

REKAPITULACE

ODR 1. řádu :

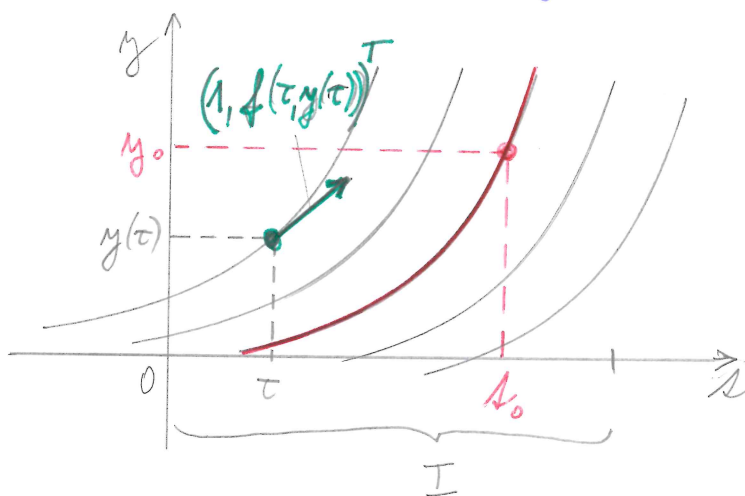
Dáno: $f(t, y)$... funkce
 $I \subset \mathbb{R}$... interval

Chceme najít funkci $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (řešení) takovou, že
 $y'(t) = f(t, y(t))$, $t \in I$ (zkráceno $y' = f(t, y)$)

Time:

- $f(t, y(t))$... směrnice tečny ke grafu řešení y v čase t .

- Obecně existuje
(pokud víte nějaké)
nekonečně mnoho
řešení



- Konkrétní řešení je
určeno tzv. počáteční
podmínkou :

$$y(t_0) = y_0$$

- Neexistuje žádná univerzální metoda řešení

- Speciální typy rovnic

① $y' = f(t)$ METODA PŘÍME INTEGRACE

② $y' = h(y)g(t)$ METODA SEPARACE PROMĚNNÝCH

↑ rovnice se separovatelnými proměnnými

I. $h(y) = 0 \rightarrow$ konst. řešení

II. $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t) dt \rightarrow$ obecné řešení $H(y) = G(t) + c$

III. singulární řešení

IV. počáteční podmínka $\rightarrow$ partikulární řešení

existuje? $G' = g$ $H' = \frac{1}{h}$

③

$$y' = a(t)y + b(t)$$

Lineární ODR 1. řádu:

$a(t)$... koeficient

$b(t)$... prava strana

$b(t) \equiv 0$... homogenní rovnice

$b(t) \neq 0$... nehomogenní rovnice

$a(t) = a$... konstantní koeficient

$a(t) \neq a$... nekonzstantní koeficient

Dáno: $I \subset \mathbb{R}$ interval;

$a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$... spojitelná

Hledáme: $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), t \in I$$

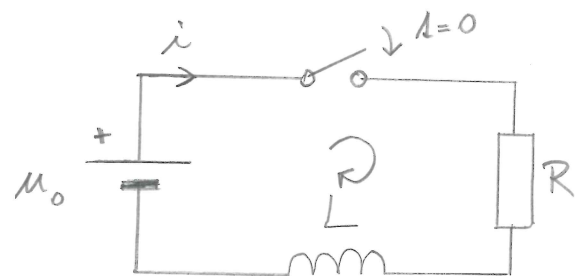
(+ Poč. podmínka:

$$y(t_0) = y_0, \text{ kde } t_0 \in I$$

a $y_0 \in \mathbb{R}$
pro daná

• Kde se berou?

Příklad: Obvod s rezistorem, cívkou a zdrojem (RL-obvod)



$L > 0$... indukčnost

induktor (ideální cívka)

Platí:

$$u_L(t) = L \cdot i_L'(t)$$

Kirchoffovy zákony:

1. (rovnice kontinuity el. proudu)

$$i_R(t) = i_L(t) = i(t) \dots \text{ zvolíme za}$$

2. (zákon zachování energie) stavovou proměnnou

$$u_R(t) + u_L(t) - u_0 = 0$$

$$R \underbrace{i_R(t)}_{i(t)} + L \underbrace{i_L'(t)}_{i'(t)} - u_0 = 0, t \geq 0$$

Tedy:

$$i'(t) = -\frac{R}{L} i(t) + \frac{u_0}{L}$$

$=: a(t) \qquad \qquad \qquad =: b(t)$

$a(t) = -\frac{R}{L}$... závisí na prvích v obvodu

$b(t) = \frac{u_0}{L}$... závisí na zdroji připojeném v obvodu

Pokud místo -11^+ dáme $-0 \sim 0^+$... a od tam $b(t) = \frac{u_0(t)}{L}$

jak vyřešit lineární ODR 1. řádu?

Plán: Najde řešení $y(x)$ lze zapsat ve tvaru:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x), \text{ kde}$$

$y_H(x)$ je nějaké řešení
homogenní rovnice, tj. $b(x)=0$
→ závisí na počátku v obvodu

$y_H(x)$... homogenní řešení

$y_P(x)$ je jedno řešení
nehomogenní rovnice,
tj. $b(x) \neq 0$
→ závisí na hodnotě
napětí

$y_P(x)$... partikulární
řešení

Krok 1: Najdi veškerá řešení $y_H(x)$, tj.
řešme homogenní rovnici:

$$y'(x) = a(x)y(x), x \in I$$

jak? Separací proměnných:

$$y' = a(x)y \quad (= g(x)h(y), \text{ kde } g(x) = a(x), h(y) = y)$$

I. $y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ konstantní řešení ... u lineární ODR vždy!

II. Pro $y \neq 0$: $\frac{dy}{dx} = a(x)y \rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a(x) dx$

($A(x)$ je primitivní fce k $a(x)$)
b existuje, protože a je spojitá

$$\ln|y| = A(x) + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{A(x) + C_1} = e^{A(x)} \cdot e^{C_1}$$

$$y = (\pm e^{C_1}) \cdot e^{A(x)} \Rightarrow y(x) = K \cdot e^{A(x)}$$

$$=: K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

III. Pro $K=0$ dostaneme konst. řešení $y \equiv 0$

$$y_H(x) = K \cdot e^{A(x)}, K \in \mathbb{R}$$

$A(x)$ je primitivní fce k $a(x)$
homogenní res. - Obecné řešení

Poznámka: Pokud $a(t) = a \in \mathbb{R}$, $t \in I$, lze řešení "uhodnout"

Příklad: $y'(t) = 2y(t)$, tj. $a = 2 \Rightarrow A(t) = 2t$

$$\rightarrow y_H(t) = K \cdot e^{2t}, K \in \mathbb{R}$$

(jinak: víme, že řešení je nějaká exponenciála, tj.
 $y(t) = e^{\lambda t}$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je nějaké číslo.

$$\lambda = ? : y'(t) = [e^{\lambda t}]' = e^{\lambda t} \cdot \lambda$$

Dosadíme

$$e^{\lambda t} \cdot \lambda = 2e^{\lambda t} \quad / : e^{\lambda t} > 0$$

$$\underline{\lambda = 2} \Rightarrow \underline{y(t) = e^{2t}}$$

pro počáteční podmínku $y(0) = 5$ dostaneme

$$y_H(0) = K \cdot e^{2 \cdot 0} = K \cdot 1 = K = 5$$

$$\boxed{y = 5e^{2t}}$$

K ZAPAMATOVÁNÍ (a = konst)

$$\begin{cases} y' = ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y(t) = K \cdot e^{at}, K \in \mathbb{R} \\ y(t) = y_0 \cdot e^{at} \end{cases}$$

Krok 2: Najdi jedno řešení $y_p(x)$, tj.

řešení rovnice: $y_p'(x) = a(x)y_p(x) + b(x)$

TRIK Variace konstanty ... „univerzální“ metoda

vycházíme z řešení homogenní rovnice $y_H(x) = K \cdot e^{A(x)}$ a

místo konstanty K uvádíme funkci $\varphi(x)$: $y_p(x) = \varphi(x) \cdot e^{A(x)}$

Hledáme $\varphi(x)$, aby platila diferenciální rovnice:

$$y_p'(x) = a(x)y_p(x) + b(x)$$

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= [\varphi(x) \cdot e^{A(x)}]' = \varphi'(x)e^{A(x)} + \varphi(x) \cdot e^{A(x)} \cdot A'(x) = \\ &= \varphi'(x)e^{A(x)} + \varphi(x)e^{A(x)} \cdot a(x) \end{aligned}$$

Po dosazení:

~~$$\varphi'(x)e^{A(x)} + \varphi(x)e^{A(x)}a(x) = a(x)\varphi(x)e^{A(x)} + b(x)$$~~

~~$$\varphi'(x)e^{A(x)} = b(x) \quad | \cdot e^{-A(x)}$$~~

Pozn: pokud jsme počali dobře, nyní stačí s $\varphi(x)$ řešit obyčejnou!

$$\varphi'(x) = e^{-A(x)} \cdot b(x) \quad | \text{Sokl}$$

$$\varphi(x) = \int e^{-A(x)} \cdot b(x) dx \quad \dots \text{existuje, protože } b(x) \text{ je spojitá}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = e^{A(x)} \cdot \int e^{-A(x)} b(x) dx$$

Platí tzv. Princip superpozice (schválně zapojení složek), tj.

je-li $b(x) = b_1(x) + b_2(x)$, potom najdeme $y_{P1}(x)$ tak, že

$$y_{P1}'(x) = a(x) y_{P1}(x) + b_1(x),$$

a $y_{P2}(x)$ takové, že

$$y_{P2}'(x) = a(x) y_{P2}(x) + b_2(x)$$

a potom

$$y_P(x) = y_{P1}(x) + y_{P2}(x)$$

Krok 3: Sečti řešení z kroků 1 a 2, tj.

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

Krok 4: Dosadíme počáteční podmínky, abysme měli jedno řešení počáteční úlohy.

Posledníky:

- Odvodili jsme vzorce pro $y_H(x)$ a $y_P(x)$, které se nebudeme mít nepaměť, tj. pro konkrétní rovnici vždy provedeme kroky 1 a 2
- Mají kroky 1 a 2 smysl pro všechny funkce $a(x)$ a $b(x)$? Máte pro spojité $a(x)$ a $b(x)$!!

Příklad :

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x) + e^{-x}, & x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$a(x) = 2 \text{ (a... konst.)}, \quad x \in \mathbb{R} \quad b(x) = e^{-x}$$

Krok 1: Hledáme všechna řešení homogenní rovnice:

$$y'(x) = 2y(x)$$

Jak? Separací nebo chytré viz dříve! (-14-)

$$\boxed{y_H(x) = K \cdot e^{2x}, \quad K \in \mathbb{R}}$$

Krok 2: Najdeme jedno $y_P(x)$ řešení nehomogenní rovnice

$$y'_P(x) = 2y_P(x) + e^{-x}$$

Jak? Variací konstanty, předpokládejme, že

$$y_P(x) = \varphi(x) e^{2x}, \quad \text{kde } \varphi(x) \text{ je hledaná funkce!}$$

$$y'_P(x) = [\varphi(x) e^{2x}]' = \varphi'(x) e^{2x} + \varphi(x) e^{2x} \cdot 2$$

Poďadíme:

$$\cancel{\varphi'(x) e^{2x} + \varphi(x) e^{2x} \cdot 2} = \cancel{2\varphi(x) e^{2x}} + e^{-x}$$

$$\varphi'(x) e^{2x} = e^{-x} \quad / : e^{2x}$$

$$\varphi'(x) = e^{-3x} \quad / \int dx$$

$$\varphi(x) = \int e^{-3x} dx = -\frac{e^{-3x}}{3} + C$$

$$\boxed{y_P(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} \cdot e^{2x} = -\frac{1}{3} e^{-x}}$$

Krok 3: $\boxed{y(x) = y_H(x) + y_P(x) = K \cdot e^{2x} + \left(-\frac{1}{3} e^{-x}\right) = K e^{2x} - \frac{1}{3} e^{-x}, \quad K \in \mathbb{R}}$

Krok 4: Poč. podm: $y(0) = K \cdot e^{2 \cdot 0} - \frac{1}{3} e^{-0} = K - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow K = \frac{1}{3}$

$y(0) = 0$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{3} e^{-x}}$$

-18-

Príklad :
$$\begin{cases} y'(x) = -\frac{2y}{x} + x^3 \\ y(2) = 4 \end{cases}$$

$a(x) = -\frac{2}{x}$ $H(x) = x^3$

Krok 1 : $y_H(x) = ?$ separácia premenných... $y' = -\frac{2}{x} \cdot y$ $\frac{y'(x)}{y(x)}$

1) konstantné riešenie $y \equiv 0$

2) $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{2}{x} dx$

$\ln|y| = -2 \ln|x| + \underbrace{c}_{\ln|c|}, c \neq 0$

$\ln \frac{|c|}{x^2}$

$|y| = \frac{|c|}{x^2}$

$y_H(x) = \frac{c}{x^2}, c \in \mathbb{R}$

Krok 2 : $y_P(x) = ?$ variácia konstanty... $y_P(x) = \varphi(x) \cdot x^{-2}$

po dosadení:

$\varphi'(x) x^{-2} - \varphi(x) \cdot \frac{2}{x^3} = -\frac{2\varphi(x)x^{-2}}{x} + x^3$

$\varphi'(x) \cdot x^{-2} = x^3$

$\varphi'(x) = x^5$

$\varphi(x) = \frac{1}{6} x^6$

$y_P(x) = \frac{1}{6} x^6 \cdot x^{-2} = \frac{1}{6} x^4$

Krok 3 : obecné riešenie : $y(x) = y_H(x) + y_P(x) = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{6} x^4, c \in \mathbb{R}$

Krok 4 : poč. podm : $y(2) = \frac{c}{2^2} + \frac{1}{6} \cdot 2^4 = \frac{c}{4} + \frac{16}{6} = \frac{c}{4} + \frac{8}{3} = 4$

$y(2) = 4$

$\frac{c}{4} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$

$c = \frac{16}{3}$

$y(x) = \frac{16}{3} x^{-2} + \frac{1}{6} x^4$