

1. Písemná práce z M4E

Jméno a příjmení:

Osobní číslo: Nick:

Příklad 1.

Pomocí **Gaussovy eliminační metody** a **Gaussovy eliminační metody se sloupcovou pivotací** řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p^2 & p & 1 & 0 \\ p & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & p \\ 0 & 1 & p & p^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

pro hodnoty parametru $p = 0, \frac{1}{2}, 1$ a 100 .

Vypište a porovnejte výsledky získané oběma metodami pro všechny hodnoty parametru p . Vysvětlete případné rozdíly ve výsledcích.

Pro každou hodnotu parametru p vypočítejte přesné řešení soustavy a určete číslo podmíněnosti matice $\mathbf{A}$. [10 b.]

Příklad 2.

Nalezněte řešení nelineární rovnice

$$x \cos(x) + e^{\sin(x)} = 0$$

pomocí **Newtonovy metody**, **modifikované Newtonovy metody** a **metody sečen**. Volte počáteční aproximaci $x_0 = 4$ a pro metodu sečen navíc $x_1 = 3$. Toleranci pro zastavení zvolte $\varepsilon = 10^{-4}$. Jaké řešení nalezne metoda sečen pokud zaměníme počáteční dvě aproximace? Pro každou z metod vypište poslední 3 iterace, celkový počet iterací, okomentujte konvergenci posloupnosti získaných iterací a načrtněte obrázky. [10 b.]

Příklad 3.

Pomocí iteračních metod (**Jacobiova**, **Gauss-Seidelova** a **SOR**) řešte soustavu lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Počáteční aproximaci volte $\mathbf{x}_0 = [0, 0, 0]^T$ a pro metodu SOR použijte parametr $\omega = 0.8$ a $\omega = 1.1$. Zastavovací podmínku použijte ve tvaru $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|_2 \leq 10^{-3}$.

Vypište výsledky získané jednotlivými metodami a zhodnoťte je.

Která metoda konvergovala nejrychleji a která nejpomaleji?

Kolik iterací by bylo potřeba pro každou z uvedených metod, aby se výpočet ukončil při použití zastavovací podmínky ve tvaru $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|_\infty \leq 10^{-3}$? [10 b.]