

REKAPITULACE

Lineární ODR 2. řádu:

např.

$$y''(t) - y(t) = 2e^{3t}$$

Víme, že:

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) \quad \leftarrow \text{stačí najít jedno, Jak ?}$$

 $\vdots$ $\vdots$ pro $b(t) = 0$ pro $b(t) = 2e^{3t}$

Krok 1

Krok 2

Krok 1

 $y_H(t) = ?$ Předpokládáme: $y(t) = e^{\lambda t}$, $t \dots$ číslo

$$y''(t) - y(t) = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \underline{\lambda_{1,2} = \pm 1}$$

FS: $\{e^t, e^{-t}\}$

$$\underline{y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Krok 2

Hledáme jedno $y_P(t)$, tj. řešení nehomogenní rovnice s pravou stranou $b(t)$ Platí princip superpozice:Jestliže $b(t) = b_1(t) \pm b_2(t)$ a $y_1(t)$ je řešení rovnice s pravou stranou $b_1(t)$ a $y_2(t)$ je řešení rovnice s pravou stranou $b_2(t)$,potom $y(t) = y_1(t) \pm y_2(t)$ je řešení rovnice s pravou stranou $b(t) = b_1(t) \pm b_2(t)$.Poznámka: Neplatí pro součin a podíl !!!

Metoda variace konstant (pro výpočet $y_P(t)$)

- + univerzální, tj. lze použít pro všechny (spojité) pravé strany $b(t)$
- dlouhý výpočet, musíme umět integrovat

Předpokládáme:

$$y_P(t) = \varphi_1(t) \cdot e^t + \varphi_2(t) \cdot e^{-t}, \quad \varphi_1, \varphi_2 \dots \text{ neznámé funkce}$$

φ_1 a φ_2 hledáme tak, aby byla splněna nehomogenní rovnice:

$$y_P''(t) - y_P(t) = 2e^{3t}$$

$$y_P'(t) = \varphi_1'(t)e^t + \varphi_1(t)e^t + \varphi_2'(t)e^{-t} - \varphi_2(t)e^{-t}$$

Zastav se !

$$\text{Polož: } \varphi_1'(t)e^t + \varphi_2'(t)e^{-t} = 0 \quad 1. \text{ rovnice} \quad \leftarrow \quad \text{FS: } \{e^t, e^{-t}\}$$

$$\Rightarrow y_P'(t) = \varphi_1(t)e^t - \varphi_2(t)e^{-t}$$

$$y_P''(t) = \varphi_1'(t)e^t + \varphi_1(t)e^t - \varphi_2'(t)e^{-t} + \varphi_2(t)e^{-t}$$

Dosadíme:

$$(\varphi_1'(t)e^t + \underline{\varphi_1(t)e^t} - \varphi_2'(t)e^{-t} + \underline{\varphi_2(t)e^{-t}}) - (\underline{\varphi_1(t)e^t} + \underline{\varphi_2(t)e^{-t}}) = 2e^{3t}$$

Poznámka: členy bez derivací $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$ musí vypadnout !

$$\varphi_1'(t)e^t - \varphi_2'(t)e^{-t} = 2e^{3t} \quad 2. \text{ rovnice}$$

Dostali jsme soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1'(t)e^t & + & \varphi_2'(t)e^{-t} = 0 \\ \varphi_1'(t)e^t & - & \varphi_2'(t)e^{-t} = 2e^{3t} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1'(t)e^t + \varphi_2'(t)e^{-t} &= 0 \\ \varphi_1'(t)e^t - \varphi_2'(t)e^{-t} &= 2e^{3t}\end{aligned}$$

sečtením:

$$\begin{aligned}2\varphi_1'(t)e^t &= 2e^{3t} \quad / : 2e^t \\ \varphi_1'(t) &= e^{2t} \quad / \int \\ \varphi_1(t) &= \frac{1}{2}e^{2t} + c\end{aligned}$$

odečtením:

$$\begin{aligned}2\varphi_2'(t)e^{-t} &= -2e^{3t} \quad / : 2e^{-t} \\ \varphi_2'(t) &= -e^{4t} \quad / \int \\ \varphi_2(t) &= -\frac{1}{4}e^{4t} + c\end{aligned}$$

tj. $y_P(t) = \varphi_1(t) \cdot e^t + \varphi_2(t) \cdot e^{-t} = \frac{1}{2}e^{2t} \cdot e^t - \frac{1}{4}e^{4t} \cdot e^{-t} = \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{3t} = \frac{1}{4}e^{3t}$

Krok 3

$$\underline{y(t) = y_H(t) + y_P(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Krok 4

Počáteční podmínky $\rightarrow$ určíme konstanty c_1, c_2

např. $y(0) = 0$

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{-0} + \frac{1}{4}e^{3 \cdot 0} = c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = 0$$

$$y'(0) = 1$$

$$y'(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t} + \frac{3}{4}e^{3t}$$

$$y'(0) = c_1 e^0 - c_2 e^{-0} + \frac{3}{4}e^{3 \cdot 0} = c_1 - c_2 + \frac{3}{4} = 1$$

Tedy:

$$\begin{aligned}\underline{c_1 + c_2 = -\frac{1}{4}} &\quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}2c_1 &= 0 \Rightarrow \underline{c_1 = 0} \\ 0 + c_2 &= -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{c_2 = -\frac{1}{4}}\end{aligned} &\quad \Rightarrow \quad \boxed{y(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t}}\end{aligned}$$

Poznámky:

- Stejně funguje i pro rovnice vyššího řádu, např. $n = 3$

$$\Rightarrow \text{FS: } \{y_1(t), y_2(t), y_3(t)\} \Rightarrow y_H(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Krok 1

$$\Rightarrow y_P(t) = \varphi_1(t) y_1(t) + \varphi_2(t) y_2(t) + \varphi_3(t) y_3(t), \quad \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 = ?$$

Krok 2

Dostaneme soustavu (lze psát rovnou) :

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) y_1(t) + \varphi_2'(t) y_2(t) + \varphi_3'(t) y_3(t) &= 0 \\ \varphi_1'(t) y_1'(t) + \varphi_2'(t) y_2'(t) + \varphi_3'(t) y_3'(t) &= 0 \\ \varphi_1'(t) y_1''(t) + \varphi_2'(t) y_2''(t) + \varphi_3'(t) y_3''(t) &= b(t) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1'(t) \\ \varphi_2'(t) \\ \varphi_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_1'(t), \varphi_2'(t), \varphi_3'(t) \Rightarrow \int \Rightarrow \varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$$

- V minulém příkladu $b(t) = 2e^{3t} \Rightarrow y_P(t) = \frac{1}{4}e^{3t}$ má stejný tvar !

$\Rightarrow$ Lze použít tzv. metodu odhadu

Metoda odhadu (pro výpočet $y_P(t)$)

- + rychlá, jednoduchý výpočet, nemusíme integrovat !
- lze použít jen pro speciální tvar pravé strany (polynom, exponenciála, sinus, kosinus)

Kuchařka:

1. Podívej se, zda je pravá strana $b(t)$ nebo její násobek prvkem FS.
2. **NE** $\Rightarrow$ použij $y_P(t)$ ve stejném tvaru jako $b(t)$
ANO $\Rightarrow$ vynásob tvar $b(t)$ proměnnou t (tolikrát, abys již $y_P(t)$ neměl ve FS)

Příklady:

1. $y''(t) - y(t) = 2e^{3t}$

Krok 1 FS: $\{e^t, e^{-t}\} \Rightarrow \underline{y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Krok 2 $b(t) = 2e^{3t} \dots$ není násobkem žádné funkce z FS

$\Rightarrow y_P(t) = A e^{3t}, \quad A \in \mathbb{R} \dots$ neznámá konstanta,

kterou hledáme tak, aby byla splněna nehomogenní rovnice: $y_P''(t) - y_P(t) = 2e^{3t}$

$\Rightarrow y_P'(t) = A \cdot e^{3t} \cdot 3$

$\Rightarrow y_P''(t) = 3 \cdot A \cdot e^{3t} \cdot 3 = 9Ae^{3t}$

$$9Ae^{3t} - Ae^{3t} = 2e^{3t} \quad / : e^{3t}$$

$$9A - A = 2$$

$$A = \frac{1}{4}$$

$$y_P(t) = \frac{1}{4}e^{3t}$$

2. $y''(t) - y(t) = t$

Krok 1 FS: $\{e^t, e^{-t}\} \Rightarrow \underline{y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Krok 2 $b(t) = t \quad \dots \quad \underline{\text{není}}$ násobkem žádné funkce z FS

$\Rightarrow y_P(t) = At + B, \quad A, B \in \mathbb{R} \quad \dots \quad \text{neznámé konstanty,}$

které hledáme tak, aby byla splněna nehomogenní rovnice: $y_P''(t) - y_P(t) = t$

$\Rightarrow y_P'(t) = A$

$\Rightarrow y_P''(t) = 0$

$0 - (At + B) = t + 0$

$A = -1 \quad \text{u } t^1$

$B = 0 \quad \text{u } t^0$

$y_P(t) = -t$

3. $y''(t) - y(t) = e^t$

Krok 1 FS: $\{e^t, e^{-t}\} \Rightarrow \underline{y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Krok 2 $b(t) = e^t \quad \dots \quad \underline{\text{je}}$ obsaženo v FS !

$\Rightarrow y_P(t) = t \cdot A e^t, \quad A \in \mathbb{R} \quad \dots \quad \text{neznámá konstanta,}$

kterou hledáme tak, aby byla splněna nehomogenní rovnice: $y_P''(t) - y_P(t) = e^t$

$\Rightarrow y_P'(t) = A e^t + t A e^t$

$\Rightarrow y_P''(t) = A e^t + A e^t + t A e^t = 2A e^t + t A e^t$

$2A e^t + \underline{t A e^t} - \underline{t A e^t} = e^t \quad / : e^t$

$2A = 1$

$A = \frac{1}{2}$

$y_P(t) = \frac{1}{2} t e^t$

4. $y''(t) - y(t) = \sin t$

Krok 1 FS: $\{e^t, e^{-t}\} \Rightarrow \underline{y_H(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Krok 2 $b(t) = \sin t \quad \dots$ má specifický tvar, není obsaženo ve FS !

$\Rightarrow y_P(t) = A \sin t + B \cos t^*$, $A, B \in \mathbb{R} \quad \dots$ neznámé konstanty,

které hledáme tak, aby byla splněna nehomogenní rovnice: $y_P''(t) - y_P(t) = \sin t$

$\Rightarrow y_P'(t) = A \cos t - B \sin t$

$\Rightarrow y_P''(t) = -A \sin t - B \cos t$

$-A \sin t - B \cos t - (A \sin t + B \cos t) = \sin t$

$-2A \sin t - 2B \cos t = 1 \cdot \sin t + 0 \cdot \cos t$

$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0$

$y_P(t) = -\frac{1}{2} \sin t$

Poznámka k *:

Bod $[A, B]$ v rovině lze popsat pomocí

→ vzdálenosti od počátku $\dots R$

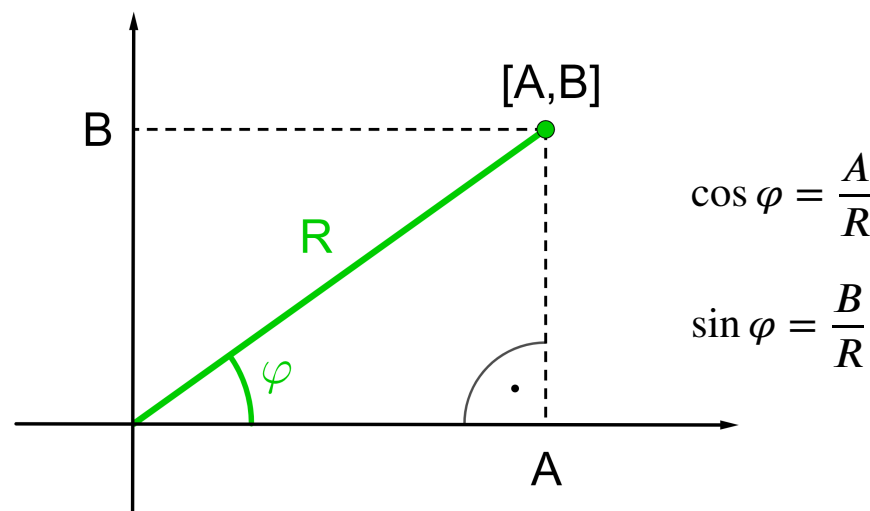
→ velikostí úhlu $\dots \varphi$

(polární souřadnice)

→ $y_P(t) = R \cos \varphi \sin t + R \sin \varphi \cos t$

$y_P(t) = R \underbrace{(\cos \varphi \sin t + \sin \varphi \cos t)}_{=\sin(t+\varphi)}$

$y_P(t) = R \sin(t + \varphi), \quad R \geq 0, \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$



tj. $A = R \cos \varphi, \quad B = R \sin \varphi$

Další příklady:

pravá strana $b(t)$ (buzení)	FS	partikulární řešení $y_p(t)$ (odezva)
$3 e^t$	e^{2t}, e^{3t}	$A e^t$
$5 t e^t$	e^t, e^{-t}	$(At + B) e^t \cdot t$
$5 t e^t$	$e^t, t e^t$	$(At + B) e^t \cdot t^2$
$2 \sin 6t$	$\sin t, \cos t$	$A \sin 6t + B \cos 6t$
$2 \sin 6t$	$\sin 6t, \cos 6t$	$(A \sin 6t + B \cos 6t) \cdot t$
t^3	e^t, e^{-t}	$At^3 + Bt^2 + Ct + D$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

• viz

$$y'' - 2y' + y = 5 t e^t$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \text{charakteristická rovnice}$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \quad \text{dvojnásobný kořen} \quad \text{FS: } \{e^t, t e^t\}$$

$$y_H(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y_P(t) = (At + B) e^t \cdot t^2, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y_P(t) = (At + B) e^t \cdot t} = (At^2 + Bt) e^t$$

$$y'_P(t) = (2At + B) e^t + (At^2 + Bt) e^t = [At^2 + (2A + B)t + B] e^t$$

$$y''_P(t) = (2At + 2A + B) e^t + [At^2 + (2A + B)t + B] e^t = [At^2 + (4A + B)t + 2(A + B)] e^t$$

$$[At^2 + (4A + B)t + 2(A + B)] e^t - 2 [At^2 + (2A + B)t + B] e^t + (At^2 + Bt) e^t = 5te^t$$

$$t^0 : 2(A + B) - 2B = 0$$

$$t^1 : 4A + B - 2(2A + B) + B = 5$$

$$t^2 : A - 2A + A = 0$$

$$2A = 0 \Rightarrow \underline{A = 0}$$

$$0B = 5 \quad \text{⚡⚡⚡}$$

$$\boxed{y_P(t) = (At + B) e^t \cdot t^2} = (At^3 + Bt^2) e^t$$

$$y'_P(t) = (3At^2 + 2Bt) e^t + (At^3 + Bt^2) e^t = [At^3 + (3A + B)t^2 + 2Bt] e^t$$

$$y''_P(t) = (3At^2 + 2(3A + B)t + 2B) e^t + [At^3 + (3A + B)t^2 + 2Bt] e^t = [At^3 + (6A + B)t^2 + (6A + 4B)t + 2B] e^t$$

$$[At^3 + (6A + B)t^2 + (6A + 4B)t + 2B] e^t - 2 [At^3 + (3A + B)t^2 + 2Bt] e^t + (At^3 + Bt^2) e^t = 5te^t$$

$$t^0 : 2B = 0$$

$$t^1 : 6A + 4B - 4B = 5$$

$$t^2 : 6A + B - 6A - 2B + B = 0$$

$$t^3 : A - 2A + A = 0$$

$$\underline{B = 0}$$

$$6A = 5 \Rightarrow \underline{A = \frac{5}{6}}$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$\underline{y_P(t)} = \left(\frac{5}{6}t + 0 \right) e^t \cdot t^2 = \underline{\underline{\frac{5}{6}t^3 e^t}}$$

Příklad:

$$y'' - y' = t - e^{-t}$$

Krok 1

$$y_H(t) = ? \quad \lambda^2 - \lambda = 0 \quad \dots \quad \text{charakteristická rovnice}$$

$$\lambda(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1$$

$$\text{FS: } \{1, e^t\}$$

$$\underline{y_H(t) = c_1 + c_2 e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Krok 2

$$y_P(t) = ?$$

Princip surepozice:

$$y_P(t) = y_{P1}(t) + y_{P2}(t)$$

$$y_{P1}(t) = (At + B) \cdot t \quad \dots \quad b_1(t) = t \quad (\text{1 je v FS})$$

$$y_{P2}(t) = Ce^{-t} \quad \dots \quad b_2(t) = -e^{-t}$$

$$y_{P1} : \quad y'_{P1}(t) = 2At + B$$

$$y''_{P1}(t) = 2A \quad \Rightarrow \quad 2A - (2At + B) = t$$

$$t^0 : \quad 2A - B = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{B = -1}$$

$$t^1 : \quad -2A = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{A = -\frac{1}{2}}$$

$$y_{P2} : \quad y'_{P2}(t) = -Ce^{-t}$$

$$y''_{P2}(t) = Ce^{-t} \quad \Rightarrow \quad Ce^{-t} + Ce^{-t} = -e^{-t}$$

$$2C = -1 \quad \Rightarrow \quad \underline{C = -\frac{1}{2}}$$

$$\underline{y_P(t) = \left(-\frac{1}{2}t - 1\right)t - \frac{1}{2}e^{-t}}$$

Metoda odhadu - obecné schéma

Pravá strana obyčejné diferenciální rovnice n -tého řádu musí být ve tvaru

$$b(t) = e^{\alpha t} (P(t) \cos(\beta t) + Q(t) \sin(\beta t)),$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou daná čísla, P je polynom stupně $k \in \mathbb{N}_0$ a Q je polynom stupně $\ell \in \mathbb{N}_0$. Položme

$$m := \max\{k, \ell\}.$$

Jestliže komplexní číslo $\alpha + j\beta$, které se nazývá *kritické číslo pravé strany*,

- (i) **není** řešením charakteristické rovnice, potom partikulární řešení odhadujeme ve tvaru

$$y_P(t) = e^{\alpha t} (\tilde{P}(t) \cos(\beta t) + \tilde{Q}(t) \sin(\beta t)),$$

kde $\tilde{P}$ a $\tilde{Q}$ jsou polynomy stupně m ;

- (ii) **je** r -násobným řešením charakteristické rovnice, potom partikulární řešení odhadujeme ve tvaru

$$y_P(t) = t^r e^{\alpha t} (\tilde{P}(t) \cos(\beta t) + \tilde{Q}(t) \sin(\beta t)),$$

kde $\tilde{P}$ a $\tilde{Q}$ jsou polynomy stupně m .

Poznámky:

- Jestliže $\alpha + j\beta \in \mathbb{C}$ není řešením charakteristické rovnice, potom funkce

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{a} \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

nejdou prvky fundamentálního systému. V KUCHAŘCE toto odpovídá situaci, že pravá strana ani její číselný násobek není ve fundamentálním systému;

- Jestliže $\alpha + j\beta \in \mathbb{C}$ je řešením charakteristické rovnice, například 2-násobným, potom funkce

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), \quad e^{\alpha t} \sin(\beta t), \quad te^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{a} \quad te^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

jsou prvky fundamentálního systému. V KUCHAŘCE toto odpovídá situaci, že pravá strana, respektive její číselný násobek, je ve fundamentálním systému a násobili bychom proměnnou t tolikrát, aby odhadované partikulární řešení y_P již nebylo ve fundamentálním systému.