

Soustavy n lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty

Motivace: Stav obvodu ve většině případů nelze v čase t popsat jediným skalárním parametrem, např. $i(t)$.
Potřebujeme více parametrů (2,3,...); např. smyčkové proudy.

Matematicky: Zobrazení, které reálnému času t přiřadí vektor $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$
se nazývá vektorová funkce jedné reálné proměnné.

Zápis: $\mathbb{R} \supset D \ni t \longrightarrow \vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$

D ... definiční obor $\vec{y}(t)$... nejvýše jedno (jde o funkci), leží v oboru hodnot $H \subset \mathbb{R}^n$

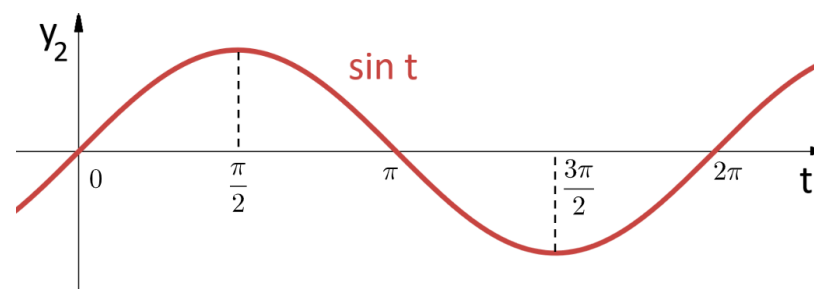
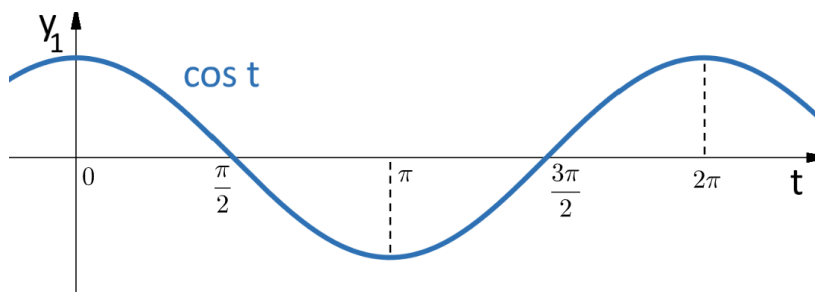
Úmluva: $n = 2$... abychom ušetřili psaní !

Příklad:

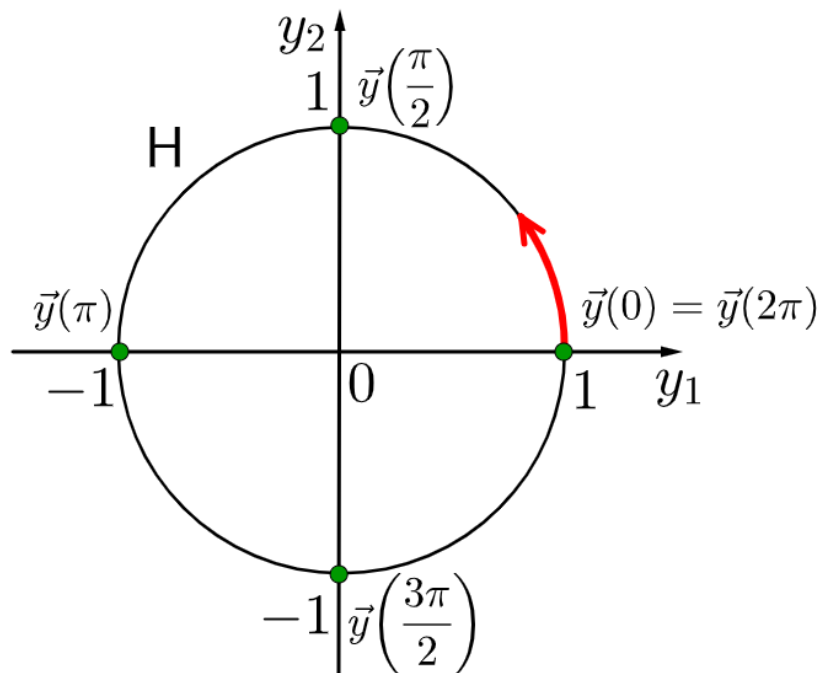
$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{ll} y_1(t) = \cos t & D(y_1) = \mathbb{R} \\ y_2(t) = \sin t & D(y_2) = \mathbb{R} \end{array} \right\} \quad D = \mathbb{R} \dots \text{průnik definičních oborů jednotlivých složek}$$

Znázornění:

1) po jednotlivých složkách (není názorné)



2) Nakreslíme obor hodnot $H \subset \mathbb{R}^2$



$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(\pi) = \begin{pmatrix} \cos \pi \\ \sin \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{y}(t)\| := \sqrt{[y_1(t)]^2 + [y_2(t)]^2} \quad \dots \quad \text{Eukleidovská vzdálenost}$$

$$\|\vec{y}(t)\| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \sqrt{1} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

v každém čase t je vzdálenost $\vec{y}(t)$ od počátku rovna 1

kružnice se středem $[0, 0]^T$ a poloměrem $r = 1 \quad \dots \quad H$

$H \quad \dots \quad$ se nazývá **křivka** a

$\vec{y}(t) \quad \dots \quad$ se nazývá **parametrizace dané křivky** (určuje směr pohybu, rychlost pohybu $\dots$)

Poznámka: Pro jednu křivku existuje více parametrizací (nekonečně mnoho).

• Limita vektorové funkce

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{y}(t) = \vec{b}} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{y}(t) - \vec{b}\| = 0,$$

kde $\|\vec{y}(t) - \vec{b}\| = \sqrt{(y_1(t) - b_1)^2 + (y_2(t) - b_2)^2} \dots$ vzdálenost bodů $\vec{y}(t)$ a $\vec{b}$

Platí: $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{y}(t) = \vec{b} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} y_1(t) = b_1 \wedge \lim_{t \rightarrow t_0} y_2(t) = b_2$

• Spojitost vektorové funkce

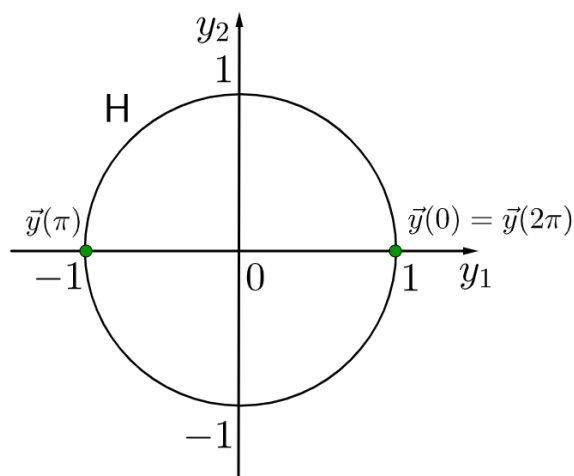
$\vec{y}(t)$ je spojitá v bodě t_0 , jestliže $\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{y}(t) = \vec{y}(t_0)}$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} y_1(t) = y_1(t_0) \wedge \lim_{t \rightarrow t_0} y_2(t) = y_2(t_0)$$

$$\Leftrightarrow y_1(t) \text{ i } y_2(t) \text{ jsou spojité v bodě } t_0$$

Příklad:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} = D$$



$$\boxed{\lim_{t \rightarrow 0} \vec{y}(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow 0} \cos t \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\vec{y}(0)}$$

$\dots$ $\vec{y}(t)$ je spojitá v $t_0 = 0$

(je dokonce spojitá ve všech bodech $t_0 \in D$!)

- Derivace vektorové funkce

Derivace funkce $\vec{y}(t)$ v bodě t_0 je

$$\vec{y}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{y}(t) - \vec{y}(t_0)}{t - t_0} \quad (\text{nemusí existovat !})$$

Platí:

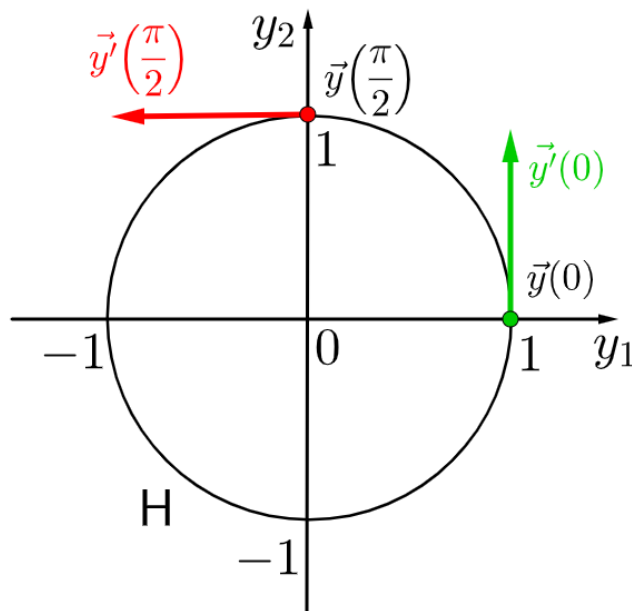
$$\vec{y}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \end{pmatrix}}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \begin{pmatrix} \frac{y_1(t) - y_1(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{y_2(t) - y_2(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y_1(t) - y_1(t_0)}{t - t_0} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y_2(t) - y_2(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1'(t_0) \\ y_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

Závěr: Derivaci vektorové funkce $\vec{y}(t)$ počítáme po složkách.

Příklad:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Geometrický význam:



$$\vec{y}'(0) = \begin{pmatrix} -\sin 0 \\ \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

směrový vektor tečny ke kružnici v bodě $t_0 = 0$

$$\vec{y}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

směrový vektor tečny ke kružnici v bodě $t_0 = \frac{\pi}{2}$

Soustava 2 lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty

je úloha najít (vektorovou) funkci $\vec{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tak, že $\vec{y}'(t) = \mathbf{A}\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$, kde máme dáno:

- $t \in I \subset \mathbb{R}$... daný interval
- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$... matice reálných koeficientů
- $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$... vektorová funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$
... pravá strana (vektor pravých stran)

po složkách:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11}y_1(t) + a_{12}y_2(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) &= a_{21}y_1(t) + a_{22}y_2(t) + b_2(t) \end{aligned}$$

Dáno:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}, \quad b_1, b_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Hledáme:

$$y_1(t) \text{ a } y_2(t) \quad \dots \quad \text{dvě neznámé funkce}$$

Proč? Každá lineární ODR 2. řádu se dá přepsat jako soustava 2 rovnic 1. řádu !

To je vhodné např. pro řešení v SW (MATLAB, ...)

Příklad: RLC obvod v sériovém zapojení:

ODR 2.řádu

$$i''(t) + \frac{R}{L} i'(t) + \frac{1}{CL} i(t) = \frac{U_0 \omega}{L} \cos(\omega t)$$

$$u(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

$$y_1(t) = i(t)$$

$$y_2(t) = y_1'(t) = i'(t) \Rightarrow y_2'(t) = i''(t)$$

$$y_2'(t) + \frac{R}{L} y_2(t) + \frac{1}{CL} y_1(t) = \frac{U_0 \omega}{L} \cos(\omega t)$$

soustava 2 ODR 1.řádu

$$1. \text{ rovnice: } y_1'(t) = 0 \cdot y_1(t) + 1 \cdot y_2(t) + 0$$

$$2. \text{ rovnice: } y_2'(t) = -\frac{1}{LC} \cdot y_1(t) - \frac{R}{L} \cdot y_2(t) + \frac{U_0 \omega}{L} \cos(\omega t)$$

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \quad \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{U_0 \omega}{L} \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}'(t) = \mathbf{A} \vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

Varování: Ne každá soustava 2 ODR 1. řádu se dá převést na jednu rovnici 2. řádu !

PŘEVOD:

Soustava n ODR 1. řádu

↖ A lze vždy

B nelze vždy ↘

Jedna ODR n -tého řádu

viz A

Příklad:

$$y'' - 3y' + 2y = \sin t$$

označíme $\left. \begin{array}{l} y =: y_1 \\ y' =: y_2 \end{array} \right\}$ tj. $y'_1 = y_2 = y'$

$$(y'' =) y'_2 = 3y' - 2y + \sin t = 3y_2 - 2y_1 + \sin t$$

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Příklad:

$$y''' - 4y'' + 5y' - 10y = e^{2t}$$

(3. řád $\rightarrow$ soustava 3 rovnic)

označme $\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$\begin{array}{l} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ y'_3 = 10y_1 - 5y_2 + 4y_3 + e^{2t} \end{array}$$

viz **B**

Příklad:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + y_2 + e^{2t} \\ y_2' &= y_1 - y_2 + \sin t\end{aligned}$$

z 1. rovnice vyjádříme: $y_2 = y_1' - y_1 - e^{2t}$

a zderivujeme: $y_2' = y_1'' - y_1' - 2e^{2t}$

a obojí dosadíme do 2. rovnice: $\underbrace{y_1'' - y_1' - 2e^{2t}}_{=y_2'} = y_1 - \underbrace{(y_1' - y_1 - e^{2t})}_{y_2} + \sin t$

$$y_1'' - 2y_1 = 3e^{2t} + \sin t$$

$$(y_2 = y_1' - y_1 - e^{2t})$$

Příklad:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 \\ y_2' &= 3y_2\end{aligned}$$

... nezávislé $\Rightarrow$ nelze spojit do 1 rovnice

Vyřešit tyto rovnice ale samozřejmě umíme:

$$\left(\begin{array}{l} y_1(t) = c_1 e^t, \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ y_2(t) = c_2 e^{3t}, \quad c_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$