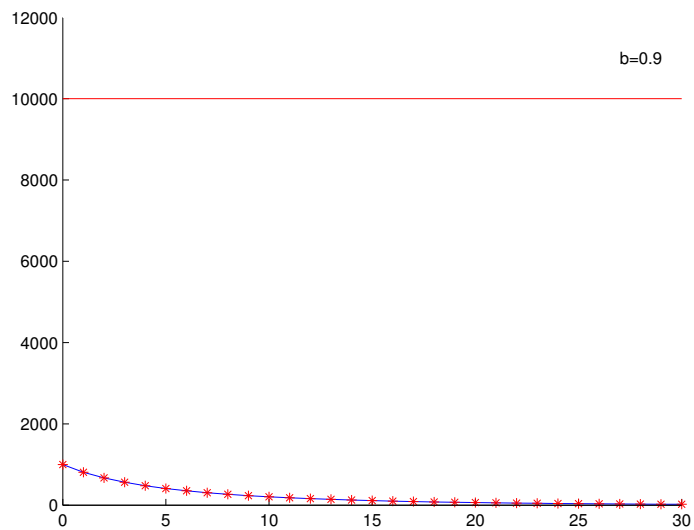
Pokud je závorka $(10^4 - X_n)$ malé číslo, tj. populace je již početná, bude počet v dalším čase $(n + 1)$ regulován a dojde k redukci v populaci.

Naopak, pokud je malý počet jedinců v populaci, je závorka $(10^4 - X_n)$ velké číslo a nárůst počtu jedinců v dalším čase $(n + 1)$ se podpoří.

Nyní budeme sledovat chování modelu po různé hodnoty parametru b . Ve všech uvažujeme počáteční počet jedinců populace $X_0 = 1000$, tj. 10% z možné kapacity prostředí.

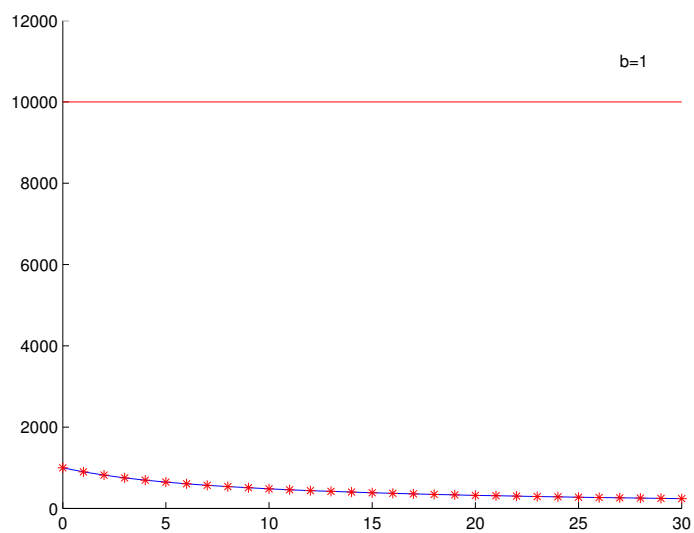
1. případ

$$b = 0,9$$



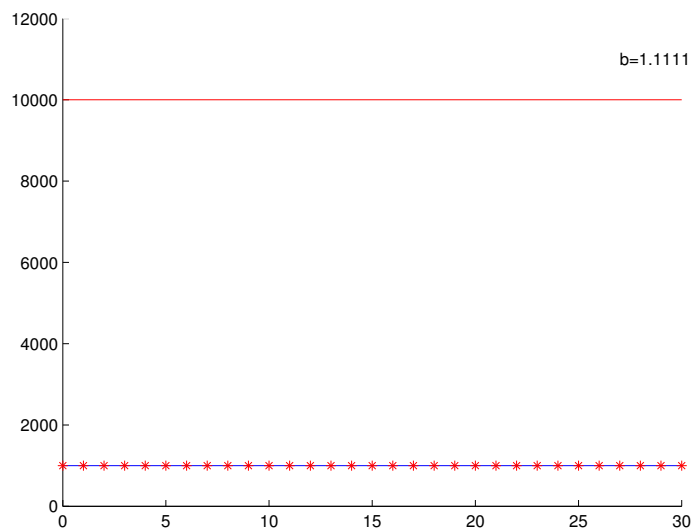
2. případ

$$b = 1$$



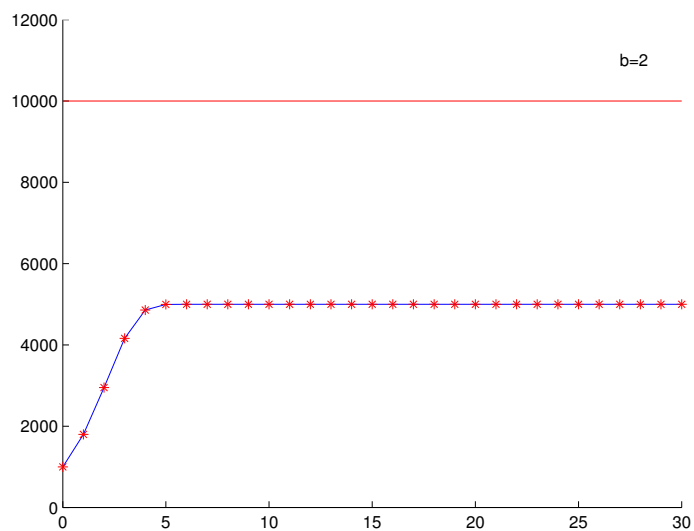
3. případ

$$b = \frac{10}{9}$$



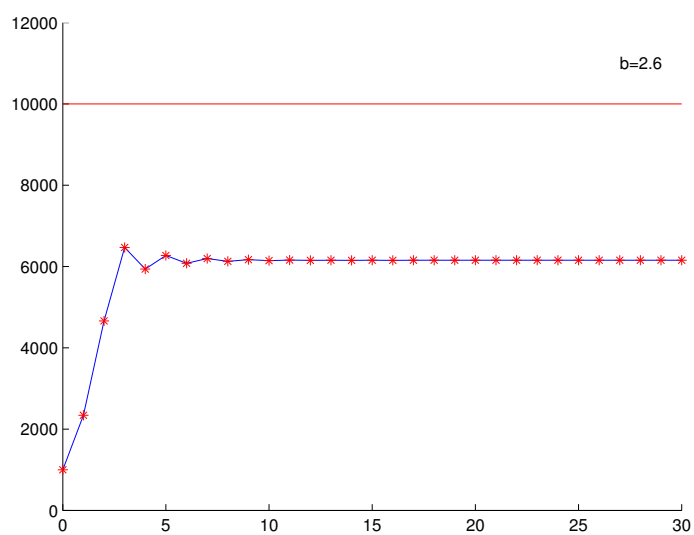
4. případ

$b = 2$



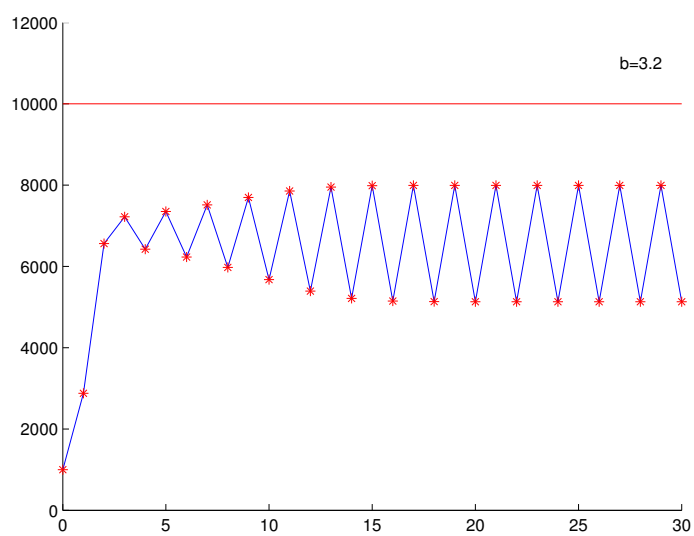
5. případ

$b = 2,6$



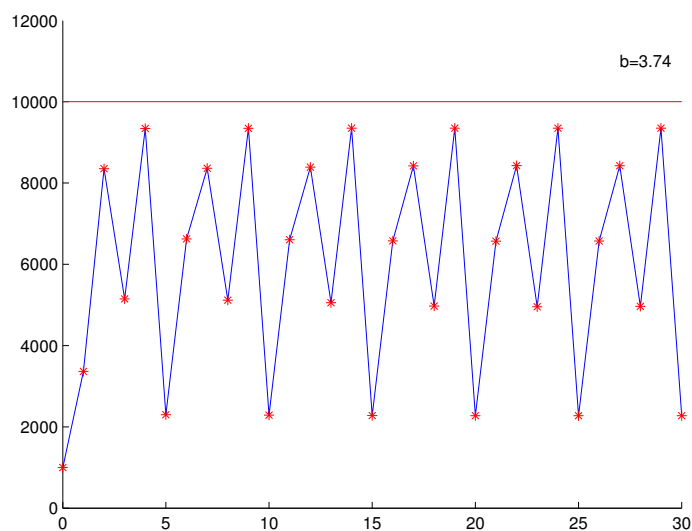
6. případ

$b = 3,2$



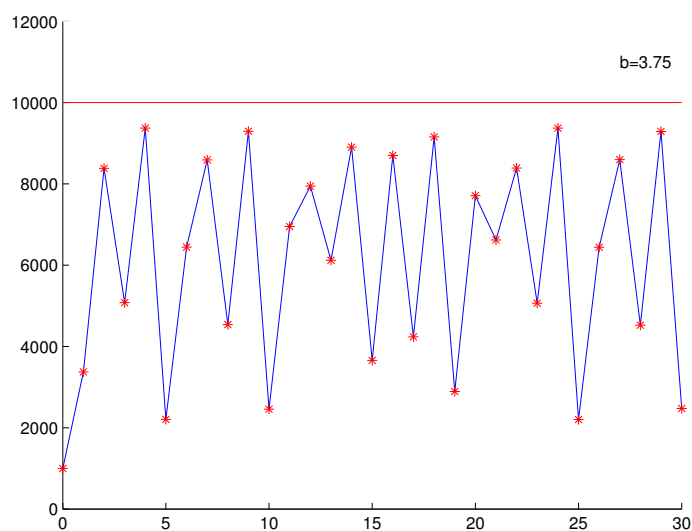
7. případ

$$b = 3,74$$



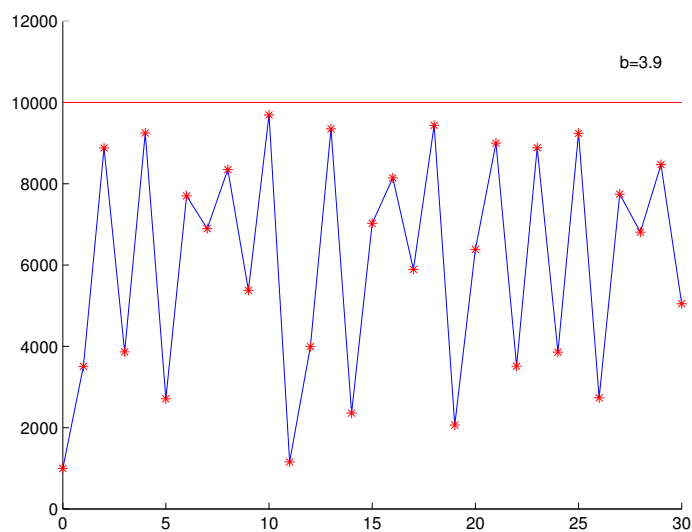
8. případ

$$b = 3,75$$



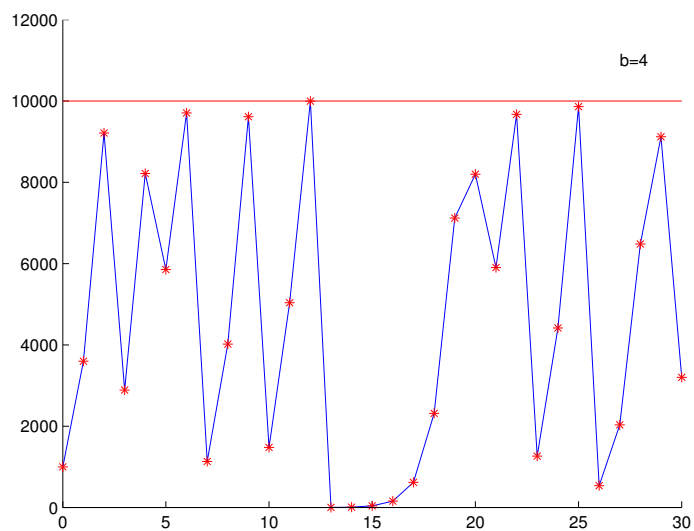
9. případ

$$b = 3,9$$



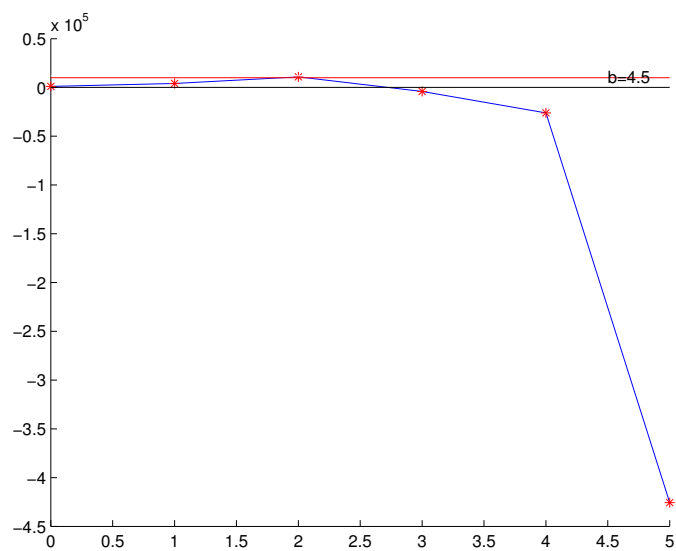
10. případ

$b = 4$



11. případ

$b = 4,5$



Komentáře:

- Pro parametr $0 \leq b < \frac{10}{9}$ populace vymizí, tj. počet se ustálí na hodnotě 0 jedinců.
- Pro parametr $b = \frac{10}{9}$ se populace nemění, tj. zůstává na počáteční hodnotě 1000 jedinců.
- Pro parametr $b = 2$, resp. $b = 2,6$ se počet se ustálil na hodnotě 5000, resp. 6153,84.
- Pro parametr $b = 3,2$ proces nekonverguje, ale osciluje mezi dvěma hodnotami 5130,4 a 7994,5 (“vzestup” a “pád”, perioda je 2).
- Výsledky pro parametr $b = 3,74$ a $b = 3,75$ ilustrují fakt, že malá změna v parametru b způsobí dramatickou změnu v chování modelu.

Pro $b = 3,74$ se zdá, že se opakuje pět hodnot, tj. perioda je 5.

Pro $b = 3,75$ se periodicitu poruší.

- Pro parametr $b = 3,9$. Zde se zdá, že systém ztratil regulární charakter a získává charakter “chaosu”. Členy posloupnosti nejsou náhodné - model je deterministický.
- Pro parametr $b = 4$ dochází v modelu k velikým výkyvům, kdy populace skoro vymizí a stavem, kdy zcela naplní kapacitu prostředí.
- Pro parametr $b = 4,5$ dojde k překročení meze pro prostředí a systém se zhroutí.

Věnujeme se případům, kdy posloupnost konverguje, tj. počet se ustálí na jediné hodnotě, kterou označme X . Potom musí platit rovnost, pokud do rekurentní formule dosadíme za X_n i X_{n+1} hodnotu X , tj.

$$X = b X \frac{10^4 - X}{10^4} \quad / \cdot \frac{10^4}{X}$$

$$10^4 = b(10^4 - X)$$

$$10^4 = b 10^4 - b X$$

$$X = \frac{10^4(b-1)}{b}$$

$$X = 10^4 \left(1 - \frac{1}{b}\right)$$

Hledání ustálené hodnoty pro přepis $X_{n+1} = \phi(X_{n+1})$ je myšlenkou tzv. metody prosté iterace, resp. věty o pevném bodě.

Zkusme se zamyslet, kdy bude předpis $X_{n+1} = \phi(X_{n+1})$ konvergovat k jedné hodnotě.

V případě $b = 2$ dostaneme po dosazení, že $X = 10^4(1 - \frac{1}{2}) = 5000$.

V případě $b = 2,6$ dostaneme po dosazení, že $X = 10^4(1 - \frac{1}{2,6}) = 6153,84$.

V případě $b = 3,2$ dostaneme po dosazení, že $X = 10^4(1 - \frac{1}{3,2}) = 6875$

Tady ovšem proces osciloval mezi 5130,4 a 7994,5. Tj. neplatilo, že $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$.

Pokud se proces ustálí ve stavu, kdy se střídá hodnota X a Y musí platit:

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{2n} \quad \text{a} \quad Y = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{2n+1}$$

$$Y = bX \frac{10^4 - X}{10^4}$$

$$X = bY \frac{10^4 - Y}{10^4}$$

$$X = b(bX \frac{10^4 - X}{10^4})(10^4 - (bX \frac{10^4 - X}{10^4})) 10^{-4}$$

$$X = \frac{b^2 X}{10^8} (10^4 - X)(10^4 - bX(1 - \frac{X}{10^4}))$$

$$X = (\frac{b^2 X}{10^4} - \frac{b^2 X^2}{10^8})(10^4 - bX + \frac{bX^2}{10^4}) \quad / : X$$

$$1 = (1 - \frac{X}{10^4})(\frac{b^2}{10^4})(10^4 - bX + \frac{bX^2}{10^4})$$

Jedná se o kubickou rovnici, jejíž jedním z kořenů musí být $X = 10^4(1 - \frac{1}{b})$, tj. musí být zahrnut případ, že proces konverguje.

Rovnici lze tedy vydělit členem $(X - 10^4(1 - \frac{1}{b}))$, získáme tak kvadratickou rovnici s kořeny X a Y .

$$-X^3(\frac{b^3}{10^{12}}) + X^2(\frac{b^3}{10^8} + \frac{b^3}{10^8}) + X(-\frac{b^3}{10^4} - \frac{b^2}{10^8}) + b^2 - 1 = 0$$

Rovnice má pro $b = 3,2$ kořeny:

$X = 7994,55$, $Y = 5130,445$ a $Z = 6875$.

Zkoumáme, mezi kterými 2 hodnotami osciluje řešení
v modelu rustu populace s omezením:

MEZ = 10000
 $x_0 = 1000$
 $x_{(n+1)} = b * x_{(n)} * (MEZ - x_{(n)}) / MEZ$
 $b = 3.200000$

Předpokládáme, že

- liché členy posloupnosti se ustali na hodnotě X
- sudé členy posloupnosti se ustali na hodnotě Y

Limitně tedy musí platit, že

$X = b * Y * (10^4 - Y) / 10^4$
 $Y = b * X * (10^4 - X) / 10^4$

Po dosazení za Y do první rovnice dostaneme rovnici

$X = b * (b * X * (10^4 - X) / 10^4) * (10^4 - (b * X * (10^4 - X) / 10^4)) / 10^4$
resp. po faktorizaci

$0 =$

$1/1000000000000 X (b X + 10000 - 10000 b)$

$(b^2 X^2 - 10000 b^2 X - 10000 b X + 100000000 b + 100000000)$

Řešení pro parametr $b=3.200000$ jsou

$X(1) = 0.000000$
 $X(2) = 6875.000000$
 $X(3) = 7994.554905$
 $X(4) = 5130.445095$

$$X = 4794.270198, \quad Y = 8236.032832 \quad \text{a} \quad Z = 6969.69697.$$

```
X(1) = 0.000000
X(2) = 6969.696970
X(3) = 8236.032832
X(4) = 4794.270198
```

Zkusme vypočítat kořeny rovnice pro $b = 2$.

V tomto případě se ovšem řešení ustálilo na jedné hodnotě.

Zkoumáme, mezi kterými 2 hodnotami osciluje řešení
v modelu rustu populace s omezením:

```
MEZ      = 10000
x_0      = 1000
x_(n+1) = b * x_(n) * (MEZ - x_(n)) / MEZ
b        = 2.000000
```

Předpokládáme, že

- liché členy posloupnosti se ustáli na hodnotě X
- sudé členy posloupnosti se ustáli na hodnotě Y

Limitně tedy musí platit, že

$$X = b \cdot Y \cdot (10^4 - Y) / 10^4$$
$$Y = b \cdot X \cdot (10^4 - X) / 10^4$$

Po dosazení za Y do první rovnice dostaneme rovnici

$$X = b \cdot (b \cdot X \cdot (10^4 - X) / 10^4) \cdot (10^4 - (b \cdot X \cdot (10^4 - X) / 10^4)) / 10^4$$

resp. po faktorizaci

$$0 =$$

$$1/100000000000000 X (b X + 10000 - 10000 b)$$

$$(b^2 X^2 - 10000 b X^2 - 10000 b X + 100000000 b + 100000000)$$

Řešení pro parametr $b=2.000000$ jsou

$$X(1) = 0.000000$$
$$X(2) = 5000.000000$$
$$X(3) = 7500.000000 + 4330.127019 \cdot i$$
$$X(4) = 7500.000000 - 4330.127019 \cdot i$$

Kořeny $X(3)$ a $X(4)$ nejsou reálné. =>

V tomto případě nebude řešení oscilovat mezi dvěma hodnotami.

Zkusme vypočítat kořeny rovnice pro $b = 3,6$.

V tomto případě se ovšem řešení neustálilo na jedné hodnotě ani neoscilovalo mezi dvěma hodnotami.

Zkoumame, mezi kterými 2 hodnotami osciluje řešení
v modelu rustu populace s omezením:

MEZ = 10000
 $x_0 = 1000$
 $x_{(n+1)} = b * x_{(n)} * (MEZ - x_{(n)}) / MEZ$
 $b = 3.600000$

Předpokládáme, že

- liché členy posloupnosti se ustali na hodnotě X
- sudé členy posloupnosti se ustali na hodnotě Y

Limitně tedy musí platit, že

$$X = b * Y * (10^4 - Y) / 10^4$$

$$Y = b * X * (10^4 - X) / 10^4$$

Po dosazení za Y do první rovnice dostaneme rovnici

$$X = b * (b * X * (10^4 - X) / 10^4) * (10^4 - (b * X * (10^4 - X) / 10^4)) / 10^4$$

resp. po faktorizaci

$$0 =$$

$$1/1000000000000 X (b X + 10000 - 10000 b)$$

$$(b^2 X^2 - 10000 b^2 X - 10000 b X + 100000000 b + 100000000)$$

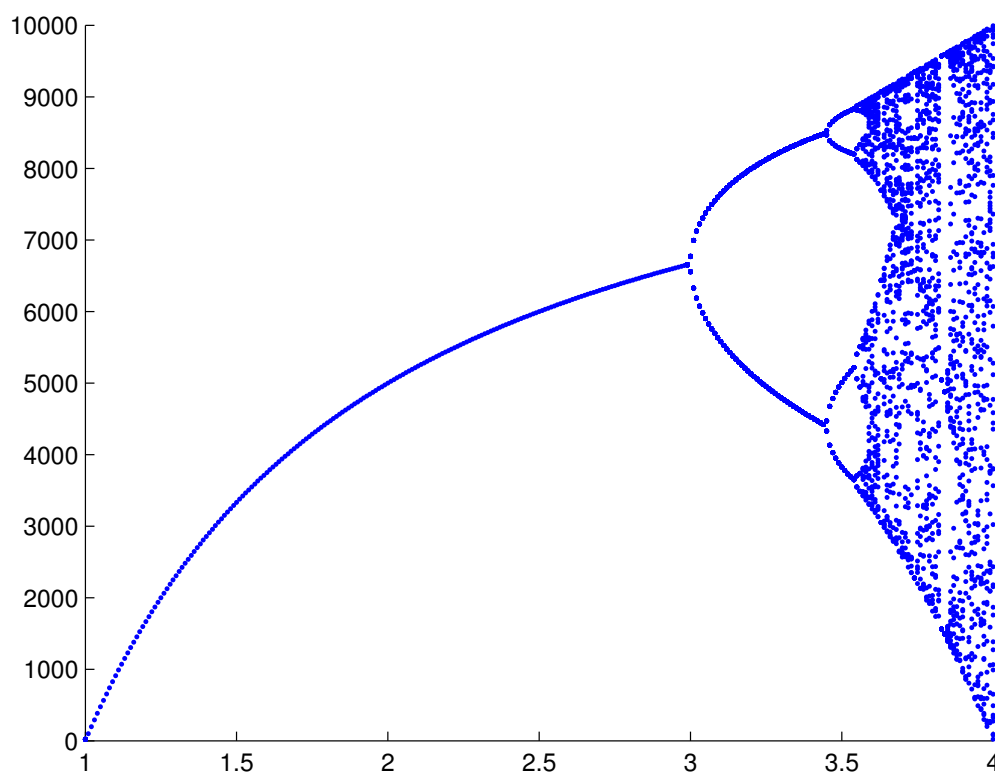
Řešení pro parametr $b=3.600000$ jsou

$X(1) = 0.000000$
 $X(2) = 7222.222222$
 $X(3) = 8696.284406$
 $X(4) = 4081.493371$

Pro overení vypíšeme následující iterace:

$X_{27} = 8881.699173$
 $X_{28} = 3575.668151$
 $X_{29} = 8269.660362$
 $X_{30} = 5151.355603$

Pokud pro různé hodnoty parametru b vyneseme do grafu ustálená řešení, resp. několik vyšších členů posloupnosti, získáme tento obrázek:



Uvažujeme podobný příklad, tentokrát v komplexním oboru.

Máme iterační formuli:

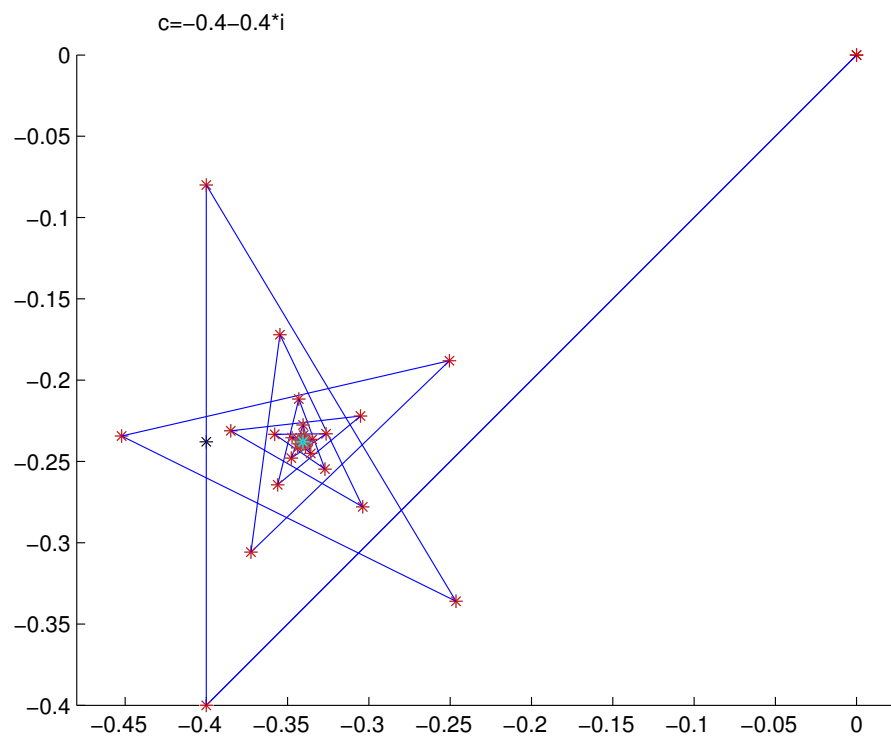
$$X_{n+1} = X_n^2 + c$$

a volíme počáteční iteraci X_0 a hodnotu c .

Ukažme si vykreslené členy posloupnosti pro několik případů volby X_0 a c .

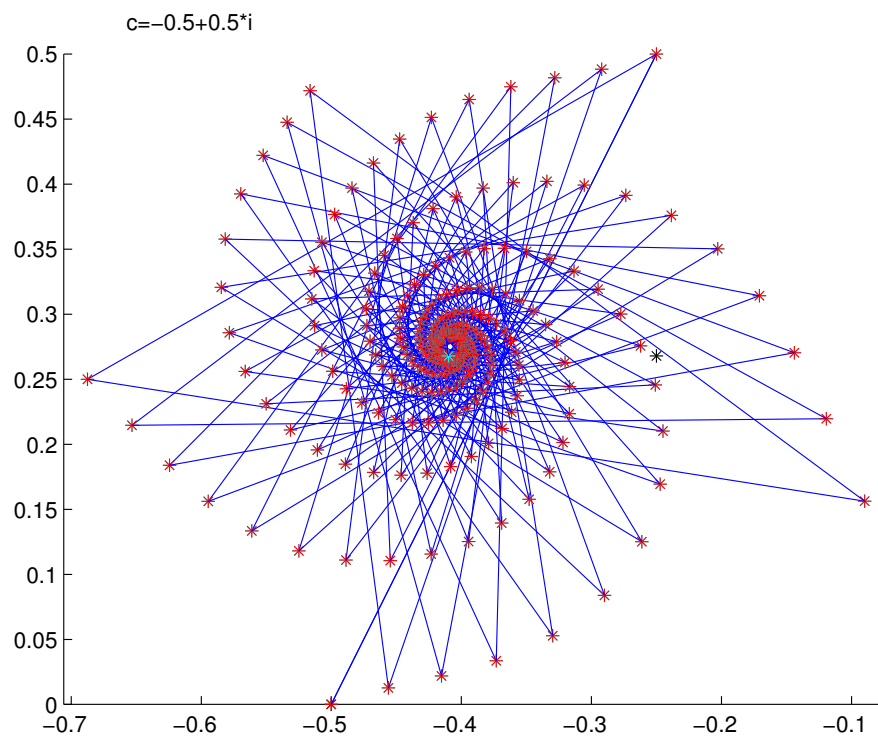
1. příklad

$$x_0 = 0; \quad c = -0,4 - 0,4i$$



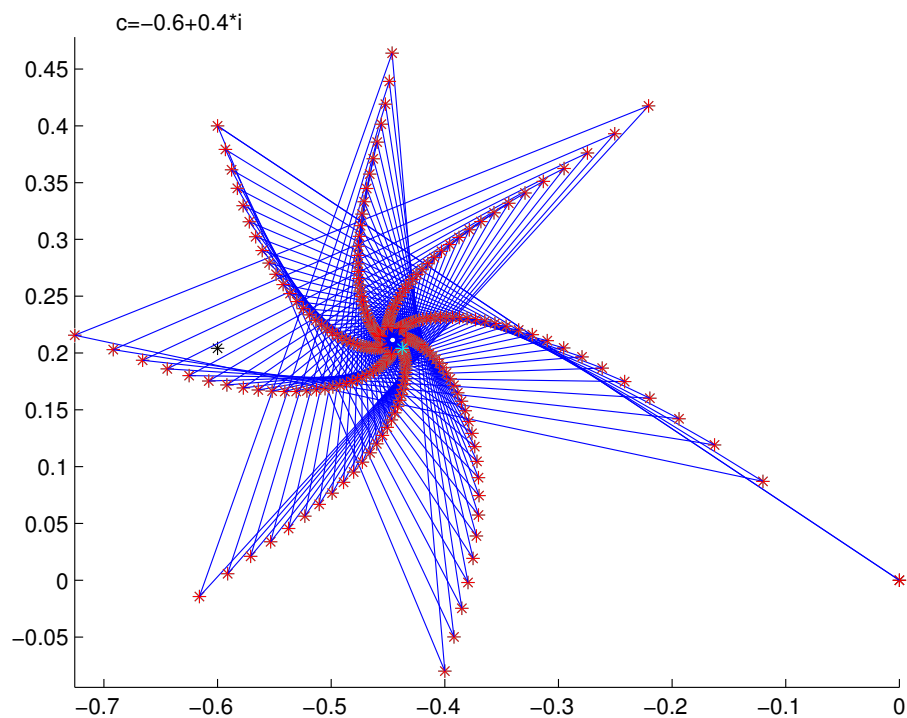
2. příklad

$$x_0 = -0,5; \quad c = -0,5 + 0,5i$$



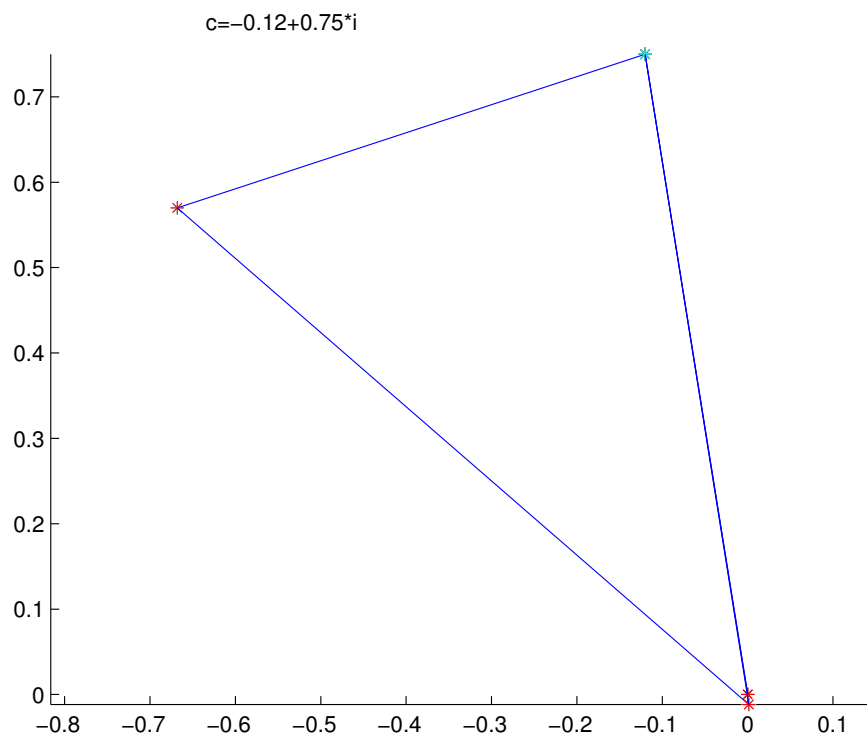
3. příklad

$$x_0 = 0; \quad c = -0,6 + 0,4i$$



4. příklad

$$x_0 = 0; \quad c = -0,12 + 0,75i$$



5. příklad

$$x_0 = -0,5 - 0,3i; \quad c = -0,4444 - 0,568i$$

