

Soustavy n lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty

Motivace: Stav obvodu se většinou připadá měřit v čase t
popsat jedním skalárním parametrem, např. $i(t)$.
Potřebujeme více parametrů (2, 3, ...) např. smyčkové proudy.

Matematicky: Zobrazení, které reálnému číslu t přiřadí vektor $\vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ se nazývá vektorová funkce jedné reálné proměnné.

Zápis: $\mathbb{R} \supset D \ni t \mapsto \vec{y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$
 $\uparrow$ definiciční obor $\uparrow$ nejvýše jedno
 ležící v oboru hodnot $H \subset \mathbb{R}^n$

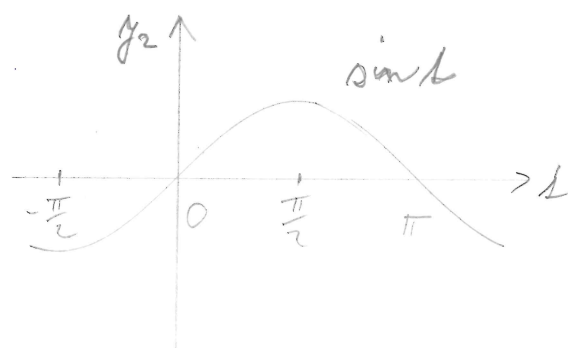
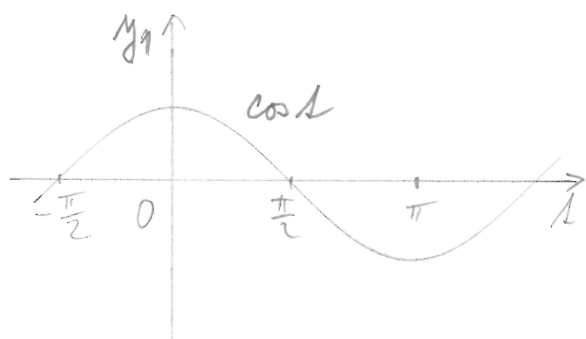
Umluva: $n=2$... abychom ušetřili psaní!

Příklad: $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $y_1(t) = \cos t$ $D(y_1) = \mathbb{R}$
 $y_2(t) = \sin t$ $D(y_2) = \mathbb{R}$

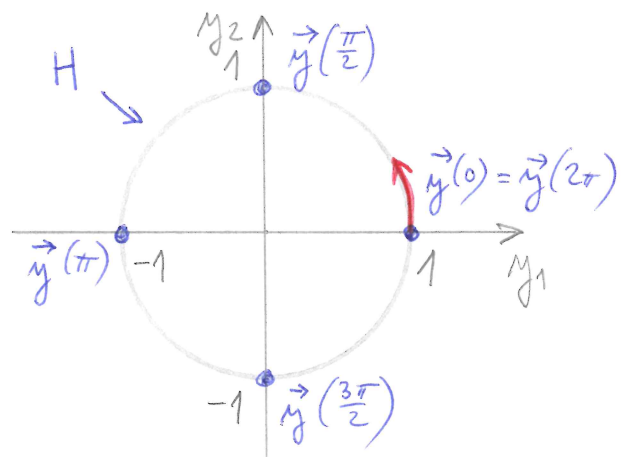
$D = \mathbb{R}$... průnik definičních oborů jednotlivých složek

Znakování:

1) po jednotlivých složkách (není náhodou)



2) Nakreslíme obor hodnot $H \subset \mathbb{R}^2$



$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} \\ \sin \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(\pi) = \begin{pmatrix} \cos \pi \\ \sin \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\|\vec{y}(t)\| := \sqrt{[y_1(t)]^2 + [y_2(t)]^2} \dots$ Eukleidovská vzdálenost

$$\|\vec{y}(t)\| = \sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \sqrt{1} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

... v každém čase t je vzdálenost $\vec{y}(t)$ od počátku rovna 1 ... kružnice se středem $(0,0)^T, r=1 \dots H$

$H \dots$ se nazývá křivka a $\vec{y}(t)$ se nazývá parametrizace dané křivky (určuje směr pohybu, rychlost pohybu...)

Poznámka: Pro jednu křivku existuje více parametrizací (nekonečně mnoho).

Další pojmy

● Limity vektorové funkce

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{y}(t) = \vec{b}} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{y}(t) - \vec{b}\| = 0,$$

kde $\|\vec{y}(t) - \vec{b}\| = \sqrt{(y_1(t) - b_1)^2 + (y_2(t) - b_2)^2} \dots$ vzdálenost bodů $\vec{y}(t)$ a $\vec{b}$

Platí: $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{y}(t) = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_0} y_1(t) = b_1 \\ \lim_{t \rightarrow t_0} y_2(t) = b_2 \end{cases} \quad \wedge$

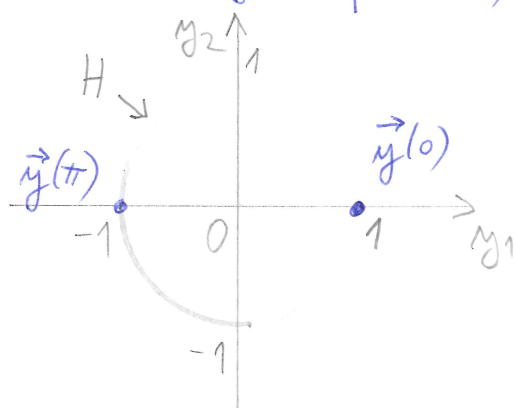
• Spojitost

$\vec{y}(t)$ je spojita v bode t_0 , jestliže $\boxed{\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{y}(t) = \vec{y}(t_0)}$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} y_1(t) = y_1(t_0) \quad \wedge \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y_2(t) = y_2(t_0)$$

$\Leftrightarrow y_1(t)$ i $y_2(t)$ jsou spojité v bode t_0 .

Příklad: $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} = D$



$$\begin{aligned} \boxed{\lim_{t \rightarrow 0} \vec{y}(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow 0} \cos t \\ \lim_{t \rightarrow 0} \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\vec{y}(0)} \end{aligned}$$

... $\vec{y}(t)$ je spojita v $t_0 = 0$

(je dokonce spojita v všech bodech $t_0 \in D$!)

• Derivace

Derivace funkce $\vec{y}(t)$ v bode t_0 je

$$\boxed{\vec{y}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{y}(t) - \vec{y}(t_0)}{t - t_0}}$$

(nemusí existovat!)

Plak':

$$\vec{y}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \end{pmatrix}}{t - t_0} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0} \begin{pmatrix} \frac{y_1(t) - y_1(t_0)}{t - t_0} \\ \frac{y_2(t) - y_2(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix} =$$

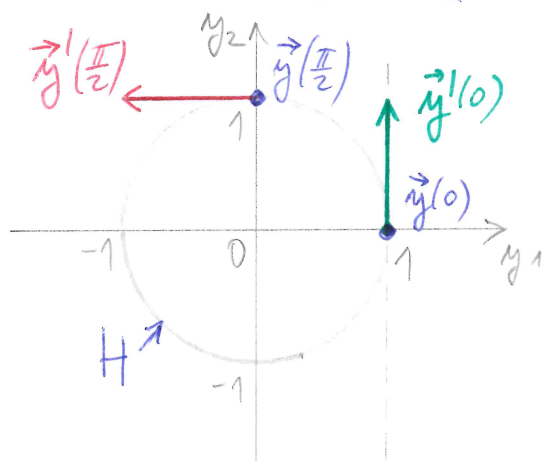
$$= \begin{pmatrix} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y_1(t) - y_1(t_0)}{t - t_0} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y_2(t) - y_2(t_0)}{t - t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1'(t_0) \\ y_2'(t_0) \end{pmatrix}$$

Záver: Derivaci vektorové funkce $\vec{y}(t)$ počítáme po složkách.

Příklad: $\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Geometrický význam:



$$\vec{y}'(0) = \begin{pmatrix} -\sin 0 \\ \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↑
směrový vektor tečny ke křivce
v bodě $t_0 = 0$, tj. $\vec{y}(0)$

$$\vec{y}'(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soustava 2 lineárních ODR 1. řádu s konstantními koeficienty
 je třeba najít (vektorovou) funkci $\vec{y}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tak, že

$$\boxed{\vec{y}'(t) = A \vec{y}(t) + \vec{b}(t)}, \text{ kde}$$

maťme dáno:

• $t \in I \subset \mathbb{R}$... daný interval

• $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

... matice reálných koeficientů

• $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}$... vektorová funkce
 $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^2$

... pravá strana (vektor pravých stran)

Po složkách:

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1'(t) &= a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t) + b_1(t) \\ y_2'(t) &= a_{21} y_1(t) + a_{22} y_2(t) + b_2(t) \end{aligned}}$$

Dáno: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Hledáme: $y_1(t)$ a $y_2(t)$... dvě neznámé funkce

Proc 2 Kāda' lineāru ODR 2. rādā se da' pārsat jāko
sistava 2 rānīc 1. rādā! ← vāodā 'pārsīnī'
n SW (MATLAB)

Pīklād: RLC vāod n sēnīvīm rāpōjīm'

ODR 2. rādā:

$$i''(t) + \frac{R}{L} i'(t) + \frac{1}{CL} i(t) = \frac{V_0 \omega}{L} \cos(\omega t)$$

$$u(t) = V_0 \sin(\omega t)$$

$$y_1(t) = i(t)$$

$$y_2(t) = y_1'(t) = i'(t) \Rightarrow y_2'(t) = i''(t)$$

$$y_2'(t) + \frac{R}{L} y_2(t) + \frac{1}{CL} y_1(t) = \frac{V_0 \omega}{L} \cos(\omega t)$$

Sistava 2 ODR 1. rādā:

1. rānīcē:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 0 \cdot y_1(t) + 1 \cdot y_2(t) + 0 \\ y_2'(t) &= -\frac{1}{CL} y_1(t) - \frac{R}{L} y_2(t) + \frac{V_0 \omega}{L} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{CL} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{V_0 \omega}{L} \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}'(t) = A \vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

Varōvānī: Ne kāda' sistava 2 ODR 1. rādā se da' pārsīst
nā jēdām rānīcī 2. rādā!

Převod

Soustava n ODR 1. řádu

(A)

← lze vždy

(B) nebíže vždy →

jedna ODR n-tého řádu

viz (A):

Příklad

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x$$

označíme

$$\left. \begin{array}{l} y =: y_1 \\ y' =: y_2 \end{array} \right\} \text{ tj. } y_1' = y_2 = y'$$

$$(y'' =) y_2' = 3y' - 2y + \sin x = 3y_2 - 2y_1 + \sin x$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

Příklad

$$y''' - 4y'' + 5y' - 10y = e^{2x} \quad (3. \text{ řád} \rightarrow \text{soustava } 3. \text{ rovnic})$$

$$\begin{array}{l} \text{označíme: } y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = 10y_1 - 5y_2 + 4y_3 + e^{2x} \end{cases}$$

Příklad:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 + e^{2x} \\ y_2' &= y_1 - y_2 + \sin x \end{aligned}$$

z 1. rovnice vyjádříme $y_2 = y_1' - y_1 - e^{2x}$
 a derivujeme: $y_2' = y_1'' - y_1' - 2e^{2x}$

a obě dosadíme do 2. rovnice:

$$y_1'' - y_1' - 2e^{2x} = y_1 - y_1' + y_1 + e^{2x} + \sin x$$

$$y_1'' - 2y_1 = 3e^{2x} + \sin x$$

$$(y_2 = y_1' - y_1 - e^{2x})$$

Příklad:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 \\ y_2' &= y_2 \end{aligned}$$

... nerovnice' $\Rightarrow$ nebo
spojit do 1 rovnice

(Výšešit bylo rovnice ale samostatně uvažujeme:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= K_1 e^x, \quad K_1 \in \mathbb{R} \\ y_2(x) &= K_2 e^{3x}, \quad K_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$