

Lineární ODR n -tého řádu s konstantními koeficienty

Jedná se o úlohu najít n -krát diferencovatelnou funkci $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že platí

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b(t), \quad t \in I,$$

kde je zadáno:

- $I \subset \mathbb{R}$... interval
- $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$... koeficienty rovnice

Poznámka:

Kdyby $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, potom $y(t)$ najdeme přímou integrací (n -krát), např.

$$y''' = 0 \Rightarrow y'' = c_1 \Rightarrow y' = c_1t + c_2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}c_1t^2 + c_2t + c_3, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

- $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$... spojitá ... pravá strana rovnice
pro $b(t) = 0$... homogenní rovnice
- + počáteční podmínky (n)

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_{01}, \quad y''(t_0) = y_{02}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n-1}$$

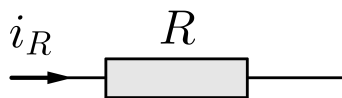
$$t_0 \in I, \text{ např. } t_0 = 0$$

$$y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1} \in \mathbb{R}$$

Odkud se berou?

Příklad: RLC obvod v sériovém zapojení

Víme, že platí:



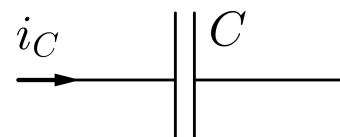
$$u_R = R \cdot i_R$$

Ohmův zákon



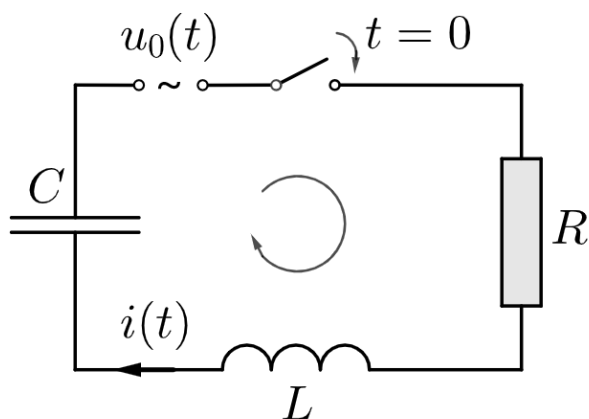
$$u_L(t) = L \cdot i'_L(t)$$

zákon el. mag. indukce



$$u'_C(t) = \frac{1}{C} \cdot i_C(t)$$

okamžitý náboj na deskách kondenzátoru
je přímo úměrný okamžitému napětí, tj.
 $q = Cu \Rightarrow i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$



Kirchhoffovy zákony:

1. rovnice kontinuity el. proudu:

$$i_R(t) = i_L(t) = i_C(t) = i(t) \dots$$

... zvolíme za stavovou proměnnou

2. zákon zachování energie:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) - u_0(t) = 0$$

$$R \cdot i(t) + L \cdot i'(t) + u_C(t) = u_0(t) \quad / \frac{d}{dt}$$

$$R \cdot i'(t) + L \cdot i''(t) + \frac{1}{C} \cdot i_C(t) = u'_0(t) \quad / : L$$

$$i''(t) + \frac{R}{L} i'(t) + \frac{1}{CL} i(t) = \frac{u'_0(t)}{L}$$

... lineární ODR 2. řádu s konst. koeficienty

$$a_1 = \frac{R}{L}, \quad a_0 = \frac{1}{CL}, \quad b(t) = \frac{u'_0(t)}{L}$$

Poznámka:

• pro $u_0(t) = U_0, t \in \mathbb{R} \Rightarrow u'_0(t) = 0 \Rightarrow \boxed{b(t) = 0} \dots$ homogenní rovnice

• pro $u_0(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \boxed{b(t) = \frac{u'_0(t)}{L} = \frac{U_0 \omega}{L} \cos(\omega t + \varphi)} \dots$ nehomogenní rovnice

Metoda řešení

GOOD NEWS: Platí vše jako u rovnic 1. řádu

Platí: Každé řešení $y(t)$ má tvar: $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$, kde

$y_H(t)$ je řešení homogenní rovnice,
tj. pro $b(t) = 0$

$y_H(t)$... **homogenní řešení**

⋮

$y_P(t)$ je jedno řešení nehomogenní rovnice,
tj. s pravou stranou $b(t)$

$y_P(t)$... **partikulární řešení**

Krok 1: Najdeme všechna řešení homogenní rovnice $y_H(t)$, tzn. obecné řešení
(separace proměnných, „chytře“)

Krok 2: Najdeme jedno řešení nehomogenní rovnice $y_P(t)$, tzv. partikulární řešení
(variací konstant, ...)

Krok 3: Sečteme $y_H(t)$ a $y_P(t)$

Krok 4: Dosadíme počáteční podmínky

Krok 1

Hledáme všechna $y_H(t)$.

Platí: Existuje n lineárně nezávislých funkcí $y_1, y_2, \dots, y_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takových, že řeší homogenní rovnici a každé další řešení homogenní rovnice má tvar:

$$y_H(t) = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) + \dots + K_n y_n(t), \quad \text{kde } K_1, K_2, \dots, K_n \in \mathbb{R}$$

$$\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\} \quad \dots \quad \text{fundamentální systém (FS)}$$

Prvky FS hledáme ve tvaru:

$$y(t) = e^{\lambda t}, \text{ kde } \lambda \text{ je (zatím) neznámé číslo.}$$

Příklad:

$n = 2$

$$y'' - y = 0$$

, tj.

$$y''(t) - y(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

předpokládejme: $y(t) = e^{\lambda t}$

$$y'(t) = e^{\lambda t} \cdot \lambda$$

$$y''(t) = e^{\lambda t} \cdot \lambda \cdot \lambda = e^{\lambda t} \cdot \lambda^2$$

dosadíme do rovnice:

$$e^{\lambda t} \cdot \lambda^2 - e^{\lambda t} = 0 \quad / : e^{\lambda t} > 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \dots \quad \text{charakteristická rovnice}$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\underline{\lambda_{1,2} = \pm 1}$$

$$\text{FS: } \left\{ \underbrace{e^t}_{=y_1(t)}, \underbrace{e^{-t}}_{=y_2(t)} \right\}$$

$$\underline{y_H(t)} = K_1 y_1(t) + K_2 y_2(t) = \underline{K_1 e^t + K_2 e^{-t}}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Poznámky:

- místo FS: $\{e^t, e^{-t}\}$ lze brát FS: $\{\sinh t, \cosh t\}$, protože
$$\sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \quad \text{a} \quad \cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{po sečtení:} \quad \sinh t + \cosh t = e^t \\ \text{po odečtení:} \quad \cosh t - \sinh t = e^{-t} \end{array} \right)$$

- charakteristickou rovnici lze psát rovnou !

Příklad:

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda_{1,2} = \pm j \in \mathbb{C}$$

$$\left(\begin{array}{l} y(t) = e^{\lambda t} \\ y'(t) = \lambda e^{\lambda t} \\ y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} \\ \lambda^2 e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0 \quad / : e^{\lambda t} > 0 \\ \lambda^2 + 1 = 0 \end{array} \right)$$

$$\mathbb{CFS}: \{e^{jt}, e^{-jt}\}$$

$$y_H(t) = K_1 e^{jt} + K_2 e^{-jt}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{C}$$

Problém: $y_H(t)$ je komplexní funkce
a my chceme reálnou !

Platí ovšem Eulerova identita:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

$$e^{jt} = \cos t + j \sin t$$

$$e^{-jt} = \cos t - j \sin t$$

$$e^{jt} + e^{-jt} = 2 \cos t \Rightarrow \cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})$$

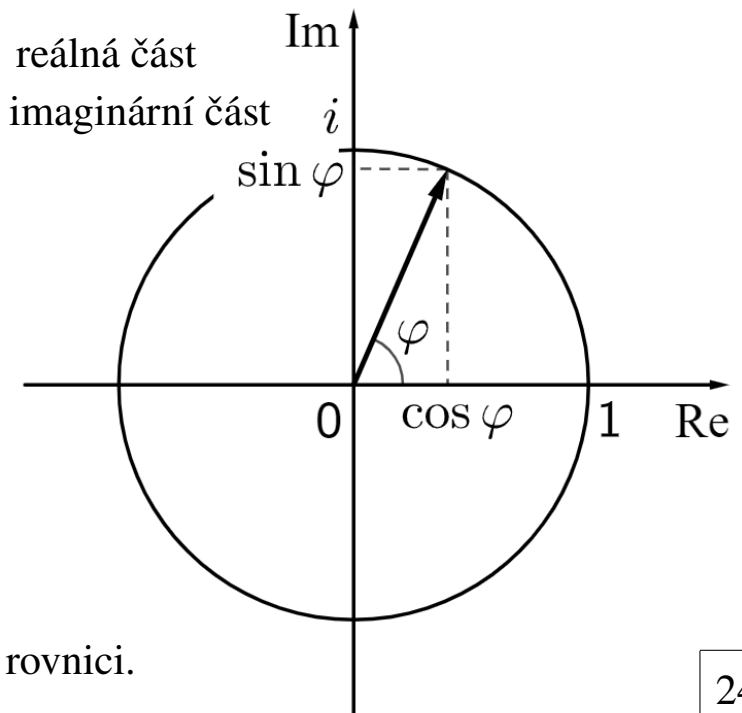
$$e^{jt} - e^{-jt} = 2j \sin t \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2j}(e^{jt} - e^{-jt})$$

$$\mathbb{RFS}: \{\cos t, \sin t\} \quad (\star)$$

$$y_H(t) = K_1 \cos t + K_2 \sin t, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

$\cos \varphi$... reálná část

$\sin \varphi$... imaginární část



Poznámka:

Jestliže $\lambda_1 = 1 + 3j \in \mathbb{C}$ řeší charakteristickou rovnici, musí i $\lambda_2 = 1 - 3j \in \mathbb{C}$ (komplexně sdružené) řešit charakteristickou rovnici.

(★)

$$\mathbb{C}\text{FS: } \left\{ \underbrace{e^{jt}}_{y_1(t)}, \underbrace{e^{-jt}}_{y_2(t)} \right\}$$

$y_1(t), y_2(t) \dots$ řeší homogenní rovnici

$\Rightarrow$ libovolná jejich lineární kombinace také řeší homogenní rovnici

$$\tilde{y}_1(t) = \frac{1}{2}y_1(t) + \frac{1}{2}y_2(t) = \cos t$$

$$\tilde{y}_2(t) = \frac{1}{2j}y_1(t) - \frac{1}{2j}y_2(t) = \sin t$$

musí řešit homogenní rovnici

$$\mathbb{R}\text{FS: } \left\{ \underbrace{\cos t}_{\tilde{y}_1(t)}, \underbrace{\sin t}_{\tilde{y}_2(t)} \right\}$$

Poznámka: Pro určení $\mathbb{R}\text{FS}$ vezmi reálnou část a imaginární část komplexní funkce.

Příklad:

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad y(t) = e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \dots \quad \text{charakteristická rovnice}$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \quad \dots \quad \text{násobný kořen !}$$

$$\text{FS: } \{e^t, t \cdot e^t\} \Rightarrow \underline{y_H(t) = K_1 e^t + K_2 t e^t, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}}$$

Cvičení:

Ověřme, že $y_2(t) = t e^t$ řeší diferenciální rovnici $y'' - 2y' + y = 0$.

$$y_2'(t) = [t \cdot e^t]' = e^t + t \cdot e^t = (1 + t) e^t$$

$$y_2''(t) = [(1 + t) \cdot e^t]' = e^t + (1 + t) e^t = (2 + t) e^t$$

po dosazení:

$$\underbrace{(2 + t) e^t}_{=y_2''} - 2 \underbrace{(1 + t) e^t}_{=y_2'} + \underbrace{t e^t}_{=y_2} = 0$$

$$\underbrace{[2 + t - 2(1 + t) + t]}_{=0} e^t = 0 \quad \checkmark$$

Poznámky:

- Pro rovnici 2. řádu máme v $y_H(t)$ dvě neznámé konstanty !
 $\Rightarrow$ Pro jejich určení potřebujeme dvě počáteční podmínky, např. $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
- Stejným způsobem řešíme i rovnice 3., 4., 5., ... řádu.