

Obyčejné diferenciální rovnice (ODR)

- Co to je? Můžeme najít nerušenou funkci $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která na zadaném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ splňuje rovnost, ve které se vyskytnou derivace této funkce ($y', y'', y''', \dots$)
- $y = y(t)$ řešení ODR
- řád ODR ... řád nejvyšší derivace

Příklady

- $y'(t) = \cos t, t \geq 0$
ODR 1. řádu
- $y'(t) = -2y(t), t \in \mathbb{R} = I$
ODR 1. řádu
- $y''(t) + y'(t) = e^{4t}, t \in \mathbb{R} = I$
ODR 2. řádu

$$y' = \cos t$$

~~$$y' = \cos$$~~

$$y' = -2y$$

$$y'' + y' = e^{4t}$$

Poznámky: V praxi se často:

- vychází se z parametru t a intervalu I



- derivace se značí různě

$$y'(t), \dot{y}(t), \frac{dy}{dt}, y''(t), \ddot{y}(t), \frac{d^2 y}{dt^2}, \dots$$

- nerušená funkce (řešení) se značí různě

$$y(t), y(x), i(t), u(t), \dots$$

Nejprve se budeme zabývat ODR 1. řádu ve tvaru:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in I.$$

Dáno: f a $I \subset \mathbb{R}$

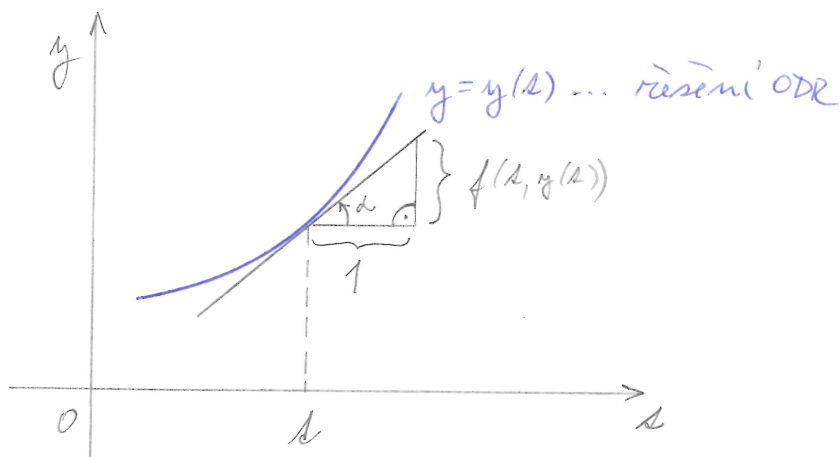
Hledáme: $y: I \rightarrow \mathbb{R}$

Geometrický význam:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

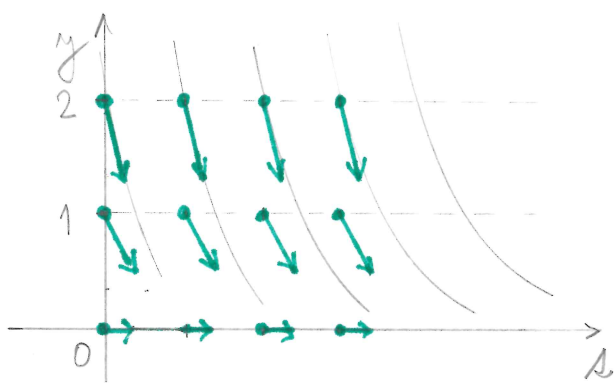
směrnice tečny k řešení $y(x)$ v bodě x ... ($\tan \alpha$)

$$\tan \alpha = \frac{f(x, y(x))}{1}$$



Příklad $y'(x) = -2y(x)$, $x \in \mathbb{R} = I$, tj. $y' = -2y$, tj. $f(y) = -2y$

např. pro $x=0$ a $y=0$... $y'(0)$ je směrnice tečny ke grafu $y(x)$ v bodě 0



$$y=0: f(0) = -2 \cdot 0 = 0$$

$$y=1: f(1) = -2 \cdot 1 = -2$$

$$y=2: f(2) = -2 \cdot 2 = -4$$

pro jiné x obdobně ($f = f(x, y(x))$)

... $(1, f(x, y))$... řešíme vektory $\rightarrow$ SMĚROVÉ POLE

... $y = y(x)$... nekonečně mnoho řešení

$$(y(x) = c \cdot e^{-2x}, c \text{ lib. konst. } \in \mathbb{R})$$

Obecné řešení ODR 1. řádu je funkce $y = y(x, c)$, $c \in \mathbb{R}$ (lib. par.), která splňuje danou rovnici $\forall c \in \mathbb{R}$ a $\forall x \in I$.

→ je to systém funkcí, graficky - systém křivek

→ pro konkrétní volbu parametru c v obecném řešení dostaneme partikulární řešení.

Poznámka U některých rovnic se vyskytují ještě tzv.

Singulární řešení (= vyjimečna), ty nelze získat z obecného řešení řádnou volbou parametru c .

Obvykle je v každém bodě singulárního řešení porušena jednorozměrnost, tj. prochází jím ještě jiné řešení (int. křivka)

Příklad: $y' = \sqrt[3]{y^2}$

obecné řešení: $y = \frac{1}{27}(1+c)^3$, $c \in \mathbb{R}$

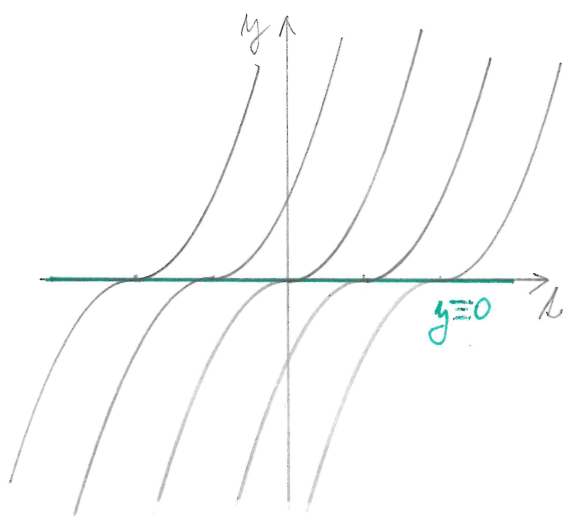
ověříme: $y' = \frac{1}{27} \cdot 3 \cdot (1+c)^2 = \frac{1}{9}(1+c)^2$

$$\sqrt[3]{y^2} = \left(\frac{1}{27}(1+c)^3 \right)^{\frac{2}{3}} = \left(3^{-3} \cdot (1+c)^3 \right)^{\frac{2}{3}} = 3^{-2} \cdot (1+c)^2 = \frac{1}{9}(1+c)^2 \quad \checkmark$$

singulární řešení: $y \equiv 0$

ověříme: $y' = 0$

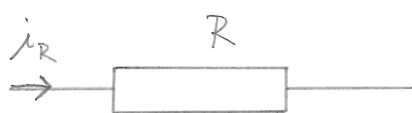
$$\sqrt[3]{y^2} = 0 \quad \checkmark$$



• Takmer se ODR berou?

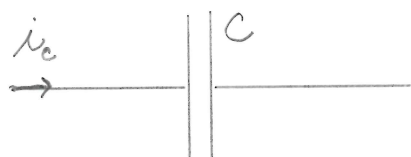
jsou odvozeny na základě fyzikálních (ekonomických, sociologických, ...) zákonů a pozorování (měření) určitých vztahů, které popisují reálný problém (zjednodušenou verzi)

Příklad: Vytváření kondenzátoru přes rezistor (RC-obvod)



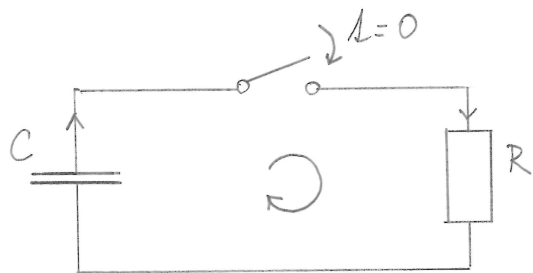
$R > 0 \dots$ odpor

ideální rezistor: $w_R = R \cdot i_R$



$C > 0 \dots$ kapacita

kapacitor (kondenzátor): $w_C' = \frac{1}{C} i_C$



Kirchhoffovy zákony:

1. (rovnice kontinuity el. proudu)

$$i_R(t) = i_C(t)$$

2. (zákon zachování energie)

$$w_R(t) + w_C(t) = 0$$

Zvolme za stavovou proměnnou napětí na kapacitoru, tj.

$$y(t) := w_C(t). \text{ Potom } y'(t) = w_C'(t) = \frac{1}{C} i_C(t) = \frac{1}{C} i_R(t) = \\ = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{R} w_R(t) = -\frac{1}{CR} w_C(t) = -\frac{1}{CR} y(t)$$

Závěr: $y'(t) = -k y(t)$, kde $k := \frac{1}{CR}$, $t \geq 0$

Pozn: Stejnou rovnici popisujeme i jiné jevy (např. zákon radioaktivního rozpadu), $y(t) \dots$ množství radioaktivní látky, $k > 0 \dots$ rozpadová konstanta

• Co je řešení a jak jej najít?

BAD NEWS: Neexistuje žádná univerzální metoda pro řešení ODR
 Umíme řešit pouze speciální typy!

Příklad: $y'(k) = -y(k)$ ($k=1$)

? je $y(k) = \sin k$ řešením rovnice?

$$y'(k) = [\sin k]' = \cos k \neq -y(k) = -\sin k$$

NE!

? je $y(k) = e^{-k}$ řešením rovnice?

$$y'(k) = [e^{-k}]' = e^{-k} \cdot [-1]' = -e^{-k} = -y(k)$$

ANO!

? je $y(k) = 10e^{-k}$ řešením rovnice?

$$y'(k) = [10 \cdot e^{-k}]' = 10 \cdot e^{-k} \cdot (-1) = -10e^{-k} = -y(k)$$

ANO!

Platí: Každá funkce ve tvaru $y(k) = A \cdot e^{-k}$, $A \in \mathbb{R}$,
 je řešením ODR: $y'(k) = -y(k)$! ↓ obecné řešení

Co je A?

$$y(0) = A \cdot e^{-0} = A \cdot 1 = A$$

(např. počáteční napětí
na kapacitoru)

$$\boxed{y(0) = A} \dots \text{počáteční podmínka} \uparrow$$

volbou konkrétního A dostaneme partikulární řešení

Poznámka: Můžeme najít řešení $y = y(k)$ ODR 1. řádu, které
 navíc splňuje počáteční podmínku $y(k_0) = y_0$ se
 nazývá počáteční (Cauchyova) úloha $\begin{cases} y' = f(k, y) \\ y(k_0) = y_0 \end{cases}$

Metoda přímé integrace

$$\boxed{y' = f(x)} \Rightarrow \underline{y(x) = \int f(x) dx = F(x) + c} \dots \text{obecné řešení}$$

Příklad:

$$\begin{cases} y' = x^3 + \sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

obecné řešení: $\underline{y(x) = \int (x^3 + \sin x) dx = \frac{1}{4}x^4 - \cos x + c}$

partikulární řešení: $y(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - \cos 0 + c = -1 + c = 1 \Rightarrow \underline{c = 2}$

$$\underline{y(x) = \frac{1}{4}x^4 - \cos x + 2}$$

Poznámka: Pro počáteční úlohu lze rovnou psát:

$$y' = f(x) \quad \Big| \int_{x_0}^x dx$$

$$\underbrace{y(x) - y(x_0)}_{= y_0} = \int_{x_0}^x f(s) ds = F(x) - F(x_0)$$

Příklady na procvičení

1) $\begin{cases} y' = e^{x-3} \\ y(3) = 0 \end{cases}$

2) $y' = \sin^2 x$

3) $y' = \frac{7}{x + x \ln^2 4x} \dots y = 7 \operatorname{arctg}(\ln 4x) + c$

4) $y' = \ln 8x \dots y = x \cdot \ln 8x - x + c$

5) $y' = x^3 e^{2x}$

6) $y' = \frac{1}{x(x+1)}$

7) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8) $y' = \sqrt{1-x^2}$

9) $y' = \lg x$

Metoda separace proměnných

Rovnici tvaru $y' = h(y)g(x)$ nazýváme rovnici se separovanými proměnnými

ŘEŠENÍ: I. Vyřešíme $h(y) = 0$... pokud takové y existují, pak je to konstantní řešení naší rovnice

II. Dále předpokládáme, že $h(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = y' = h(y)g(x) \quad | \cdot dx \quad | \cdot \frac{1}{h(y)}$$

$$\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx \quad | \text{Int}$$

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx \quad \dots \text{ je "odseparováno"}$$

$$\boxed{H(y) = G(x) + c}$$

$+c_1 \quad \quad +c_2$

$$(c = c_2 - c_1)$$

$$G' = g, \quad H' = \frac{1}{h}$$

↓
popisují řešení (křivky) implicitně

někdy lze psát: $y = H^{-1}(G(x) + c)$... explicitně

III. Pokud ke zvolené volbě konstanty c zůstanou v předpisu $H(y) = G(x) + c$ i konst. řešení, zahrneme je tam $\rightarrow$ obecné řešení.

Pokud to nebude, je příslušné konst. řešení řešením singulárním.

IV. Případy poč. podmínky $\rightarrow c = \dots$
 $\rightarrow$ partikulární řešení

Příklad:

$$\begin{cases} y'(x) = -y(x) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$y' = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \quad | \cdot dx$$

$$dy = -y dx \quad \text{Chceme vydelit } y$$

$$dy = -y dx \quad | : y \neq 0$$

$$\frac{1}{y} dy = -dx \quad | \int$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int dx$$

$$\ln |y| = -x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{-x+C} = e^{-x} \cdot \underbrace{e^C}_{=: B > 0} = B e^{-x}, \quad B > 0$$

$$|y| = B e^{-x}, \quad B > 0$$

$$y = \underbrace{(\pm B)}_{=: D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} e^{-x}$$

$$y = D \cdot e^{-x}, \quad D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y(x) = A \cdot e^{-x}, \quad A \in \mathbb{R}$$

OBEČNÉ ŘEŠENÍ

Dosadíme poč. podmínku:

$$y(0) = A \cdot e^{-0} = A \cdot 1 = A = 2$$

$$y(x) = 2 e^{-x}$$

partikulární řešení,
řešení počáteční úlohy

$y(x) \equiv 0$ je ale
řešení! ... konst. řeš.

Příklad
$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$y = y(x) = ?$

-9-

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} = h(y) \cdot g(x)$, kde $g(x) = 1$, $h(y) = \frac{1}{y}$

I. $h(y) = \frac{1}{y} \neq 0 \quad \forall y \Rightarrow$ rovnice nemá konst. řešení

II. můžeme oddělit $h(y)$, odseparujeme

$\int y dy = \int 1 dx$

$\frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} x^2 + \tilde{c}; \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$

$y^2 = x^2 + c \quad c = 2\tilde{c} \in \mathbb{R}$

obecné řešení

$y^2 - x^2 = c \quad \dots \text{IMPLICITNĚ}$

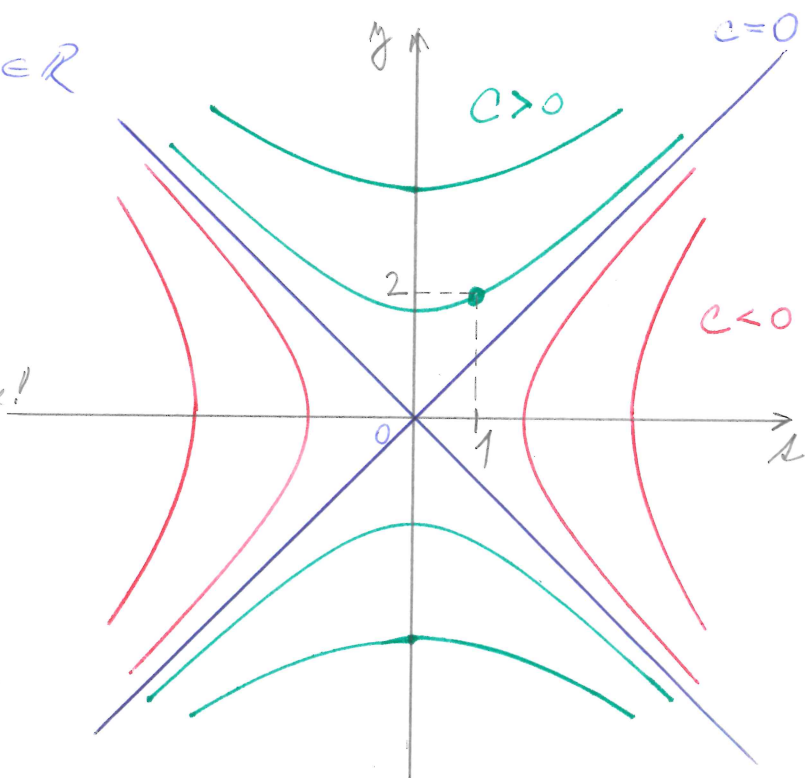
$y = \pm \sqrt{x^2 + c} \quad \dots \text{EXPLICITNĚ}$

→ nemůžeme vidět o jaké křivky jde!

→ $c=0$: $y = \pm \sqrt{x^2}$, tj. $y = \pm x$

→ $c < 0$: $x^2 - y^2 = -c \quad \dots$ hl. osa = x

→ $c > 0$: $y^2 - x^2 = c \quad \dots$ hl. osa = y



III. / (nemá konst. řešení)

IV. Počáteční podmínka $y(1) = 2 \rightarrow y^2 - x^2 = c \rightarrow 2^2 - 1^2 = c$
 $y^2 - x^2 = 3 \quad \dots$ Partikulární řešení (řešení poč. úlohy) $\underline{\underline{3=c}}$

ZKOUŠKA: IMPLICITNĚ

$y^2 - x^2 = c \quad | \frac{d}{dx}$

$2y y' - 2x = 0$

$y' = \frac{1}{y} \quad \dots$ pův. ODR

✓ EXPLICITNĚ

$y = \pm \sqrt{x^2 + c}$

$y' = \pm \frac{1}{2\sqrt{x^2 + c}} \cdot 2x = \frac{x}{y} = \frac{x}{\pm \sqrt{x^2 + c}}$
 $\uparrow_{LS} \quad \uparrow_{PS}$

Příklad
$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} \\ y(2) = 5 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = h(y) \cdot g(x), \text{ kde } g(x) = \frac{1}{x}, h(y) = y$$

I. $h(y) = y \equiv 0 \dots$ konstantní řešení (adept na singulární řešení)

II. $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

$$\ln|y| = \ln|x| + \bar{c}, \quad \bar{c} \in \mathbb{R} \longrightarrow$$

$\parallel$
 $\ln|c|, c \neq 0$

$$\ln|y| = \ln|cx|$$

$$|y| = |cx|$$

$$\boxed{y = cx; c \neq 0}$$

nebo:

$$\underbrace{e^{\ln|y|}}_{|y|} = \underbrace{e^{\ln|x| + \bar{c}}}_{|x| \cdot e^{\bar{c}}}$$

$$y = \underbrace{\pm e^{\bar{c}}}_{=c} x$$

$$\boxed{y = cx, c \neq 0}$$

III. pro $c=0$ dostaneme konst. řešení $y \equiv 0!$

$\Rightarrow$ obecné řešení je $\boxed{y = c \cdot x; c \in \mathbb{R}}$

přímky procházející
původem

IV. počáteční podmínka

$$y(2) = 5$$

$$\downarrow$$

$$y = c \cdot x$$

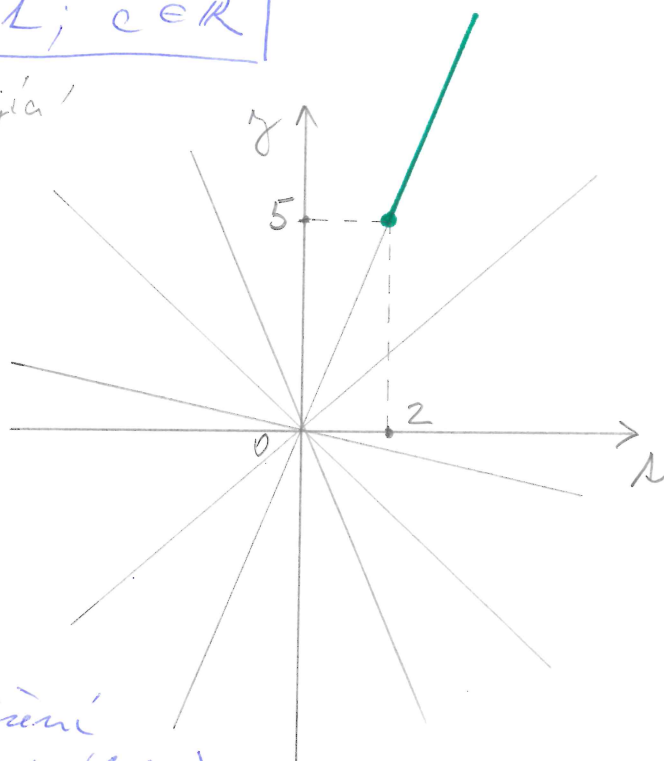
$$\downarrow$$

$$5 = c \cdot 2 \Rightarrow \underline{\underline{c = \frac{5}{2}}}$$

$$\boxed{y = \frac{5}{2}x}$$

Partikulární řešení
(Řešení počáteční úlohy)

$$x \in (2; \infty)$$



Příklad:

$$y' = 1(2y-1)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{1}_{g(x)} \cdot \underbrace{(2y-1)^2}_{h(y)} = g(x) \cdot h(y)$$

-11-

I. $h(y) = (2y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}} \dots$ konst. řešení

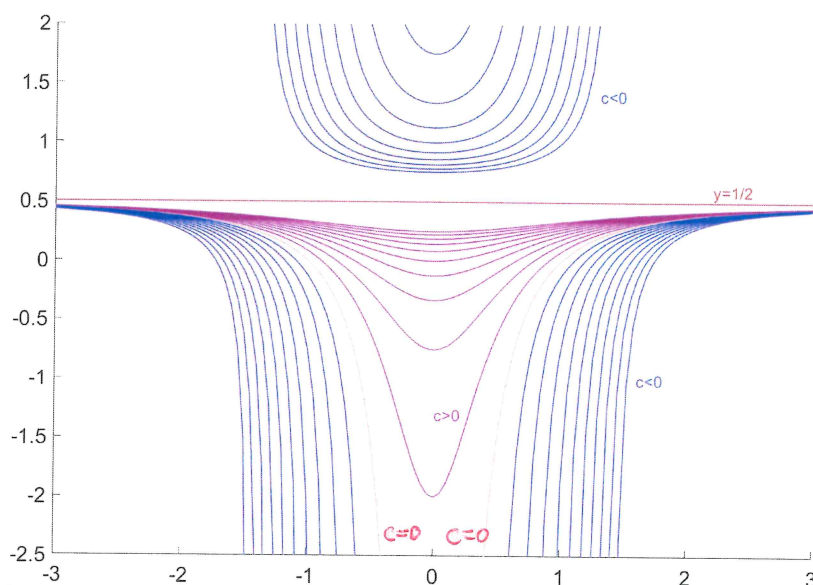
II. $\int \frac{dy}{(2y-1)^2} = \int 1 dx$

$$-\frac{1}{2(2y-1)} = \frac{1}{2}x^2 + \tilde{c} \quad | \cdot 2$$

$$-\frac{1}{2y-1} = x^2 + c := 2\tilde{c}$$

$$2y-1 = -\frac{1}{x^2+c}$$

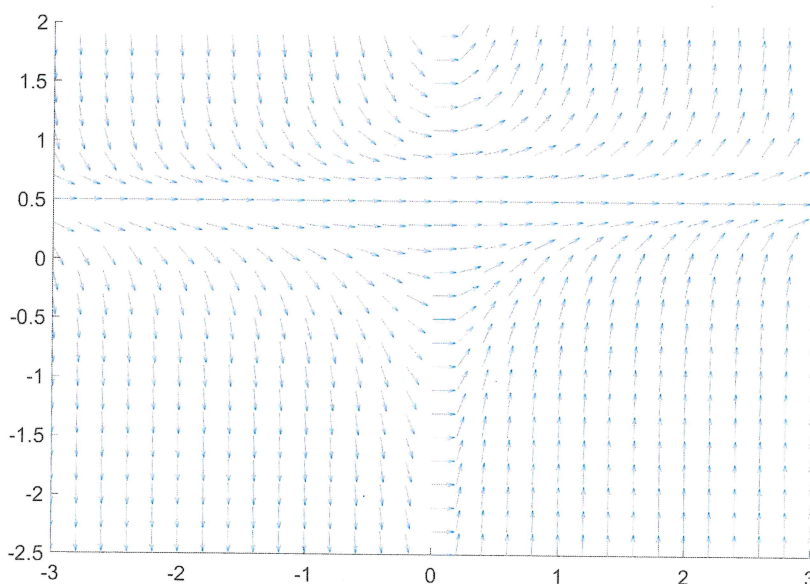
OBEČNÉ ŘEŠENÍ:



$$\boxed{y = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2+c} \right)}$$

$y \equiv \frac{1}{2}$ není singulární řešení, protože "neprochází" ostrými řešeními, ale doplňuje je

OBEČNÉ ŘEŠENÍ



SMĚROVÉ POLE