

## Spojité x diskrétní matematika

### Spojité případy

Podívejme se na pojem **derivace funkce v bodě**. Derivace funkce vyjadřuje rychlost změny (růstu) této funkce vzhledem k nezávislé proměnné. V historii nejjednodušší představa o derivaci je: “derivace je mírou změny funkce v daném bodě”. Pro změnu hodnoty používáme symbol  $\Delta$ .

Poměr lze potom symbolicky zapsat takto:  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ .

Derivace je hodnota tohoto podílu pro  $\Delta x \rightarrow 0$  ( $\Delta x \dots$  konečné číslo).

Pokud  $\Delta x$  nahradíme nekonečně malou změnou  $dx$ , získáme definici:

$$\frac{df}{dx} \quad (\text{říkáme } df \text{ podle } dx, \text{ podíl 2 diferenciálů}).$$

Nejběžnější definice:

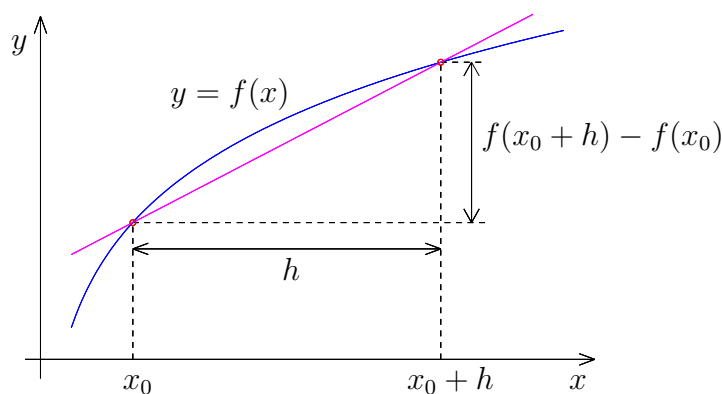
Řekneme, že funkce definovaná na okolí  $U(x_0)$  má v bodě  $x_0$  derivaci, existuje-li konečná limita:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}.$$

Této limitě říkáme **derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$** .

Geometrický význam

$\dots$  směrnice tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $x_0$



Způsoby výpočtu derivace:

1. Analyticky - Podle definice a nebo pomocí známých pravidel pro derivování s využitím tabulky s derivacemi “základních” funkcí.
2. Numericky - Aproximujeme pomocí diferenčního podílu pro zvolené malé  $h > 0$ .

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\bullet)$$

Výhody, nevýhody:

ad 1. + dostaneme přesné vyjádření derivace

– pro obecné funkce může být velmi pracné

ad 2. + snadný výpočet

– jde o aproximaci, tj. nesmíme zapomenout na chybu (chybu aproximace)

Pokud budeme chtít určit chybu aproximace, je vhodné použít Taylorovu formuli. V té se vyskytují vyšší derivace. Abychom mohli definovat 2. derivaci v bodě, musíme definovat **derivaci funkce na intervalu  $(a, b)$** :

- Má-li funkce  $f$  derivaci v každém bodě  $x \in (a, b)$ , potom funkci  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , která každému  $x \in (a, b)$  přiřazuje číslo  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ , nazýváme derivace a opět značíme  $f'(x)$ .
- Nechť je funkce  $f$  diferencovatelná v bodě  $x_0$  a na jeho okolí. Je-li navíc v bodě  $x_0$  diferencovatelná funkce  $f'$ , tj. existuje limita:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = f''(x_0),$$

pak se tato limita nazývá **druhá derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$** .

Poznámka: Když existuje  $f''(x_0)$ , potom platí:

$$f''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2}.$$

*Důkaz:*

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2}. \end{aligned}$$

Věta (Taylorova): Nechť je funkce  $f$  diferencovatelná do 2 řádu v bodě  $x_0$  a jeho okolí  $U(x_0)$ . Potom  $\forall x \in U(x_0) \exists \xi$  mezi body  $x$  a  $x_0$  tak, že platí:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{Taylorův polynom 1. stupně v bodě } x_0} + \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2}_{\text{chyba aproximace}} \quad (\star)$$

*Důkaz:* viz matematická analýza (věta o střední hodnotě).

Vztah  $(\star)$  můžeme (pro  $x = x_0 + h$ ) přepsat takto:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

Odtud jsme schopni vyjádřit chybu našeho vzorce  $(\bullet)$

$$f'(x_0)h = f(x_0 + h) - f(x_0) - \frac{f''(\xi)}{2}h^2,$$

$$f'(x_0) = \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\text{náš vzorec } Df(x_0, h)} - \underbrace{\frac{f''(\xi)}{2}h}_{\text{chyba vzorce}}.$$

Příklad:

Použijte vzorec  $Df(x_0, h)$  pro výpočet derivace funkce  $f(x) = e^x$  v bodě  $x_0 = 0$  s krokem  $h = 1$  a určete chybu aproximace.

Geometricky význam pojmu derivace funkce v bode

-----  
Derivace f(x)=exp(x) v bode x0=0.000000 (krok h=1)

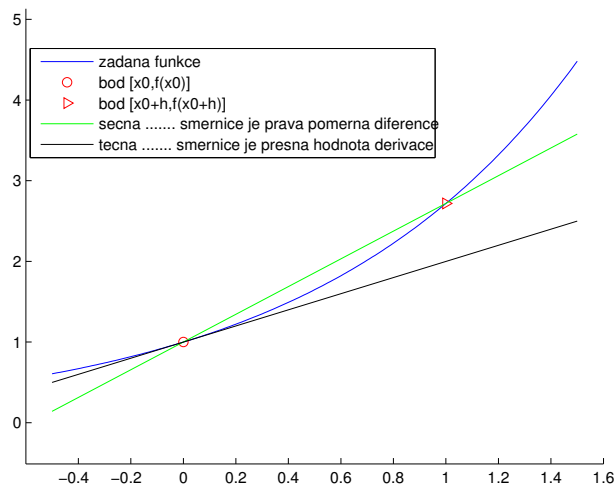
Priblizna hodnota derivace

pomoci prave pomerne difference D\_P(f,x0) = 1.718282

Presna hodnota derivace je

f'(x\_0) = 1.000000

Chyba aproximace je D\_P(f,x0) - f'(x\_0) = 0.718282



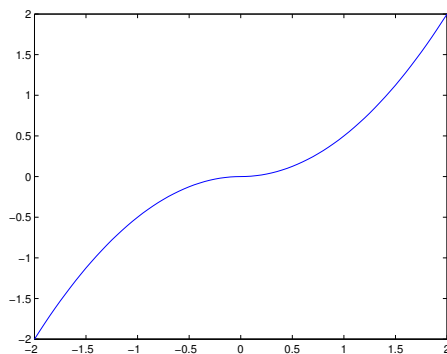
Pokud chceme odhadnout chybu vzorce pro výpočet  $f'(x_0)$  se zvoleným krokem  $h$ , musíme umět odhadnout  $f''(x_0)$  na intervalu  $(x_0, x_0 + h)$  (přesnou hodnotu  $\xi$  neznáme).

#### Poznámka:

Pokud neexistuje 2. derivace funkce  $f$  na okolí  $x_0$ , pak nelze tento postup použít.

Příkladem funkce, která je diferencovatelná na okolí bodu  $x_0 = 0$ , ale neexistuje 2. derivace v  $x_0$  je funkce

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \operatorname{sign} x.$$



Jinak zapsáno

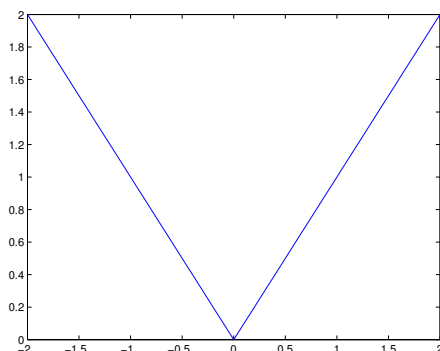
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}, & x < 0, \\ \frac{x^2}{2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Funkce  $f$  je spojitá na okolí bodu 0.

Pro derivaci  $f'$  platí:

$$f'(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$

tj.  $f'(x) = |x|$ .



Platí:

$$f'(x)|_{x=x_0+} = f'(x)|_{x=x_0-} = 0 \quad \dots \quad \text{limity zprava a zleva se rovnají}$$

$$\Rightarrow \quad \text{v bodě } x_0 = 0 \text{ existuje limita (tj. derivace)} \quad f'(x_0) = 0.$$

2. derivace  $f''$  v bodě  $x_0 = 0$  neexistuje, protože limita zprava a limita zleva nabývají různých hodnot:

$$f''(x)|_{x=x_0+} = 1, \quad f''(x)|_{x=x_0-} = -1.$$

Podívejme se na podmíněnost úlohy hledat derivaci spojité funkce v bodě  $x_0$  pomocí vzorce  $Df(x_0, h)$ .

$$f'(x_0) = \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{Df(x_0, h)} \quad - \quad \underbrace{f''(\xi) \frac{h}{2}}_{\text{chyba vzorce } r_1(h)=h \cdot c_1}$$

Idea:

Pokud budeme chtít získat přesnější výsledek, musíme zvolit menší krok  $h$  (chyba aproximace je potom menší). Pokud budeme ovšem zmenšovat krok  $h$ , budou potom při vyčíslování vzorce nastávat problémy, protože budeme dělit dvě nekonečně malá čísla (v limitě).

Uvažujme jak vypadají zaokrouhlovací chyby:

- místo přesné hodnoty  $f(x_0)$  budeme mít k dispozici přibližnou hodnotu  $\widehat{f}(x_0)$
- místo přesné hodnoty  $f(x_0 + h)$  budeme mít k dispozici přibližnou hodnotu  $\widehat{f}(x_0 + h)$

Dosazením do vzorce zjistíme, že jsme vypočetli:

$$\frac{\widehat{f}(x_0 + h) - \widehat{f}(x_0)}{h} \quad \text{místo} \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Chyba která vznikla důsledkem nepřesného vyjádření  $f(x_0)$  a  $f(x_0 + h)$  je potom rozdíl

$$\begin{aligned} r_2(h) &= \frac{\widehat{f}(x_0 + h) - \widehat{f}(x_0)}{h} - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \\ &= \frac{1}{h} \left[ (\widehat{f}(x_0 + h) - f(x_0 + h)) + (f(x_0) - \widehat{f}(x_0)) \right]. \end{aligned}$$

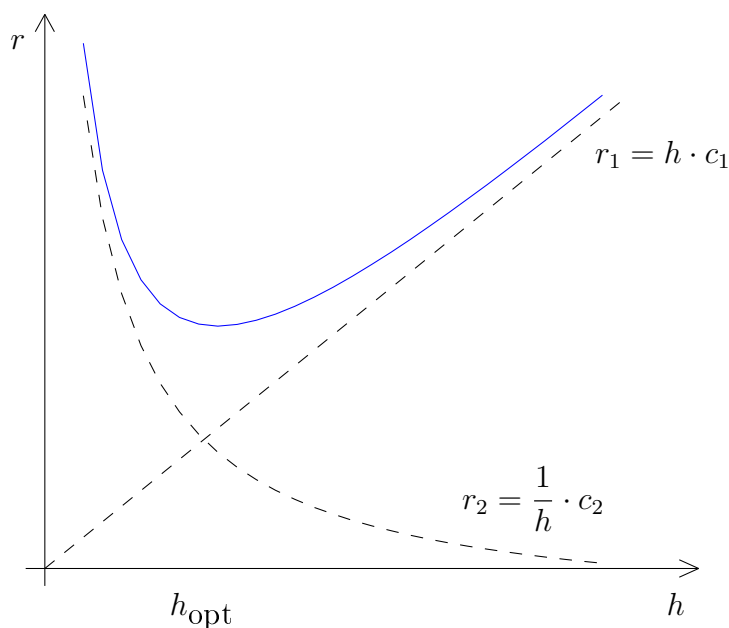
$$|r_2(h)| \leq \frac{1}{h} \cdot \left[ \underbrace{|\widehat{f}(x_0 + h) - f(x_0 + h)|}_{\sim \text{strojová přesnost } \varepsilon} + \underbrace{|f(x_0) - \widehat{f}(x_0)|}_{\sim \text{strojová přesnost } \varepsilon} \right]$$

$$|r_2(h)| \leq \frac{1}{h} \cdot c_2 \quad (c_2 = 2\varepsilon > 0).$$

Celková chyba je potom

$$r(h) = r_1(h) + r_2(h) = h \cdot c_1 + \frac{1}{h} \cdot c_2.$$

Pokud budeme chtít získat výsledek s menší chybou vzorce, musíme vzít  $h \rightarrow 0$ .



Chyba  $r(h)$  pro  $h \rightarrow 0+$  jde ale k  $+\infty$  !

Poznámka:

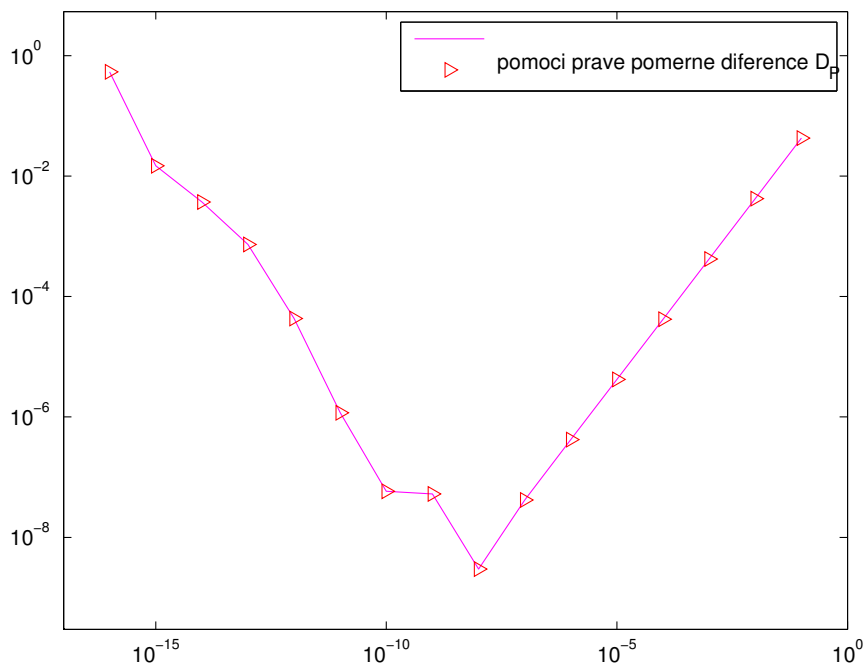
Úloha hledat derivaci spojitě funkce v bodě  $x_0$  pomocí vzorce  $Df(x_0, h)$  je **špatně podmíněná**, protože malá rel. chyba vstupních dat vyvolá velkou rel. chybu výstupních dat.

Příklad:

Vykreslete závislost chyby při použití vzorce  $Df(x_0, h)$  pro numerický výpočet derivace funkce  $f(x) = \sin x$  v bodě  $x_0 = 1$  pro kroky  $h = 10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-16}$ . Výpočet proveďte v prostředí MATLAB.

-----  
Vykresli chybu pri numerickem vypoctu derivace funkce  
f(x)=sin(x) v bode x0=1.000000 s kroky  
h=[1e-16,1e-15,1e-14,1e-13,1e-12,1e-11,1e-10,1e-09,  
1e-08,1e-07,1e-06,1e-05,0.0001,0.001,0.01,0.1]  
-----

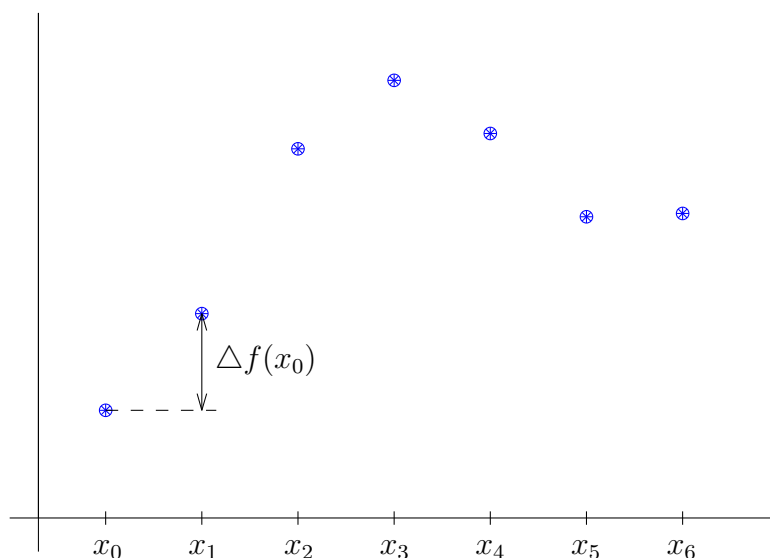
chvilku strpeni (pocitam)



## Diskrétní případ

Analogie pro funkci zadanou tabulkou:

Pro jednoduchost uvažujeme případ, kdy je dána funkce svými hodnotami v bodech:  $x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2h, x_3 = x_0 + 3h, \dots, x_n = x_0 + nh$  ( $h \dots$  krok dělení).



Pokud nás zajímá změna chování funkce při předmětu z bodu  $x_0$  do  $x_1$ , pak je vhodné definovat **první diferenci** v bodě  $x_0$ :

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Analogií 2.derivace je **druhá difference** funkce  $f$  v  $x_0$ :

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x_0) &= \Delta(\Delta f(x_0)) = \Delta(f(x_0 + h) - f(x_0)) = \\ &= (f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h)) - (f(x_0 + h) - f(x_0)) = f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0).\end{aligned}$$

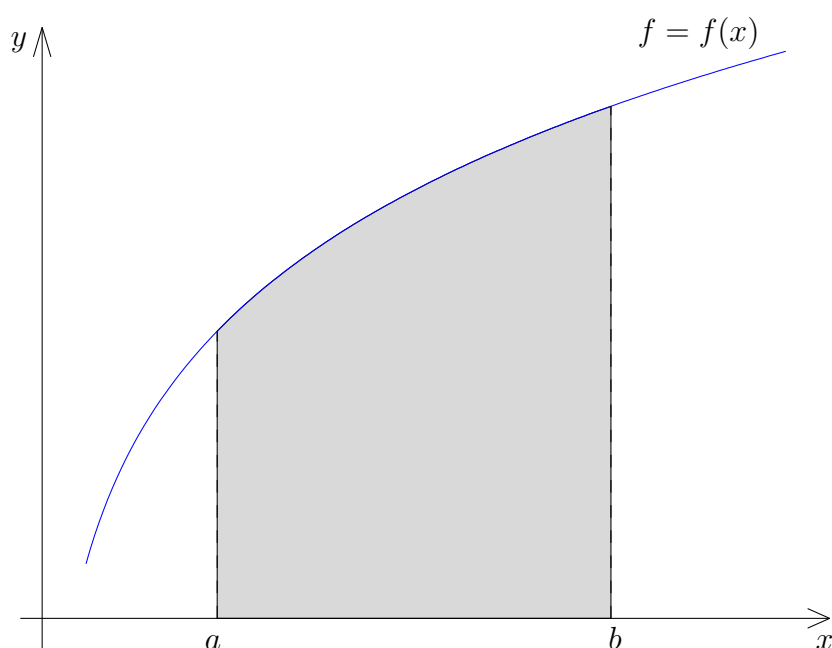
Poznámka: U numerického výpočtu derivace narazíme na problém špatné podmíněnosti. To je dáno tím, že derivace je definována jako limita podílu, kde jmenovatel jde k 0! V diskretním problému lze mluvit pouze o diferencích a ty jsou definovány jako rozdíl. Tudíž žádné problémy zde nevznikají.



Dosud jsme se věnovali pojmu derivace funkce v bodě pro spojitý případ a difference funkce pro diskrétní případ. Nyní se zaměříme na pojem určitého integrálu pro spojitý případ a sumace posloupnosti pro diskrétní případ.

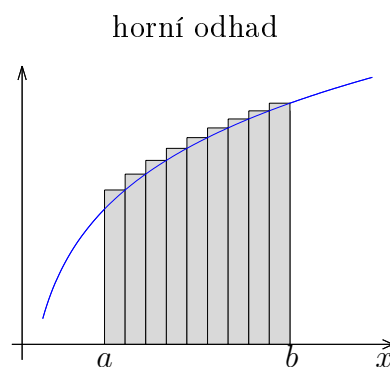
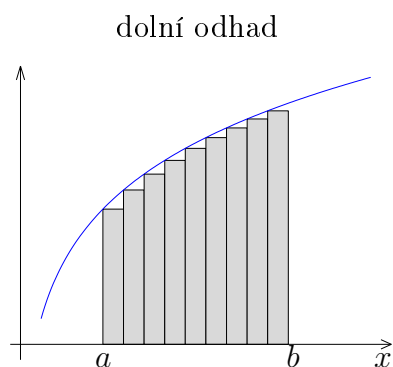
## Spojitý případ

Podívejme se na pojem **určitého integrálu** z funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Budeme mluvit o tzv. **Riemannově integrálu**. Definice vychází z intuitivní představy měření obsahu plochy pod grafem funkce.



Při odvození opět postupujeme tak, že vycházíme z konečného počtu dílků, které neustále zmenšujeme a určitý integrál je pak limitním případem nějakého součtu.

Zavádíme dolní odhad a horní odhad, které získáme tak, že vyplňujeme vnitřek plochy a obrazec tak, aby obsahoval danou plochu.



Pro vyplňování používáme obdélníky se stranami rovnoběžnými se souřadnými osami.

Definice:

- $D$  ... dělení intervalu  $(a, b)$   
 $n$ -tice  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tak, že  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

- Horní součet pro  $f$  a  $D$

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^n \sup_{x \in (x_{i-1}, x_i)} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

- Horní Riemannův integrál funkce  $f$  od  $a$  do  $b$

$$(\text{HR}) \quad \int_a^b f(x) \, dx = \inf \{S(f, D), D \dots \text{dělení } (a, b)\}$$

- Dolní součet pro  $f$  od  $D$

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^n \inf_{x \in (x_{i-1}, x_i)} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

- Dolní Riemannův integrál funkce  $f$  od  $a$  do  $b$

$$(\text{DR}) \quad \int_a^b f(x) \, dx = \sup \{s(f, D), D \dots \text{dělení } (a, b)\}$$

Pokud se Dolní a Horní Riemannův integrál rovnají, nazýváme jej **Riemannovým integrálem** funkce  $f$  od  $a$  do  $b$ .

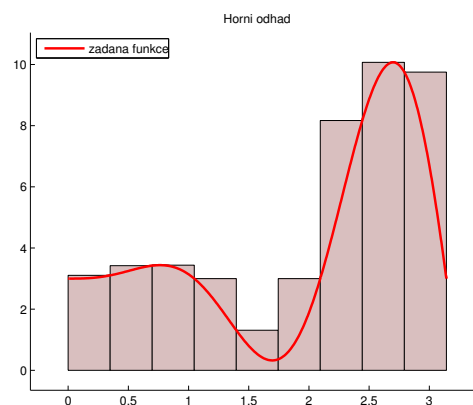
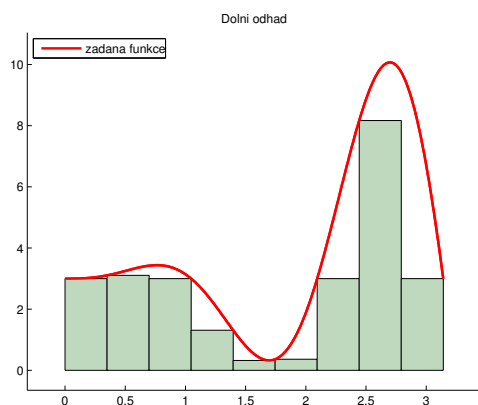
Příklad:

Vypočtěte dolní a horní součty pro funkci  $f(x) = x^2 \sin 3x + 3$  na intervalu  $(0, \pi)$  pro počet rovnoměrného dělení intervalu 9, 20 a 50.

### Geometricky vyznam urciteho integralu

-----  
Integrujeme funkci  $f(x) = x^2 \sin(3x) + 3$   
na intervalu  $\langle 0.000000, 3.141593 \rangle$ .  
Interval delime na 9 casti.

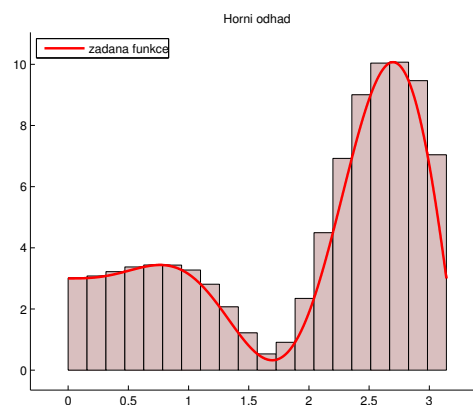
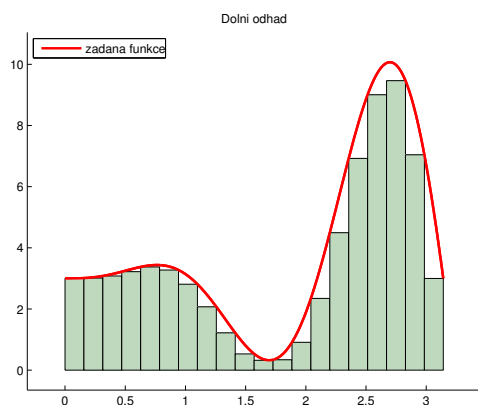
Presna hodnota integralu je ... 12.566498  
Dolni odhad integralu je ... 8.822230  
Horni odhad integralu je ... 15.802981



### Geometricky vyznam urciteho integralu

-----  
Integrujeme funkci  $f(x) = x^2 \sin(3x) + 3$   
na intervalu  $\langle 0.000000, 3.141593 \rangle$ .  
Interval delime na 20 casti.

Presna hodnota integralu je ... 12.566498  
Dolni odhad integralu je ... 10.910270  
Horni odhad integralu je ... 14.102775



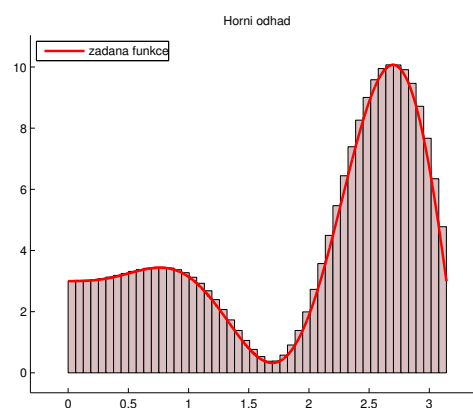
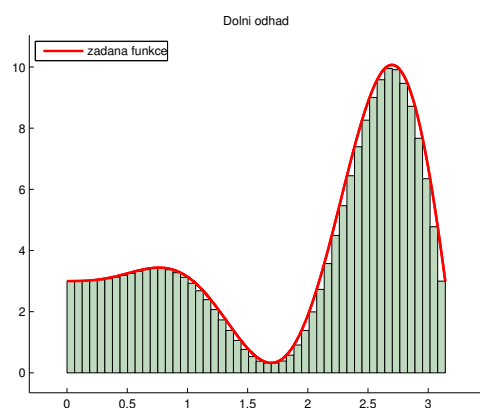
## Geometricky význam určitého integrálu

-----  
Integrujeme funkci  $f(x) = x^2 \sin(3x) + 3$   
na intervalu  $\langle 0.000000, 3.141593 \rangle$ .  
Interval delíme na 50 částí.

Presná hodnota integrálu je ... 12.566498

Dolní odhad integrálu je ... 11.916863

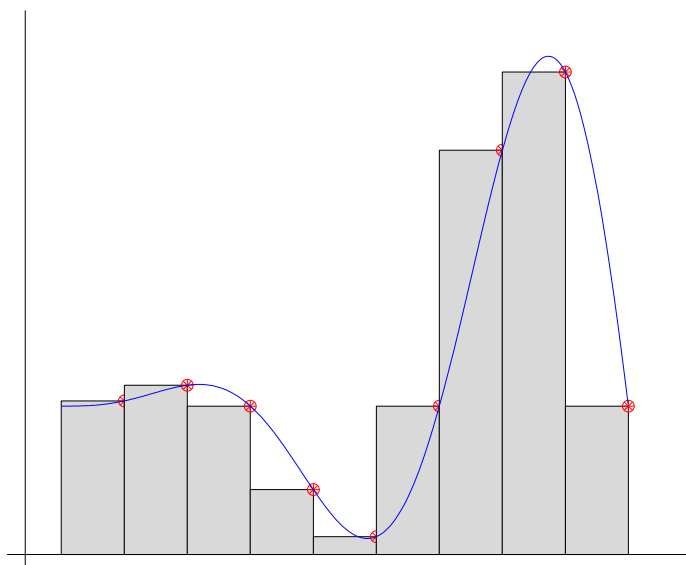
Horní odhad integrálu je ... 13.196682



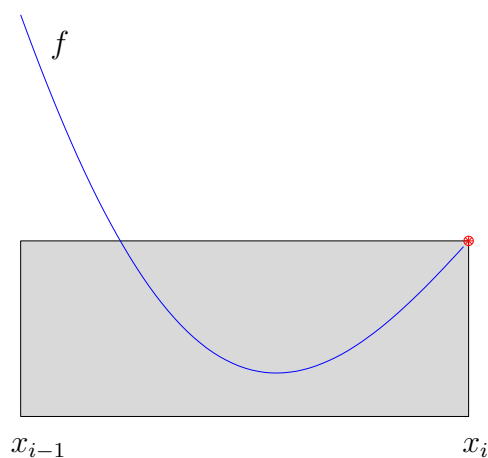
Podívejme se opět na způsob numerického výpočtu hodnoty určitého integrálu (stejná myšlenka jako v definici).

Uvažujme například vzorec:

$$\int_a^b f(x) \, dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$



Pokud nás zajímá chyba takového vzorce, musíme uvažovat funkce  $f$ , které jsou diferencovatelné. Na dílčím intervalu  $(x_{i-1}, x_i)$  potom dostáváme



Pro odvození chyby aproximace opět použijeme Taylorův rozvoj:

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i) \cdot f'(\xi_i), \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

Po integraci odvodíme chybu našeho vzorce:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = f(x_i)h_i + \frac{1}{2} \left[ \underbrace{(x_i - x_i)^2}_{=0} - \underbrace{(x_{i-1} - x_i)^2}_{h_i^2} \right] f'(\xi_i) = f(x_i)h_i - \frac{1}{2} h_i^2 f'(\xi_i).$$

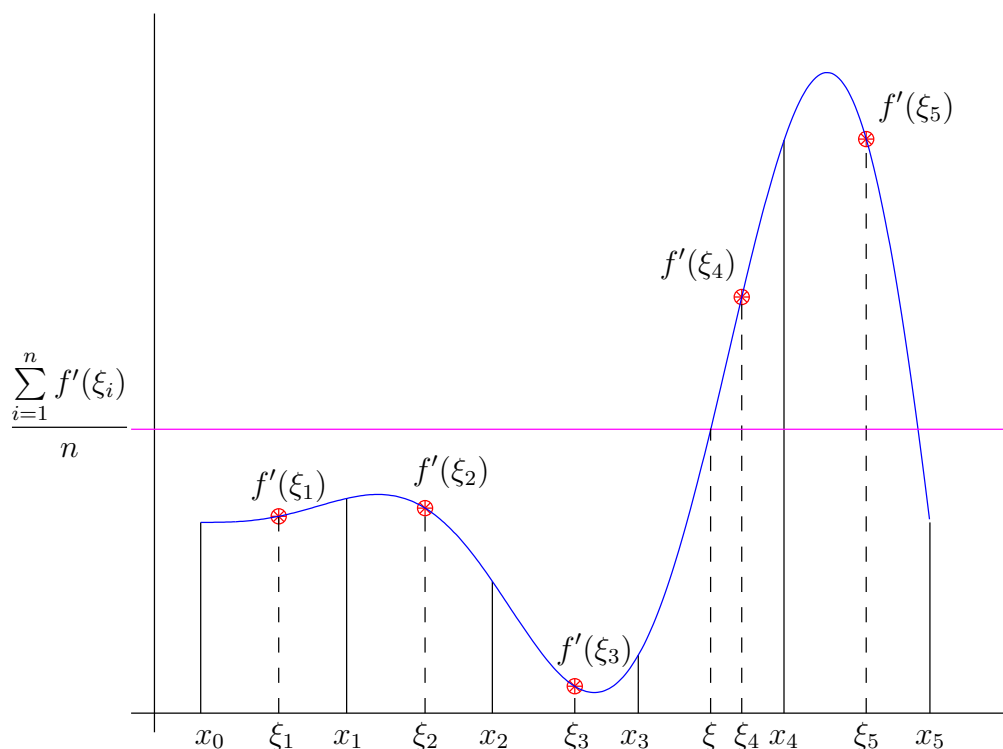
Po sečtení přes všechny dílčí intervaly:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left[ f(x_i)h_i - \frac{1}{2} h_i^2 f'(\xi_i) \right] = \underbrace{\sum_{i=1}^n f(x_i)h_i}_{\text{naš vzorec}} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_i^2 f'(\xi_i)}_{\text{chyba vzorce}}.$$

Výraz pro chybu ještě zjednodušíme.

Předpokládejme, že je  $f'(x)$  spojitá a krok  $h$  je ekvidistantní, tj.  $\forall i : h_i = h$ .

$$\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2} h_i^2 f'(\xi_i) = -\frac{1}{2} h^2 \sum_{i=1}^n f'(\xi_i).$$



Průměr hodnot leží mezi minimální a maximální hodnotou

$$\min_i f'(\xi_i) \leq \frac{\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)}{n} \leq \max_i f'(\xi_i)$$

Ze spojitosti  $f'(x) \Rightarrow$

$$\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)}{n}$$

Pro chybu potom dostaneme

$$-\frac{1}{2} h^2 \sum_{i=1}^n f'(\xi_i) = -\frac{1}{2} h^2 n f'(\xi) = -\frac{1}{2} h^2 \frac{b-a}{h} f'(\xi) = \underbrace{-\frac{1}{2} (b-a) f'(\xi)}_c h.$$

Pro ekvidistantní krok  $h$  dostaneme:

$$\int_a^b f(x) dx = h \sum_{i=1}^n f(x_i) - c h.$$

Poznámka:

Úloha numerického výpočtu určitého integrálu je dobře podmíněná (narozdíl od numerického derivování).

## Diskrétní případ

Tak jako derivaci funkce odpovídá pojem difference posloupnosti, tak určitému integrálu odpovídá **sumace posloupnosti**.

Definice:

Říkáme, že posloupnost  $\{b_n\}$  je sumací posloupnosti  $\{a_n\}$ , platí-li

$$a_n = \Delta b_n \quad \forall n = 0, 1, \dots$$

Píšeme:

$$b_n = \Delta^{-1} a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \Delta b_n.$$

Příklad: Najděte sumaci posloupnosti  $f(x_n) = n$ .

Zadaná posloupnost je polynom prvního stupně, sumací musí být polynom 2. stupně, tj.:

$$\Delta^{-1}n = an^2 + bn + c.$$

Koeficienty  $a, b, c$  stanovíme z podmínky:

$$\Delta(an^2 + bn + c) = n.$$

$$\begin{aligned}\Delta(an^2 + bn + c) &= a\Delta n^2 + b\Delta n + c\Delta 1 = \\ &= a((n+1)^2 - n^2) + b((n+1) - n) + c \cdot 0 = 2an + a + b = n + 0.\end{aligned}$$

Platí, pokud

$$2a = 1 \quad \text{a} \quad a + b = 0.$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{a} \quad b = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Závěr:} \quad \Delta^{-1}n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + c.$$

Poznámka:

Pojem sumace má význam při stanovení součtu  $s_n$  prvních  $n+1$  členů posloupnosti  $\{a_n\}$ .

Posloupnost částečných součtů:  $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$

$$\Rightarrow s_{n+1} = a_0 + a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}$$

$$\Delta s_n = s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$$

$$\Rightarrow \underline{s_n = \Delta^{-1}a_{n+1}}$$