

MOTIVACE

Připomeňme si na úvod některé základní úlohy z oblasti elektrotechniky, při jejichž studiu a řešení narazíme na nutnost vypořádat se s jednoduššími matematickými problémy, které se řeší pomocí různých numerických metod.

Tento krátký text jsem doplnil na základě připomínek *některých* studentů, kteří tento předmět absolvovali v minulých letech. Mým cílem je vyvrátit jejich názor, že pro ně předmět KMA/SNU nepřináší žádný užitek.

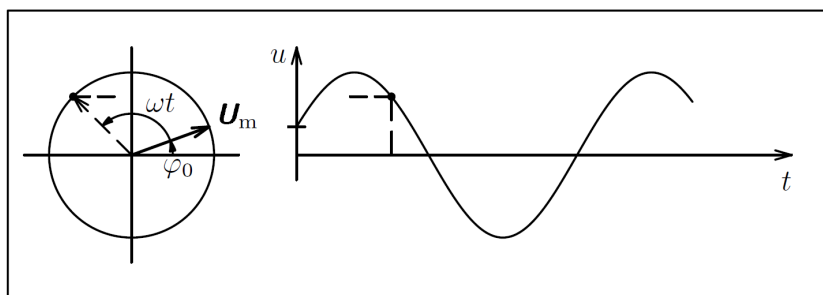
Stále si myslím, že by každý absolvent elektrotechnické fakulty měl mít alespoň základní představu o následujících úlohách včetně způsobu jakým se dají řešit. Současně by měl být schopen použít poskytnuté triviální nástroje na vyřešení dílčích úkolů.

RLC obvody

RLC obvody jsou obvody, které jsou připojeny ke zdroji střídavého napětí a které jsou obecně tvořeny *rezistorem* o odporu R , ideální *cívkou* s indukčností L a ideálním *kondenzátorem* s kapacitou C .

Definice: Fázor (časový vektor) $\mathbf{U}_m$ harmonicky kmitajícího napětí určuje svou velikostí amplitudu kmitů U_m a svým směrem jejich počáteční fázi φ_0 . Začne-li se v čase $t = 0$ fázor napětí otáčet v kladném smyslu úhlovou rychlostí ω , bude svislá souřadnice fázoru rovna okamžité hodnotě napětí

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_0).$$



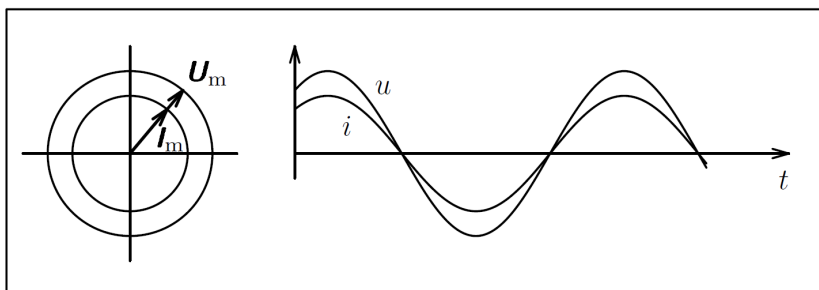
Stejným způsobem definujeme fázor proudu $\mathbf{I}_m$.

Připomeňme si nejprve, jak vypadají fázorové diagramy jednoduchých obvodů střídavého proudu s rezistorem, kondenzátorem a cívkou.

V obvodu s ideálním rezistorem je vztah mezi napětím a proudem vyjádřen *Ohmovým zákonem*

$$\frac{u}{i} = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = R = \textit{konst.} \quad (1)$$

Fázor napětí a fázor proudu mají stejný směr.



V obvodu s ideálním kondenzátorem je okamžitý náboj na deskách kondenzátoru přímo úměrný okamžitému napětí

$$q = Cu$$

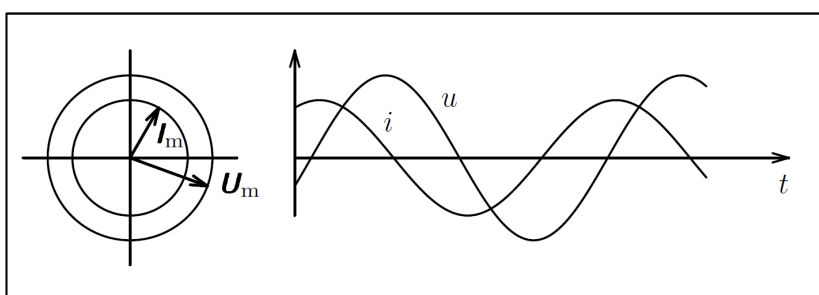
a okamžitý proud určíme ze vztahu

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}. \quad (2)$$

Jestliže okamžitá hodnota napětí je $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_0)$, pak

$$i = \omega C U_m \cos(\omega t + \varphi_0) = I_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

V obvodu s kondenzátorem předbíhá proud před napětím o čtvrtinu periody, fázově o $\frac{\pi}{2}$. Fázory obou veličin jsou navzájem kolmé.



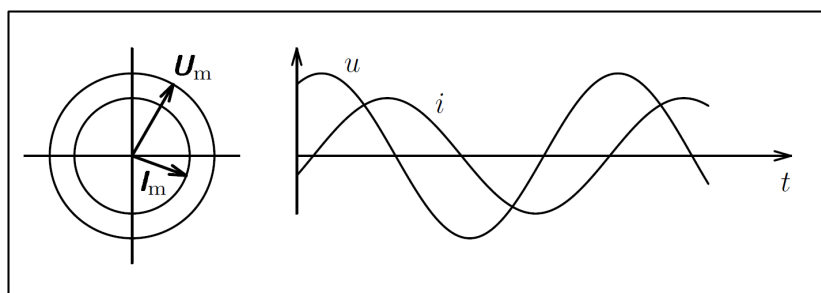
V obvodu s ideální cívkou platí *zákon elektromagnetické indukce* ve tvaru

$$u = L \frac{di}{dt}. \quad (3)$$

Jestliže okamžitá hodnota proudu je $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_0)$, pak

$$u = \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi_0) = U_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

V obvodu s cívkou je proud opožděn za napětím o čtvrtinu periody, fázově o $\frac{\pi}{2}$. Fázory obou veličin jsou navzájem kolmé.

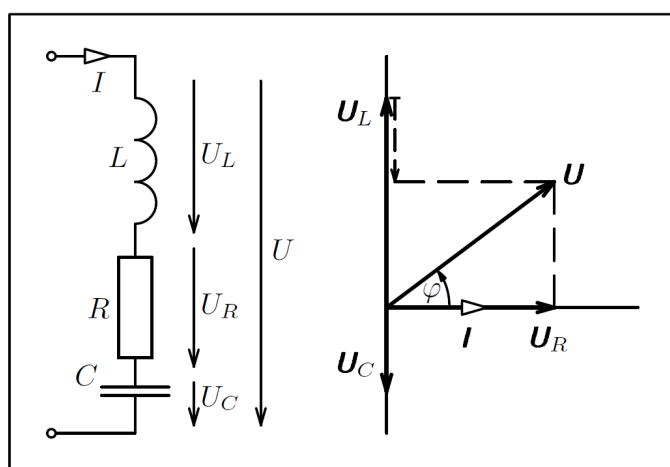


Podle způsobu zapojení jednotlivých prvků můžeme uvažovat dva základní modely.

V **sériovém obvodu**, kdy jsou řazeny jednotlivé prvky za sebou, prochází jednotlivými prvky stejný proud, ale napětí na prvcích se liší jak hodnotou tak i vzájemnou fází.

V **paralelním obvodu**, kdy jsou prvky řazeny vedle sebe, je na prvcích stejné napětí, ale procházejí jimi různé proudy.

Příklad: Vyšetřete odezvu proudu (přechodový jev) sériového obvodu RLC. Parametry obvodu jsou $R = 1 \text{ } [\Omega]$, $L = 1 \text{ } [\text{H}]$, $C = 1 \text{ } [\text{F}]$, $u_C(0) = 0 \text{ } [\text{V}]$, $i(0) = 1 \text{ } [\text{A}]$ a $u_0(t) = 0 \text{ } [\text{V}]$.



Řešení:

Pro spojitě napětí zdroje $u_0(t)$ je odezva proudu také spojitá a platí pro ni následující integrodiferenciální rovnice, jejíž tvar je důsledkem vztahů (1), (2) a (3),

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi + u_C(0) = u_0(t). \quad (4)$$

Derivováním rovnice a vydělením L získáme obyčejnou diferenciální rovnici druhého řádu

$$i''(t) + \frac{R}{L}i'(t) + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{1}{L}u_0(t). \quad (5)$$

V našem případě hledáme pouze řešení homogenní rovnice neboť jsme předpokládali $u_0(t) = 0$.

Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

a pro její kořeny platí

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}.$$

Po dosazení zadaných parametrů dostaneme

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Obečné řešení rovnice (5) má potom tvar

$$i(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right), \quad (6)$$

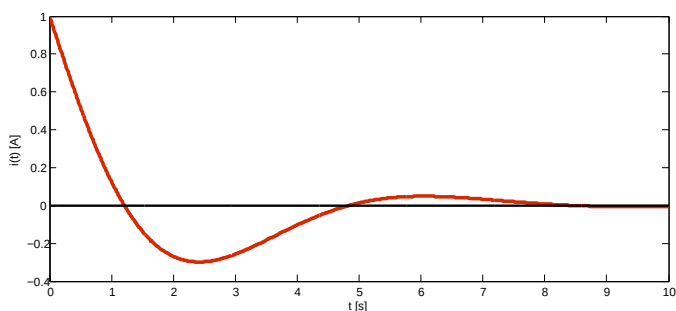
kde A a B jsou libovolné konstanty. Pro určení těchto konstant je nutné zjistit druhou počáteční podmínku, vyjděme z rovnice (4) splněné v čase $t = 0$, dostaneme

$$Li'(0) + Ri(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad i'(0) = -\frac{R}{L}i(0).$$

Dvě počáteční podmínky mají potom tvar $i(0) = 1$ a $i'(0) = -1$. Porovnáním těchto podmínek se vztahem (6) získáme hodnoty parametrů $A = 1$ a $B = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

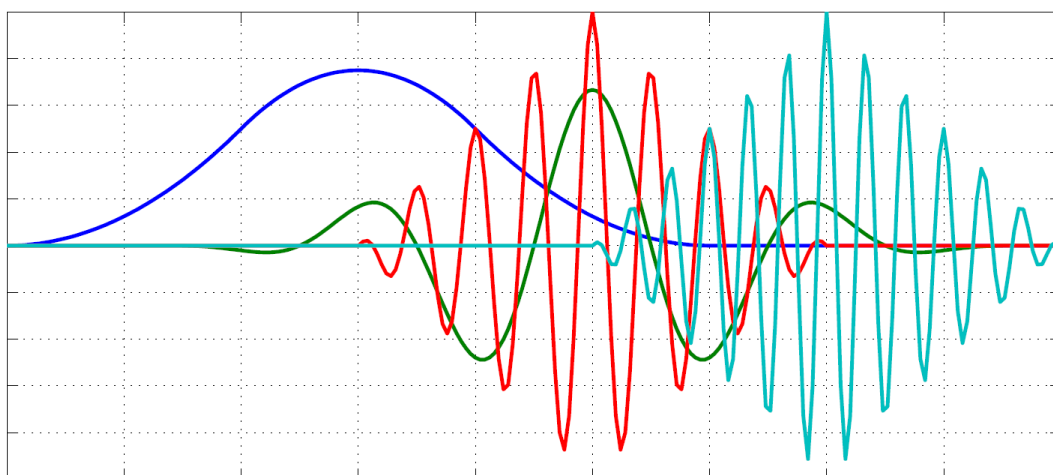
Průběh proudu je dán vztahem

$$i(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right).$$



Zpracování signálu, analýza dat

Další oblastí elektrotechniky, ve které jsou důležité znalosti numerické matematiky, je zpracování a analýza signálu. Například v digitálních multimetrech se používá převod analogové měřené veličiny na digitální signál. Stále častěji se převádějí na čísla okamžité hodnoty časově proměnné měřené veličiny, které se potom digitálně zpracovávají např. formou číslicové filtrace nebo rychlou Fourierovou transformací. Můžeme tak v reálném čase určovat spektrum signálu, můžeme z něj vybírat jeho některé složky. Digitalizace spočívá ve vzorkování v čase, kvantování v úrovni a kódování (vyjádření čísel v určitém kódu). Provádí se kromě oblasti měření při digitalizaci zvukového a obrazového signálu.



Jedním z mnoha případů, kde se využívá zpracování dat je vyšetření pomocí magnetické rezonance.



Maxwellovy rovnice, elektromagnetické vlnění

Maxwellovy rovnice jsou základní zákony v makroskopické teorii elektromagnetického pole, které zformuloval James Clerk Maxwell v roce 1865. Lze je zapsat buď v integrálním nebo diferenciálním tvaru. V integrálním tvaru popisují elektromagnetické pole v jisté oblasti, kdežto v diferenciálním tvaru v určitém bodu této oblasti. Připomeňme si vztahy pro elektromagnetické pole v diferenciálním tvaru.

V rovnicích vystupují čtyři základní veličiny:

- intenzita elektrického pole $\vec{E}$
- elektrická indukce $\vec{D}$
- magnetická indukce $\vec{B}$
- intenzita magnetického pole $\vec{H}$

Tyto veličiny spolu úzce souvisí, proto doplníme tzv. materiálové vztahy, které pro izotropní prostředí mají tvar

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \text{ kde } \varepsilon \text{ je permitivita prostředí,}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \text{ kde } \mu \text{ je permeabilita prostředí.}$$

Dále zde vystupují veličiny hustota náboje ϱ a proudová hustota $\vec{i}$.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varrho$$

Gaussův zákon elektrostatiky

(zdrojem elektrických polí jsou elektrické náboje)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Gaussův zákon magnetostatiky

(magnetické pole nemá žádné zdroje, neexistuje magnetický monopol)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

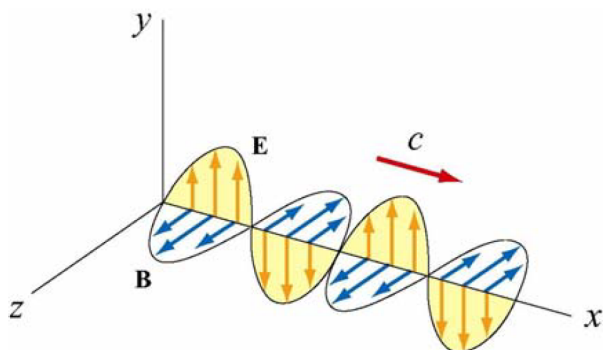
Faradayův indukční zákon

(víry elektrického pole vznikají tam, kde se magnetické pole mění s časem)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Obecný Ampérův zákon

(víry magnetického pole vznikají tam, kde teče elektrický proud, nebo tam, kde se mění elektrické pole s časem)



Jaké jsou souvislosti ?

Z uvedeného přehledu je zřejmé, že jsou vztahy mezi zkoumanými veličinami popsány pomocí obyčejných nebo parciálních diferenciálních rovnic.

Při řešení RLC obvodů nás zajímala odezva proudu v čase, doplnili jsme počáteční podmínky a získali tak počáteční úlohu pro obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu.

Výpočetní metody na řešení takovýchto problémů jsou založeny buď na numerickém výpočtu **derivace** nebo hodnoty **určitého integrálu**.

Při řešení problémů v elektromagnetickém poli jsou závislosti popsány parciálními diferenciálními rovnicemi. K nim je třeba doplnit okrajové a příp. počáteční podmínky a obdržíme okrajovou resp. počátečně-okrajovou úlohu pro soustavu parciálních diferenciálních rovnic.

Numerické metody jsou zde založeny na diskretizaci prostorové proměnné a hledanou aproximaci ve finále určíme řešením **soustavy lineárních algebraických rovnic**.

Problematika zpracování signálu obecně patří mezi hledání **aproximace funkce** a to v různých podobách, např. jako **interpolace** nebo **L_2 -aproximace**. Samostatnou kapitolou je pak pro periodické funkce **Fourierova analýza**.

Významnou roli např. při studiu rezonance hrají také **vlastní čísla** a **vlastní vektory**.

Při řešení nelineárních úloh používáme přibližné metody založené na postupných iteracích, jejichž idea vychází z metody prosté iterace. Řada metod je založena na linearizaci problémů. Základem těchto metod je potom Newtonova metoda. Tyto fundamentální principy je nejjednodušší pochopit na metodách určených pro hledání **řešení nelineární rovnice**.

Cílem předmětu je získat elementární představu o tom,
jak se dají výše zmíněné dílčí úlohy přibližně řešit.