

**Motto: “Je příroda kolem nás spojitá nebo diskrétní?”**

Uvažujme např. stůl. Každý, kdo se o něj opře asi prohlásí, že je spojitý (nejsou v něm žádné díry). Pokud půjdeme k větším detailům a použijeme mikroskop, zjistíme, že spojitý není. Pokud půjdeme na úroveň atomů je situace ještě zajímavější.

Při modelování různých problémů závisí na měřítku, které uvažujeme.

- Pokud budu řešit reálný problém (velikost např. v cm), bude zcela vyhovující použít *spojitý model*.
- Pokud půjdu na úroveň nižší (na úroveň atomů), bude lepší použít *diskrétní model*.

Poznámka:

Musíme být opatrní, neboť podle *kvantové fyziky* je poloha částice rozprostřena v celém objemu vlnové funkce. Klasická představa, že polohu a rychlost lze určit s libovolnou přesností je nahrazena pravděpodobností, že tyto veličiny v jistém objemu nabývají určité hodnoty.

Odpověď na úvodní otázku nedám. Pokud se budu rozhodovat o tom, zda použiji diskrétní nebo spojitý model, musím přihlídnout k měřítku. V každém případě potom pracuji s *modelem*.

Co to vlastně znamená, když řeknu, že je něco spojité? Když tu věc rozpůlím, jsou obě části stále spojité a nemění své vlastnosti. To mohu opakovat do **nekonečna** (tj. jedná se o abstrakci).

Příklady:

Spojitost funkce v bodě	...	limita
Součet nekonečné řady	...	limita
Derivace	...	limita
Integrál určitý	...	limita

Problém chápání nekonečna a limity:

**Zenon z Eleje** (řecký matematik 400 l. př. n. l.)

- známý svou snahou zpochybnit učení pythagorovců, tj. zničit pojem čísla a pojem mnohosti
- chtěl dokázat neexistenci pohybu (mechanického)
- známé logické paradoxy, které vyvrátili až Pascal (1623 - 1662) a Leibniz (1646 - 1716)

(Špatné chápání nekonečného dělení a limity)

### 1. Letící šíp

Pozorován v kterémkoli jednotlivém okamžiku letu, se nalézá *na určitém* místě v prostoru, na němž je v tom okamžiku v klidu. Když je ale v klidu de facto v každém libovolném okamžiku svého letu, pak je v klidu i v čase. To znamená, že letící šíp se nepohybuje.



### 2. Achilles a želva

Závodí, a protože je Achilles, řekněme 10x rychlejší, dá želvě náskok, řekněme 100m. Achilles želvu nikdy nedohoní, protože když doběhne na místo, odkud želva startovala, ujde želva určitý kus cesty, když Achilles doběhne na toto nové místo, želva zase mezitím ujde další kus cesty a tak ji Achilles nemůže dohonit, i když se vzdálenost mezi nimi zmenšuje, nikdy se nemůže proměnit v nic.

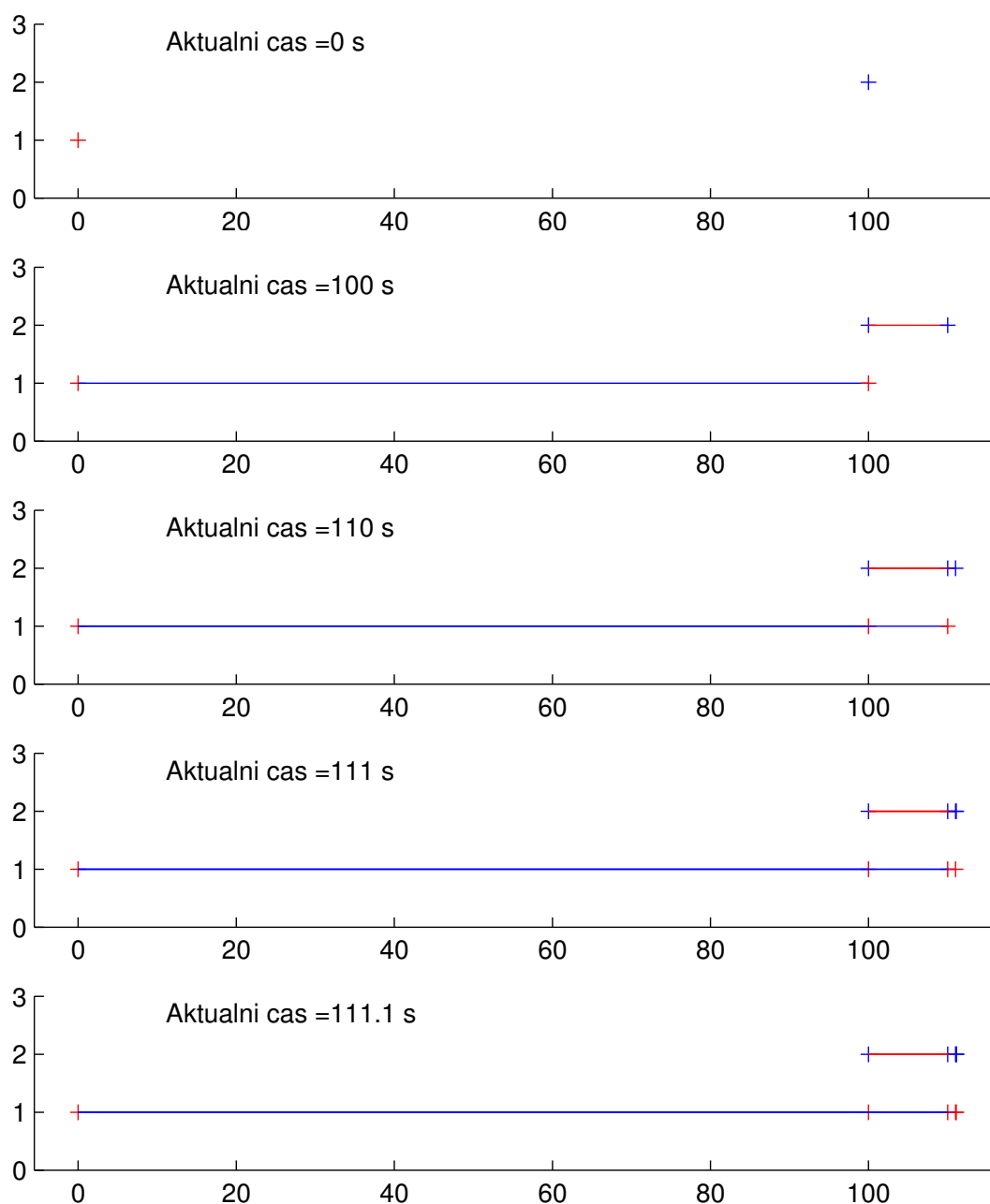


### 3. Dichotomie (půlení)

Pokud chci dojít z místa A do místa B, musím nejprve dojít do středu úsečky AB (= bod C), ovšem do místa C se mohu dostat jen, když se dostanu do středu úsečky AC ... Důsledkem je, že nejen že nedosáhnu bodu B, ale při nekonečném dělení ani nevyrazím z místa A.

### Kde byl problém?

- ad 1. Pro definování pohybu potřebujeme čas, pokud odstraníme čas a mluvíme o okamžicích, odstraňujeme také pohyb. Ačkoliv se šíp nemusí hýbat v daném okamžiku, může se hýbat tehdy, pokud definujeme pohyb jako výskyt věci na jiném místě v pozdějším čase.
- ad 2. Vzdálenost složená z nekonečného počtu konečných částí nemusí být nekonečná (nekonečná řada konverguje). Dosažení této vzdálenosti nastane v konečném čase.



krok	časový krok	čas	délkový krok	délka
0	$\Delta t_0 = 0\text{s}$	$t_0 = 0\text{s}$	$\Delta l_0 = 0$	$l_0 = 0$
1	$\Delta t_1 = 10\text{s}$	$t_1 = t_0 + \Delta t_1 = 10\text{s}$	$\Delta l_1 = 100\text{m}$	$l_1 = l_0 + \Delta l_1 = 100\text{m}$
2	$\Delta t_2 = 1\text{s}$	$t_2 = t_1 + \Delta t_2 = 11\text{s}$	$\Delta l_2 = 10\text{m}$	$l_2 = l_1 + \Delta l_2 = 110\text{m}$
3	$\Delta t_3 = 0,1\text{s}$	$t_3 = t_2 + \Delta t_3 = 11,1\text{s}$	$\Delta l_3 = 1\text{m}$	$l_3 = l_2 + \Delta l_3 = 111\text{m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i > 0$	$\Delta t_i = 10^{2-i}$		$\Delta l_i = 10^{3-i}$	

Celková vzdálenost:

$$l = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{\infty} 10^{3-i} = 1000 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = 1000 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1000}{9} = 111, \bar{1} \text{ m}$$

Celkový čas:

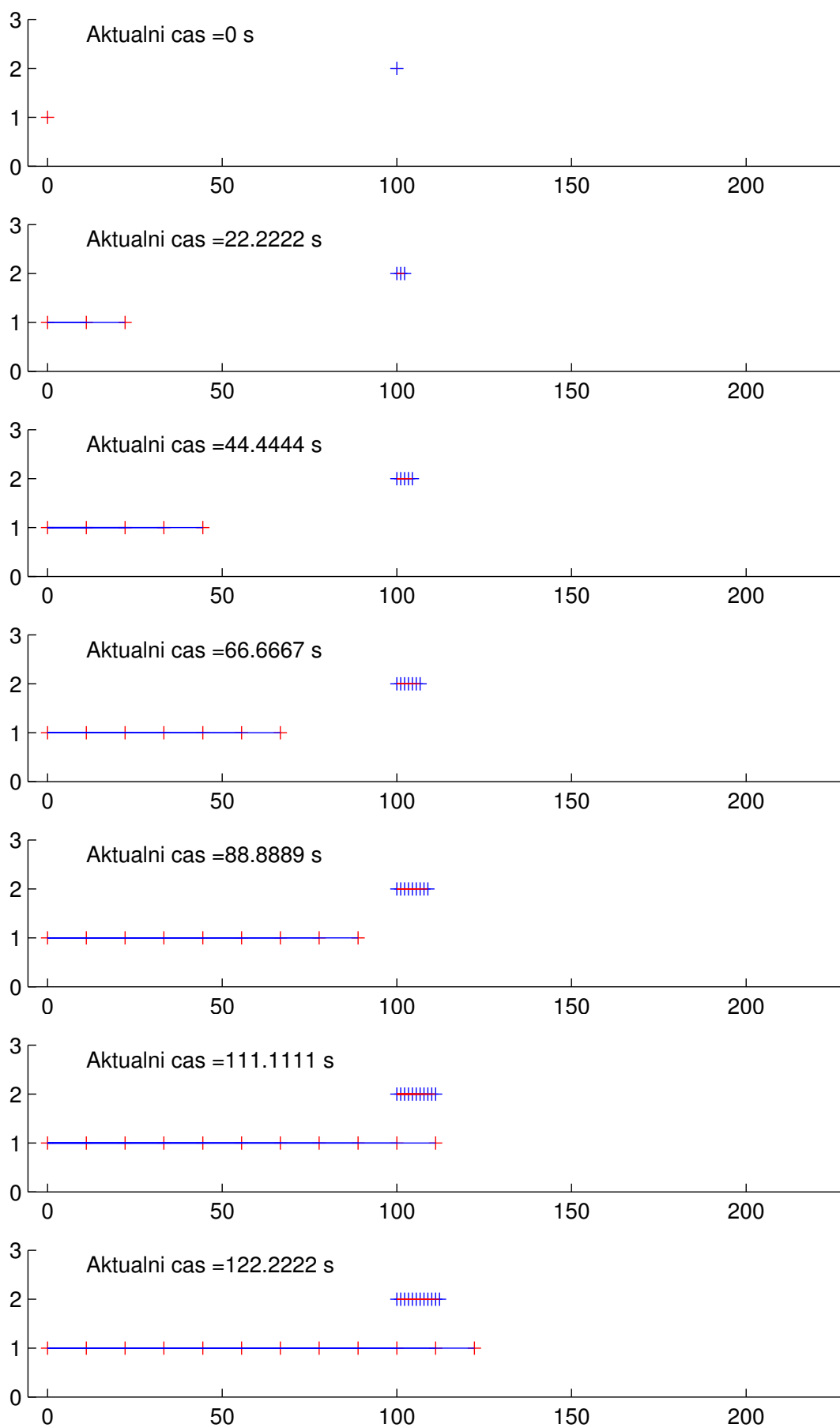
$$t = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta t_i = \sum_{i=1}^{\infty} 10^{2-i} = 100 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^i = 100 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9} = 11, \bar{1} \text{ s}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{t} = 10 \text{ m/s} \dots \text{ rychlost Achilla}$$

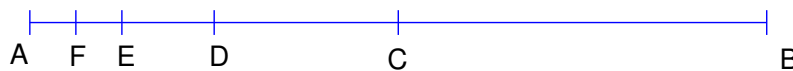
Dohoni Achilles zelvu ?

-----  
 Achilles je 10.000000 krat rychlejsi nez zelva.  
 Zelva ma naskok 100.000000 metru.  
 Rychlost zelvy je 0.100000 m/s.

Achilles dohoni zelvu v case T = 111.111111.



ad 3. Podobná myšlenka jako v 2 (součet nekonečně mnoha konečných vzdáleností nebo časových kroků může být konečný.) Řekněme, že mám dojít z místa  $A$  do  $B$  za čas  $x$  (nebo také, že vzdálenost míst  $A$  a  $B$  je  $x$ )



$$\text{Má platit: } x = x \left( \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}_{\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \right)$$

Připomeňme si pojem spojitost funkce z *Matematické analýzy*

- funkce  $f$  je spojitá na  $(a, b)$ , je-li spojitá v každém vnitřním bodě  $x_0 \in (a, b)$
- funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x_0 \in D(f)$ , když existuje  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

- definice limity funkce  $f$  v bodě  $x_0$  (Heine, Cauchy, topologická)

Máme funkci  $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  a  $x_0 \in D(f)$  je hromadný bod. Když existuje  $b \in \mathbb{R}$  tak, že  $\forall$  posloupnosti  $\{x_n\} \subset D(f)$ ,  $x_n \neq x_0$ , konvergující k číslu  $x_0$ , posloupnost  $\{f(x_n)\}$  konverguje k číslu  $b$ , říkáme je funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  limitu  $b$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ )

- definice limity posloupnosti

Posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , je konvergentní v  $\mathbb{R}$  platí-li:

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{nebo} \quad a_n \rightarrow a \right)$$

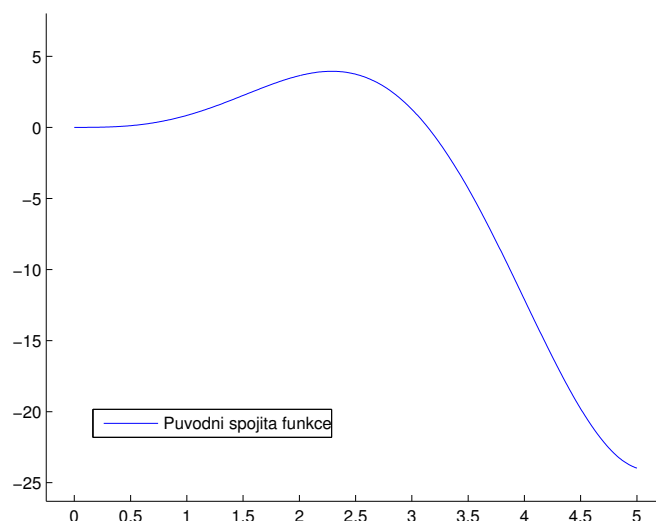
Poznámka: Ve všech definicích se objevuje pojem **nekonečna**.

- nekonečně mnoho vnitřních bodů  $x_0$  z intervalu  $(a, b)$
- $\forall$  posloupnosti  $\{x_n\}$  ... těch je nekonečně mnoho
- posloupnost má nekonečně mnoho členů

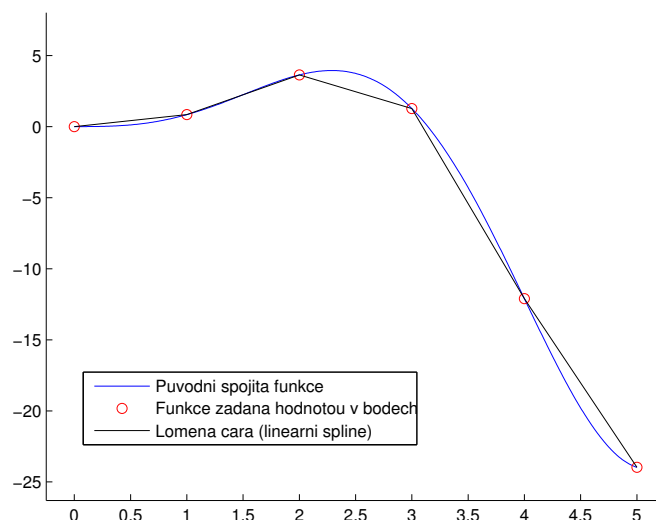
Otázka (filosofická): Skládá se vesmír z nekonečného počtu částic?

Příklad: Vykreslete například pomocí MATLABu graf funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

Např.  $f(x) = x^2 \sin x$  na  $\langle 0, 5 \rangle$



Postupujeme tak, že zvolíme konečný počet bodů z intervalu a zakreslíme jejich funkční hodnoty. Ačkoliv víme, že funkce je spojitá a můžeme v každém bodě intervalu vykreslit funkční hodnotu, nemůžeme to udělat ve všech bodech (bodů je nekonečně mnoho). Mezery mezi body vyplníme čarou - nejjednodušší je použít úsečku.



Grafem je pro nás potom lomená čára spojující funkční hodnoty ve zvolených bodech.

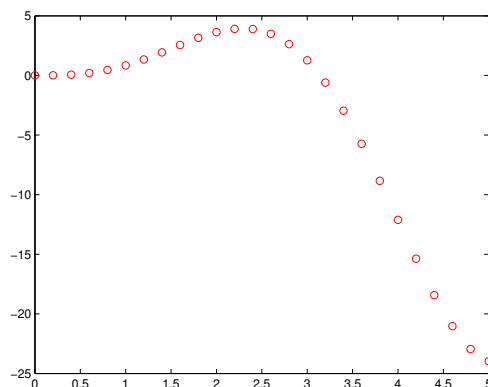
Pozn.: Pokud budu chtít vykreslit podrobněji na menším intervalu, musím na tomto intervalu zvolit více bodů.

Přesný graf je potom vlastně limitním případech, pro krok dělení (max. rozdíl 2 sousedních uzlů) jdoucí k nule.

Protože nelze graf do nekonečna zpřesňovat, jsme nuceni použít aproximaci funkce zadané tabulkou.

Zadání: Funkci  $f$  máme danou tabulkou bodů

$x_i$	.....
$f(x_i)$	.....



Naším cílem je pospojovat body pomocí nějakého jednoduchého pravidla. Toto pravidlo musíme specifikovat. Podle toho, jaké pravidlo použijí, dostanu různý přístup k aproximaci funkce.

### 1. způsob:

Nejvíce používanými funkcemi jsou asi polynomy. Řekněme, že máme tabulku s  $(n + 1)$  body pro navzájem různé argumenty. Těmito  $(n + 1)$  body pochází právě 1 polynom nejvýše  $n$ -tého stupně.

### Interpolační úloha

Body prokládáme polynomem nejnižšího možného stupně tak, aby graf těmito body přesně procházel.

Možností jak určit interpolační polynom existuje více. Nejjednodušší je asi si napsat předpis pro polynom a požadovat splnění interpolačních podmínek (potom je třeba řešit soustavu lineárních algebraických rovnic - SLAR).

Např. pro 6 zadaných bodů  $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)], [x_3, f(x_3)], [x_4, f(x_4)], [x_5, f(x_5)]$  hledáme takový polynom  $P_5(x)$  stupně nejvýše 5 tak, aby jeho graf procházel zadanými body.

$$P_5(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

Interpolační podmínky:

$$P_5(x_0) = ax_0^5 + bx_0^4 + cx_0^3 + dx_0^2 + ex_0 + f = f(x_0)$$

$$P_5(x_1) = ax_1^5 + bx_1^4 + cx_1^3 + dx_1^2 + ex_1 + f = f(x_1)$$

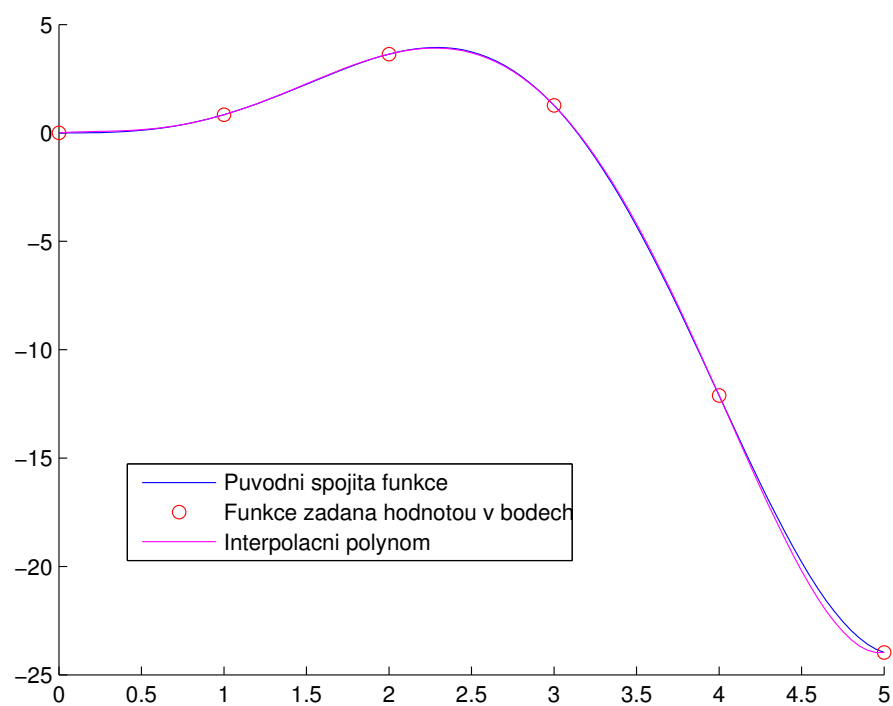
⋮

$$P_5(x_5) = ax_5^5 + bx_5^4 + cx_5^3 + dx_5^2 + ex_5 + f = f(x_5)$$



Podmínky můžeme přehledně zapsat pomocí matice a vektorů:

$$\begin{bmatrix} x_0^5 & x_0^4 & x_0^3 & x_0^2 & x_0^1 & x_0^0 \\ x_1^5 & x_1^4 & x_1^3 & x_1^2 & x_1^1 & x_1^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_5^5 & x_5^4 & x_5^3 & x_5^2 & x_5^1 & x_5^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_5) \end{bmatrix}$$



## 2. způsob:

Obdoba interpolační úlohy, ovšem nehledáme 1 polynom na celém intervalu  $\langle a, b \rangle$ , ale výslednou funkci složíme z polynomů na dílčích intervalech  $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$  a požadujeme splnění dalších podmínek, (např. spojitosti v uzlech) ... aproximace **spline funkcí**.

Lineární spline funkce ... lomená čára spojující funkční hodnoty v zadaných bodech.

Kubický spline ... funkce, která je na dílčím intervalu kubická (polynom 3 stupně), splňuje interpolační podmínky, podmínky spojitosti, spojitosti 1. derivace a spojitosti 2. derivace + další 2 podmínky.

Na vstupu:  $n + 1$  podmínek (bodů)  $\Rightarrow n$  intervalů. Polynom 3 stupně je dán 4 koeficienty.

Na výstupu: Potřebujeme  $4n$  podmínek, které určí kubický spline.

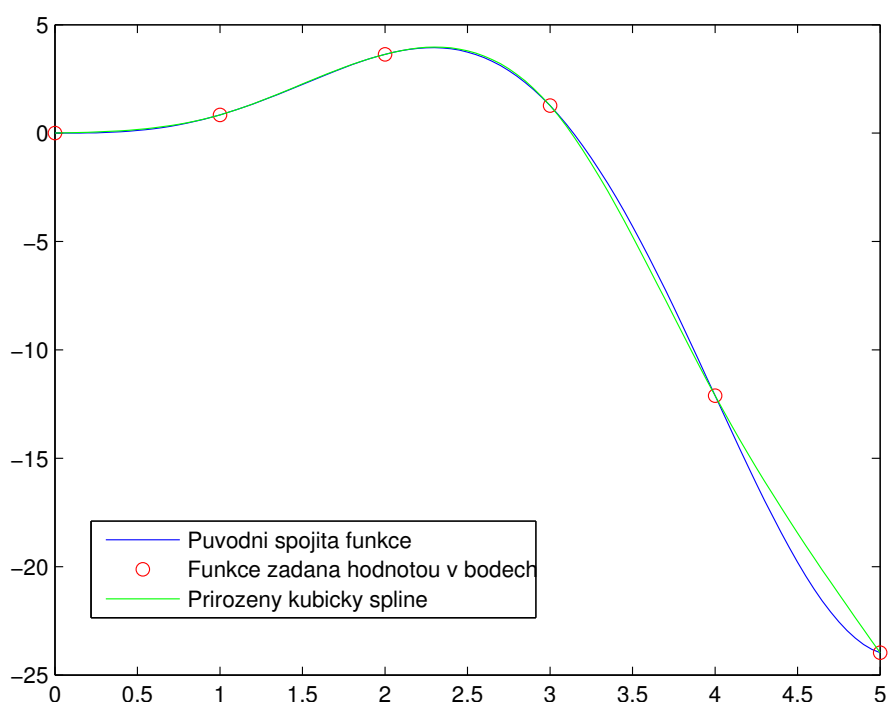
Interpolační podmínky	...	$n + 1$
Podmínky spojitosti v zadaných bodech	...	$n - 1$
Podmínky spojitosti 1. derivace	...	$n - 1$
Podmínky spojitosti 2. derivace	...	$n - 1$
<hr/>		
dohromady máme	...	$4n - 2$

Zbylé 2 podmínky můžeme doplnit například takto:

$$f'(a) = \dots; f'(b) = \dots$$

$$f''(a) = 0; f''(b) = 0$$

$$f'(a) = f'(b); f''(a) = f''(b)$$



Poznámka: V 1. i 2. způsobu předepisujeme splnění interpolačních podmínek. Ve 3. způsobu nebudeme vynucovat splnění interpolačních podmínek. Vždyť jsme se při vyčíslování hodnot  $f(x_i)$  mohli dopustit chyby.

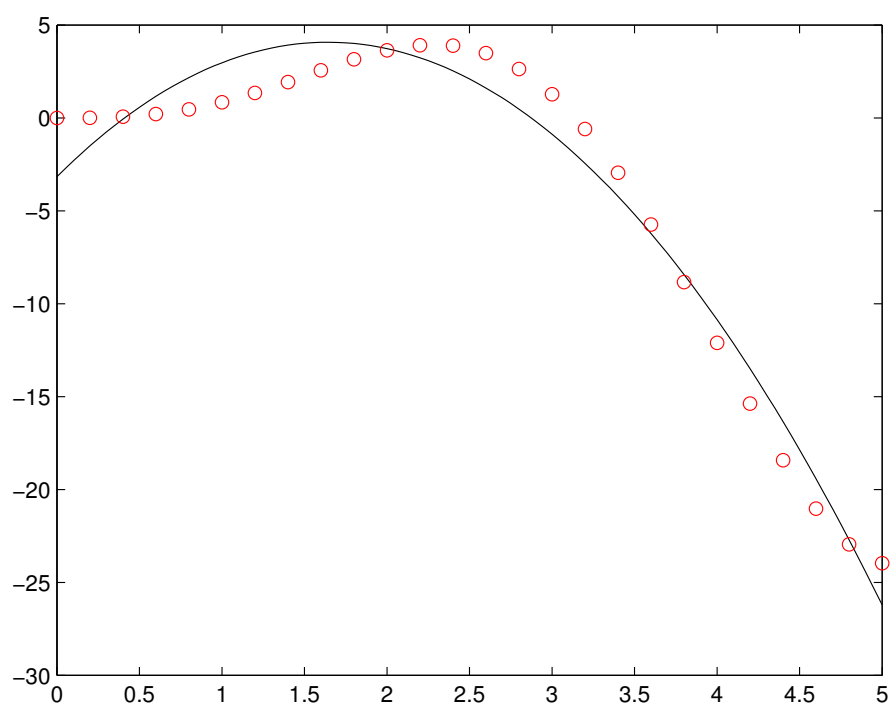
### 3. způsob:

Hledáme funkci  $\varphi$  (aproximaci funkce  $f$ ) a nepožadujeme aby procházela přesně zadanými body. Musíme odpovědět na 2 otázky:

- a) Odkud funkci  $\varphi$  vybíráme?
- b) Podle jakého kritéria ji určujeme?

ad a) Můžeme zůstat u polynomů a hledat  $\varphi$  mezi např. polynomy nejvýše 2 stupně.

ad b) Samozřejmě hledáme nějakou nejlepší aproximaci, naším cílem je minimalizovat chybu, otázka zůstává jak tu chybu měříme.



Co by šlo měřit ?

→ Vzdálenost zadaných bodů od výsledného grafu  $\varphi$

$\varphi$  by musela být hladká, abychom byli schopni v každém bodě určit normálu.

- dost složité !

→ Rozdíl funkčních hodnot (v absolutní hodnotě).

Chybová funkce  $r$  by potom byla dána:

$$r(f, \varphi) = \sum_{i=0}^n |f(x_i) - \varphi(x_i)|.$$

Naším cílem je tuto funkci minimalizovat a proto se nám nehodí, že  $r$  není hladká. Protože, kdyby byla hladká, věděli bychom že v bodě minima je nulová derivace a snadno bychom minimum našli. Pro nehladkou funkci je hledání minima složitější.

→ Pokud budeme měřit kvadrát rozdílu funkčních hodnot, bude chybová funkce hladká a minimum můžeme snadno určit z podmínky nulové derivace.

$$r(f, \varphi) = \sum_{i=0}^n (f(x_i) - \varphi(x_i))^2$$

Mluvíme o **metodě nejmenších čtverců (diskrétní  $L_2$  aproximaci)**.

Čím je tedy určena funkce  $\varphi$ ?

Pokud hledám  $\varphi$  např. mezi polynomy stupně nejvýše 2, pak hledám 3 koeficienty  $a, b, c$  v předpisu:

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c.$$

Poznámka: Pro aproximaci můžeme použít i jiné funkce, např.:  $\varphi(x) = ae^x + bx + c$ .

Nejlepší aproximaci vybíráme z prostoru těchto funkcí. Výsledná aproximace  $\varphi$  je potom jednoznačně určena koeficienty lineární kombinace.

→ Obecně tedy nejprve zvolíme systém báзовých funkcí  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ .

Hledáme koeficienty  $c_j, j \in \{1, 2, \dots, m\}$  tak, aby:

$$\varphi(x) = c_1 \cdot \varphi_1(x) + c_2 \cdot \varphi_2(x) + \dots c_m \cdot \varphi_m(x)$$

byla nejlepší aproximací.

→ Chybová funkce potom vypadá takto:

$$r(c_j) = \sum_{i=0}^n \left( f(x_i) - \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(x_i) \right)^2 \quad \dots \text{ funkce parametrů } c_j$$

→ Počet parametrů  $c_j$ , tzn. počet zvolených báзовých funkcí  $\varphi_j(x)$ , musí být nejvýše roven počtu zadaných bodů. Pokud bychom hledali  $\varphi$  jako lineární kombinaci více než  $n + 1$  báзовých funkcí, řešení by bylo nejednoznačné. Pokud je počet zadaných bodů stejný jako počet zvolených báзовých funkcí (a báзовые funkce jsou zvoleny rozumně), pak je  $L_2$  aproximace interpolací a výsledný graf  $\varphi$  prochází zadanými body.

Co tedy dostaneme jako nutné podmínky minima chybové funkce?

$$\frac{\partial r}{\partial c_k} = -2 \sum_{i=0}^n \left( f(x_i) - \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(x_i) \right) \cdot \varphi_k(x_i) = 0 \quad \text{pro } k = 1, 2, \dots, m.$$

$$\sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \varphi_k(x_i) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^m \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) c_j$$

$$\sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i) \cdot \varphi_k(x_i) \right) c_j = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \varphi_k(x_i)$$

Těchto  $m$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) rovnic můžeme zapsat pomocí matice a vektorů:

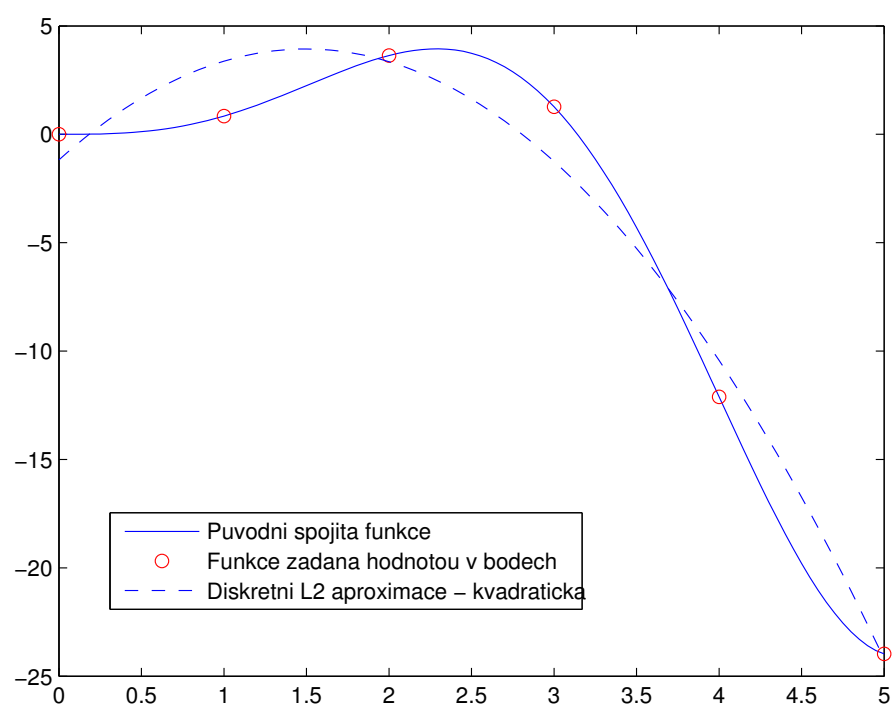
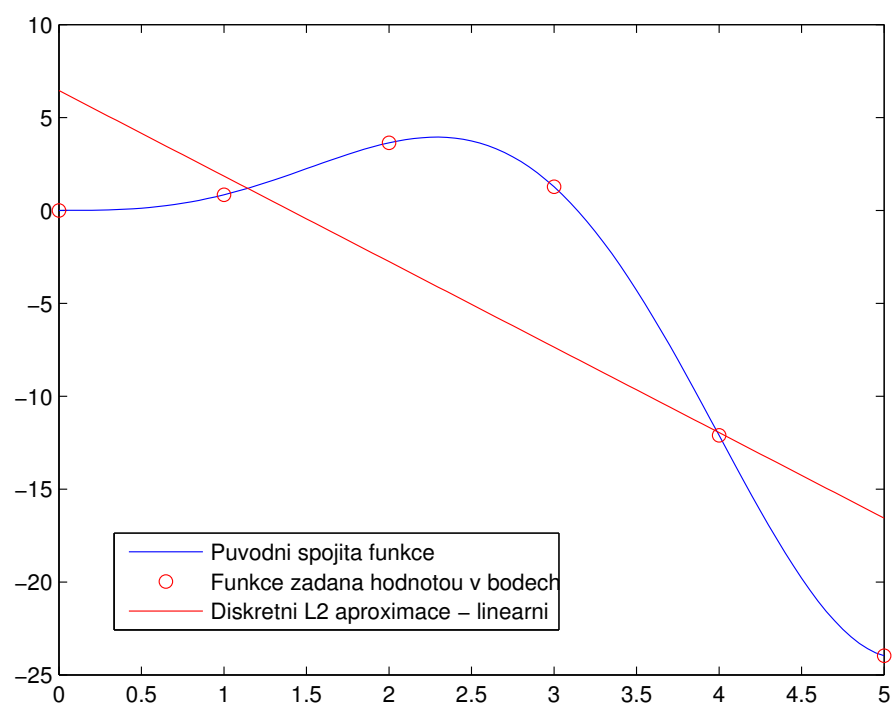
$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \dots \sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i) \cdot \varphi_k(x_i) \dots \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \varphi_k(x_i) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

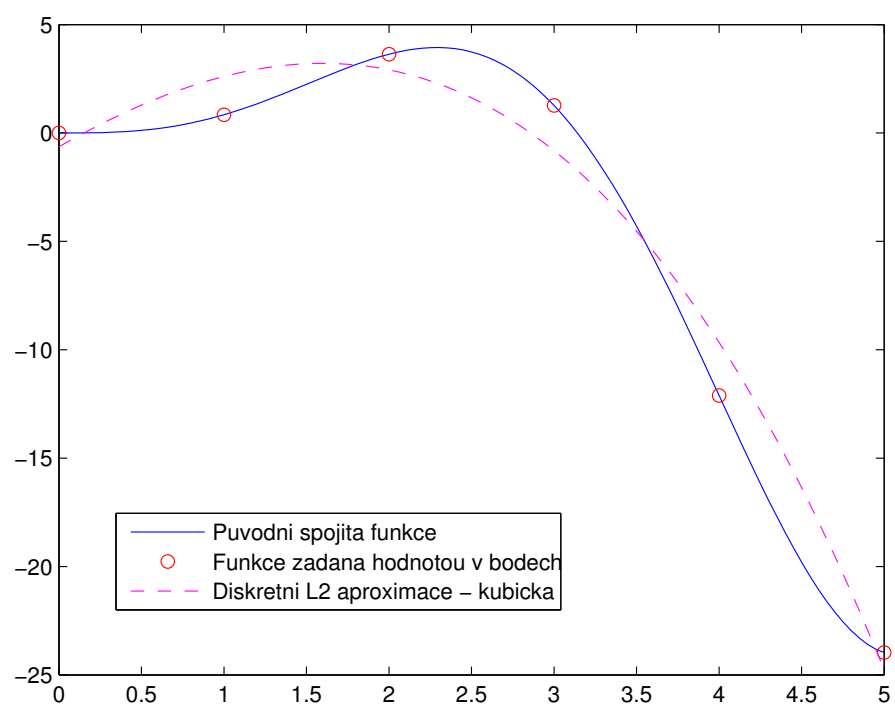
Řešíme tedy soustavu lineárních algebraických rovnic, kde

matice soustavy má v pozici  $[j, k]$  prvek  $\sum_{i=0}^n \varphi_j(x_i) \cdot \varphi_k(x_i)$ ,

na pravé straně je sloupcový vektor s  $k$ -tou složkou  $\sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot \varphi_k(x_i)$  a

hledáme sloupcový vektor neznámých koeficientů  $[c_1, c_2, \dots, c_m]^T$ .





Abychom mohli porovnat všechny použité aproximace, vykreslíme je do jednoho obrázku.

